Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Serge Parpay

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices

Exercice 469-1 (Louis Rivoallan (La Rochelle) – Corol'aire n° 59

On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n, il y a exactement 2 autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à cette condition.
L'idée est venue d'un collègue de l'IUFM de La Rochelle qui a cherché à généraliser un exercice posé au concours de recrutement des professeurs des écoles.

Exercice 469-2 (Jean Raynier – Marseille), relayé par Henri Bareil

On donne un triangle isocèle ABC (AB = AC) tel que $\widehat{BAC} = 20°$.

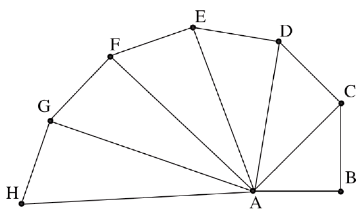
Sur [AC] on prend le point E tel que $\widehat{EBC} = 60°$.

Sur [AB] on prend le point D tel que $\widehat{DCB} = 50°$.

Que valent, en degrés, les angles $\widehat{EDC}$ et $\widehat{DEB}$?

Exercice 469-3 (Laurent Rouzière - Albi)

J'ai eu une question l'an passé en classe de seconde à propos de la construction de « l'escargot de Pythagore », voir figure jointe.
Les longueurs AB, BC, CD, DE,... valent 1.
La question posée par un élève était la suivante :

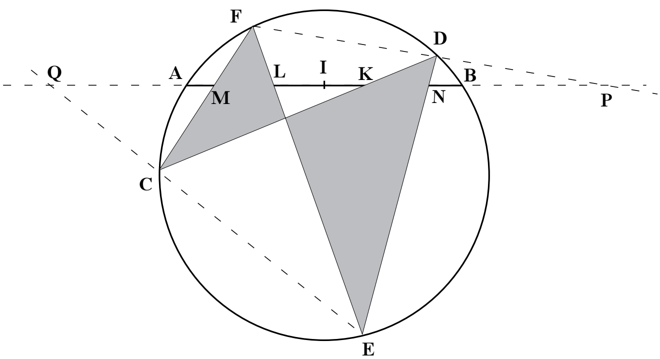


« Est-ce que, si on continue la construction, on peut trouver un point aligné avec A et B ? »
Je ne sais pas si cela peut faire l'objet de cette rubrique et, surtout, je n'ai pas de solution !
(NDLR) Alors… ?

Solutions :

Exercice 467-1 (Michel Lafond - Dijon)

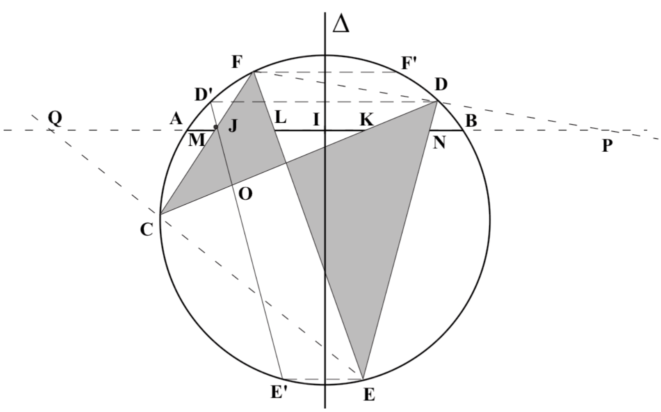
Se référant à l'exercice 464-1 de Georges Lion et Maurice Starck, Michel Lafond nous propose le théorème du sphinx (figure ci-dessous) :



Si, dans un cercle, AB est une corde de milieu I, et si CD et EF sont deux autres cordes coupant AB respectivement en K et L avec I milieu de KL, alors :
Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN.
Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ.

Solution de Georges Lion (Wallis)

On note Δ la médiatrice de [AB], D′, E′, F′ les symétriques de D,E,F par rapport à Δ.



