Les problèmes de l'APMEP

Solution du n° 308

Énoncé n° 308 (François LO JACOMO, 75–Paris)

Soient (D_1) et (D_2) deux droites de l'espace. À quelle condition, si l'on compose une rotation d'un tiers de tour autour de (D_1) avec une rotation d'un tiers de tour autour de (D_2), obtient-on une rotation d'un tiers de tour ? À quelle condition, si l'on compose une rotation d'un quart de tour autour de (D_1) avec une rotation d'un quart de tour autour de (D_2), obtient-on une rotation d'un quart de tour ?

SOLUTION

C'est en relisant le manuscrit de Jean Trignan, *La géométrie des nombres hypercomplexes* (paru récemment chez Vuibert), que m'est venue l'idée de ce problème. Et j'ai reçu plusieurs solutions : Michel BATAILLE (76–Rouen), Richard BECZKOWSKI (71–Chalon s/Saône), Marie-Laure CHAILLOUT (91–Epinay s/Orge), Christian DUFIS (87–Limoges), Robert FERRÉOL (75–Paris), Georges LION (98–Wallis), René MANZONI (76–Le Havre) et Raymond RAYNAUD (04–Digne), qui permettent de dégager trois méthodes.

Tout d'abord, ne négligeons pas la question : à quelle condition, si l'on compose une rotation autour de (D_1) avec une rotation autour de (D_2), obtient-on une rotation ? Appelons r_1 et r_2 les rotations d'axes (D_1) et (D_2), $(D_{\dots})$ l'axe de la composée, M un point de $(D_{\dots})$. Si r_1 transforme M en M′, r_2 doit transformer M′ en M. Donc (D_1) doit appartenir au plan bissecteur de [MM′] et (D_2) également : les deux axes (D_1) et (D_2) doivent être coplanaires. Si (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires, la composée n'est pas une rotation, mais un vissage propre.

La première des trois méthodes utilisées, peut-être la plus classique, consiste à considérer les rotations comme des produits de demi-tours : si d est le demi-tour autour de la perpendiculaire commune à (D_1) et (D_2), on peut écrire : $r_1 = d \circ d_1$, $r_2 = d_2 \circ d$, d'où $r_2 \circ r_1 = d_2 \circ d_1$. Le problème se ramène à trouver l'angle des axes des demi-tours d_2 et d_1.

Mais la seconde méthode me semble plus facile à visualiser. Elle consiste à considérer les rotations comme des produits de symétries planes. Si $(P_{\dots})$ est le plan défini par (D_1) et (D_2), et $p_{\dots}$ la symétrie par rapport à ce plan, il existe deux symétries planes p_1 et p_2, par rapport à des plans (P_1) et (P_2), telles que : $r_1 = p_{\dots} \circ p_2$ et $r_2 = p_1 \circ p_{\dots}$. (D_1) est l'intersection des plans $(P_{\dots})$ et (P_2), et (D_2) l'intersection des plans (P_1) et $(P_{\dots})$. La composée $r_2 \circ r_1 = p_1 \circ p_2$ est une rotation d'axe $(D_{\dots}) = (P_1) \cap (P_2)$. Or l'angle de r_1 (resp. r_2 et $r_{\dots}$) est le double de l'angle des plans $(P_{\dots})$, (P_2) (resp. (P_1), $(P_{\dots})$ et (P_2), (P_1)). Il suffit donc de trouver trois plans formant deux à deux un angle de $\pi/\dots$ pour la première question, $\pi/4$ pour la seconde.

N'oublions pas que les droites (D_1) et (D_2), coplanaires, ne sont pas obligatoirement sécantes. Si elles sont parallèles (ou confondues), la composée des rotations r_1 et r_2 d'angles $2\pi/\dots$ est une rotation d'angle $2\pi/\dots$ si r_1 et r_2 sont de même sens, c'est une translation si elles sont de sens contraire. Dans le premier cas, l'axe $(D_{\dots})$ de la composée est tel que les plans (P_1), (P_2) et $(P_{\dots})$ forment des angles de $\pi/\dots$: l'intersection des trois axes (D_1), (D_2) et $(D_{\dots})$ avec un plan perpendiculaire forme donc un triangle équilatéral. Par contre, deux rotations r_1 et r_2 d'angles $\pi/2$ autour d'axes parallèles ont pour composée soit une translation, soit une rotation d'angle π, donc en aucun cas une rotation d'angle $\pi/2$.