Les arcs orientés DF et F′D′ étant isométriques et de même sens on a :

$$(CD, CF) = (CF', CD') = (E'F', E'D')$$

(par cocyclicité). Si (D′E′) coupe (CF) en J on en déduit

$$(CK, CJ) = (E'K, E'J),$$

si bien que J, K, C, E′ sont également cocycliques. Distinguons deux cas :

1) (D′E′) est parallèle à (CD). Il apparaît alors deux trapèzes isocèles D′CDE′ et JCKE′ d’axes de symétrie parallèles notés respectivement Δ_1 et Δ_2.
La symétrie d’axe Δ_1 envoie D en C et D′ en E′.
La symétrie d’axe Δ_2 envoie C en K et E′ en J.
Par la translation composée on trouve (KJ) parallèle à (DD′).

2) (D′E′) coupe (CD) en O. Des cocyclicités, on déduit :

$$\overline{OJ} \cdot \overline{OE'} = \overline{OK} \cdot \overline{OC}$$

et

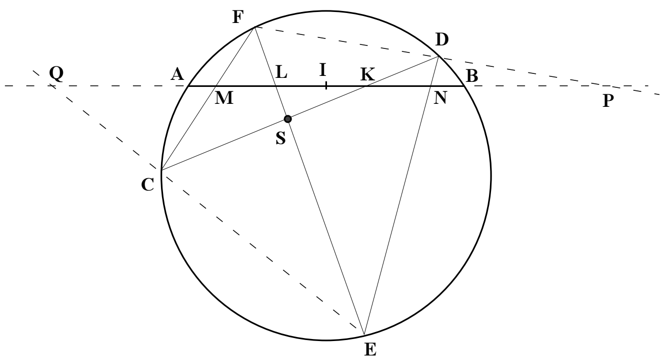
$$\overline{OD'} \cdot \overline{OE'} = \overline{OD} \cdot \overline{OC},$$

d’où OJ/OD′ = OK/OD et ainsi (JK) est encore parallèle à (DD′).

Dans les deux cas, sachant K sur (AB), il en est de même de J. Mais J appartenant aussi à (CF) est donc identique à M. Finalement (ED) coupe (AB) en le symétrique de M par rapport à D et I est bien le milieu de [MN].

Solution de René Manzoni (Le Havre)

Soit S le point commun aux droites(CD) et (EF).



En utilisant d’abord le théorème de Ménélaüs, relatif au triangle SKL coupé par les droites (CF) et (DE), et ensuite la notion de puissance d’un point par rapport à un cercle, il vient :

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{ML}} \cdot \frac{\overline{FL}}{\overline{FS}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{CK}} = +1, \quad \frac{\overline{NK}}{\overline{NL}} \cdot \frac{\overline{EL}}{\overline{ES}} \cdot \frac{\overline{DS}}{\overline{DK}} = +1,$$

d’où

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{LN}} \cdot \frac{\overline{LF}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{KD}} \cdot \frac{\overline{SC}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{SD}}{\overline{SE}} = +1, \quad \frac{\overline{KM}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{LN}} \cdot \frac{\overline{LA}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{KB}} = +1.$$

Sachant que le milieu I de [AB] est aussi celui de [KL], on a :

$$\overline{KA}.\overline{KB}=\overline{LA}.\overline{LB}.$$

On en déduit que

$$\overline{KM}.\overline{KN}=\overline{LM}.\overline{LN},$$

donc que I est le milieu de [MN]. La même méthode montre que I est le milieu de [PQ].

Autres solutions de **Christine Fenoglio** (Lyon), **Marie-Nicole Gras** (Le Bourg d'Oisans), **René Manzoni** [une deuxième solution pour revisiter la trigonométrie], **Raymond Raynaud** (Digne).
Solutions renvoyant au théorème de Desargues : Christian Dufis (Limoges) et un lecteur anonyme.

Remarque de Jacques Bouteloup (Rouen)

L'exercice 467-1 (généralisant 464-1) a lui-même une généralisation projective qui est une conséquence immédiate du théorème de Desargues sur les faisceaux de coniques : Une droite est coupée par les coniques d'un faisceau en des couples de points se correspondant dans une involution (correspondance homographique bivolutive).
J'utilise la figure et les notations de l'énoncé de 467-1, mais je suppose que le cercle est remplacé par une conique quelconque, I n'étant pas forcément le milieu de AB. Je considère les faisceaux de coniques de points de bases C, D, E, F qui comprend la conique donnée et les couples (A,B), (K,L), (M,N), (P,Q). Si I et J sont conjugués harmoniques par rapport à (A,B) et (K,L), ce sont les points invariants de l'involution, et ils sont également conjugués harmoniques par rapport à (M,N) et (P,Q). Lorsque I est milieu de [AB] et [KL], l'involution est une symétrie de centre I, et ce point est aussi milieu de [MN] et [PQ], J étant le point à l'infini de (AB). C'est, bien entendu, valable avec une conique quelconque au départ. L'exercice 464-1 est obtenu lorsque les sécantes passent par I, K et L étant confondus avec I. Il a déjà été posé (dans le cas particulier du cercle) dans Quadrature (exercice E.158, Avril 2001) sous le nom de théorème du Papillon.
Je pense qu'il est bon de chercher des exercices de démonstrations élémentaires pour des cas particuliers, mais qu'il peut être également valable de signaler que ce sont des aspects de propriétés générales. Encore faudrait-il qu'elles soient apprises aux futurs enseignants. La géométrie projective apparaît maintenant bien ignorée ! Qui connaît encore l'involution et le théorème de Desargues ?

Exercice 468-1 (Jean-Christophe Laugier - Rochefort) – Corol'aire n° 65

Déterminer des entiers A et B tels que A/B = 0,2006… avec B minimal.

Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

On utilise la théorie des fractions continues.
La quatrième réduite de 0,2006 est

$$(0,4,1,65)=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{65}}}=\frac{66}{329}.$$

C'est une fraction qui appartient à l'intervalle [0,20006 ; 0,2007[.
La quatrième réduite de 0,2007 est

$$(0,4,1,56)=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{56}}}=\frac{57}{284}.$$

C'est une fraction déjà strictement supérieure à 0,2007
La fraction

$$(0,4,1,57)=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{57}}}=\frac{58}{289}$$

appartient à l'intervalle [0,20006 ; 0,2007[.
Les nombres réels de l'intervalle [0,20006 ; 0,2007[ont pour quatrièmes réduites les fractions

$$(0,4,1,a)=\frac{a+1}{5a+4}$$

où $57 \leq a \leq 65$.
On sait que qu'une fraction approchant mieux un réel qu'une de ses réduites possède nécessairement un dénominateur plus grand que la réduite.

La solution du problème est donc la fraction $(0,4,1,57)=\frac{58}{289}$.

Solutions de Serge Parpay (Niort)

Première solution :

Notation : $[\alpha]$ est la partie entière du nombre positif α.

La fraction $\frac{A}{B}$ doit vérifier la double inégalité

$$0,2006<\frac{A}{B}<0,2007$$

et B doit être minimal. Soit une fraction $\frac{a}{b}$ vérifiant

$$\frac{2\,006}{10\,000}<\frac{a}{b}<\frac{2\,007}{10\,000} \qquad (1)$$

$$b<\frac{10\,000}{2\,006}a<5a.$$

On peut poser $b = 5a - p$ avec p entier et $0 < p < 5a$.
(1) prend alors la forme

$$\frac{2\,006}{10\,000}<\frac{a}{5a-p}<\frac{2\,007}{10\,000}.$$

On en déduit la double inégalité :

$$\frac{2\,006}{35}p<a<\frac{2\,006}{30}p.$$

Comme a est un entier :

$$\left\lfloor\frac{2\,007}{35}p\right\rfloor+1\le a\le\left\lfloor\frac{2\,006}{30}p\right\rfloor.$$

Si $p = 1$, $58 \le a \le 66$ et donc $289 \le 5a - 1 \le 329$.
Si $p \ge 2$,

$$a>\frac{2\,007}{35}p\ge\frac{4\,014}{35}>114$$

et

$$5a-p>\frac{10\,000\times 114}{2\,007}>568.$$

La plus petite valeur de $5a - p$ est égale à 289 avec $a = 58$ et $p = 1$.
Les valeurs cherchées sont par conséquent A = 58, B = 289, avec

$$\frac{58}{289}=0,200\,692\,0\ldots$$

Deuxième solution :

Notation : Soit une fraction α/β telle que $\alpha < \beta$. Cette fraction admet un développement en fraction continue. On adoptera la notation

$$\frac{\alpha}{\beta}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n).$$

Par exemple $\dfrac{57}{284}=\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{56}}}$ *s'écrira* $\dfrac{57}{284}=(4,1,56)$.

La fraction A/B doit vérifier la double inégalité

$$0,2006<\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}<0,2007$$

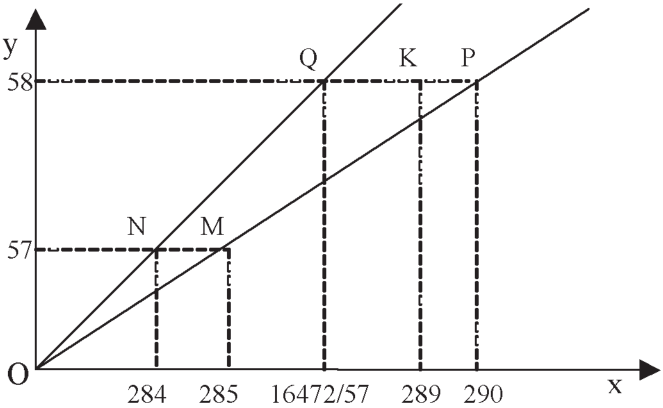
et B doit être minimal. Soit une fraction a/b vérifiant

$$\frac{2\,006}{10\,000}<\frac{a}{b}<\frac{2\,007}{10\,000}.$$

On a $\dfrac{2\,006}{10\,000}=(4,1,65,1,6,2)$; les premières réduites sont : $(4,1)=\dfrac{1}{5}$ et $(4,1,65)=\dfrac{66}{329}$. Par ailleurs $\dfrac{2\,007}{10\,000}=(4,1,56,1,11)$; les premières réduites sont : $(4,1)=\dfrac{1}{5}$ et $(4,1,56)=\dfrac{57}{284}$. Par suite $\dfrac{1}{5}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{57}{284}$, soit $\dfrac{57}{285}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{57}{284}$.

Soit le repère (Ox,Oy), une fraction α/β sera représentée par le point de coordonnées (β ; α).

Pour des raisons graphiques, les longueurs des graduations ne sont pas respectées. Le schéma n'est là que pour aider à la lecture du texte.



On utilise les points M et N représentant les fractions 57/285 et 57/284. M (285 ; 57) : le coefficient directeur de (OM) vaut 1/5. N (284 ; 57) : le coefficient directeur de (ON) vaut 57/284. La fraction A/B recherchée sera représentée par un point Ψ(B ; A), situé nécessairement dans l'angle $\widehat{MON}$. Il y a 57 points de coordonnées entières sur le segment [OM[. Il y a un point de coordonnées entières sur le segment [MN[, le point M. Il y a un point de coordonnées entières sur le segment [NO[, le point N. Donc sur le pourtour du triangle OMN, il y a 59 points de coordonnées entières. L'aire du triangle étant égale à 57/2, n étant le nombre de points de coordonnées entières intérieurs au triangle, on a $57/2 = 59/2 + n - 1$ (théorème de Pick). Donc $n = 0$, par suite le point Ψ ne peut être situé dans le triangle OMN. Soit le point P (290 ; 58) sur la droite (OM) et Q (16472/57 ; 58) sur la droite (ON) : $288 < 16\,472/57 < 289 < 290$, le point K(289 ; 58) est le point de coordonnées entières d'abscisse minimum situé dans l'angle $\widehat{MON}$.

Comme on a de plus $0{,}200\,6 < 58/289 < 0{,}200\,7$; le point K est le point Ψ recherché.

Les valeurs cherchées sont par conséquent A = 58, B = 289, avec

$$58/289 = 0{,}2006920\ldots$$

Autre solution de **Alain Corre** (Moulins).