Si (D_1) et (D_2) sont sécantes en T, T appartient aux trois plans (P_1), (P_2) et $(P_{\dots})$ donc à $(D_{\dots})$. On peut voir ces trois plans comme les trois faces d'une pyramide TABC plus ou moins aplatie, de base un triangle équilatéral. Si l'on considère un repère dans lequel les sommets de la pyramide soient T (t, t, t), A $(1, 0, 0)$, B $(0, 1, 0)$, C $(0, 0, 1)$, le vecteur $(t, t, 1-2t)$ est orthogonal au plan TAB, donc l'angle θ des plans vérifie

$$\cos\theta = \frac{-3t^2+2t}{6t^2-4t+1}$$

alors que l'angle δ des droites vérifie :

$$\cos\delta = \frac{3t^2-2t}{3t^2-2t+1}.$$

Il est facile de remarquer que :

$$\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\delta}=-1,$$

donc

$$\cos\delta = \frac{-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

Pour que la composée de deux tiers de tours d'axes concourants (D_1) et (D_2) soit un tiers de tour, il faut et il suffit que les axes (D_1) et (D_2) forment un angle de cosinus $-1/\dots$ Pour que la composée de deux quarts de tours d'axes (D_1) et (D_2) soit un quart de tour, il faut et il suffit que les axes (D_1) et (D_2) soient concourants et forment un angle de cosinus $1-\sqrt{2}$.

Le cas des tiers de tour présente un intérêt supplémentaire : T est le centre d'un tétraèdre régulier ABCD (ou d'un cube dont A, B, C, D sont quatre des huit sommets). La rotation d'un tiers de tour autour de $(D_1) = (TB)$ (grande diagonale du cube) permute C, D et A, et la rotation d'un tiers de tour autour de $(D_2) = (TC)$ permute D, A et B. Si ces deux rotations sont dans le « bon sens » : $A \to D \to C$ puis $D \to A \to B$, leur composée est bien une rotation d'angle $\pi/\dots$ autour de $(TD) = (D_{\dots})$, vérifiant : $A \to B \to C$. Si par contre r_2 est dans l'autre sens, la composée est un demi-tour autour de la perpendiculaire commune à AC et BD.

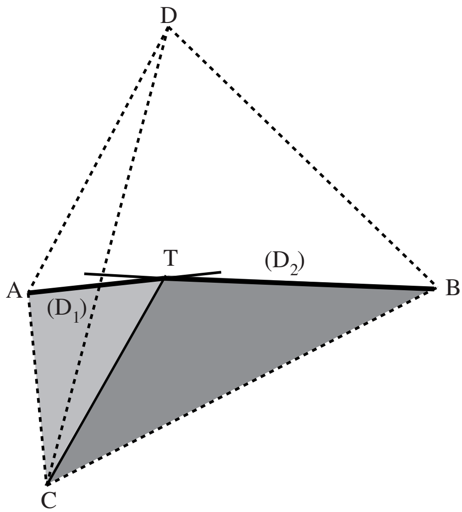

Figure : Le composé de deux tiers de tour est un tiers de tour…

La troisième méthode, celle à laquelle j'avais pensé initialement, utilise les quaternions. Rappelons qu'un quaternion peut s'écrire $t + u$ où $u = x\,\mathrm{i} + y\,\mathrm{j} + z\,\mathrm{k}$ peut être identifié au vecteur $\vec{u}$ (x, y, z). Deux quaternions u et v, de parties réelles nulles, ont alors pour produit :

$$uv = -\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{v},$$

si bien que : lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $uv = vu$; lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, $uv = -vu$. Donc comme cette multiplication des quaternions est associative, une rotation de θ autour d'un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ transforme un vecteur $\vec{v}$ en $\left(\cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}\right)v\left(\cos\frac{\theta}{2} - u\sin\frac{\theta}{2}\right)$: c'est immédiat lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou orthogonaux, cela se généralise à tout autre vecteur par linéarité. Si donc on associe à une rotation r_1 d'angle θ_1 autour d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_1}$ le quaternion $\left(\cos\frac{\theta_1}{2} + u_1\sin\frac{\theta_1}{2}\right)$, et à une rotation r_2 d'angle θ_2 autour d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_2}$ le quaternion $\left(\cos\frac{\theta_2}{2} + u_2\sin\frac{\theta_2}{2}\right)$, à la rotation $r_2 \circ r_1$ on associera le produit des quaternions :

$$\left(\cos\frac{\theta_2}{2} + u_2\sin\frac{\theta_2}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta_1}{2} + u_1\sin\frac{\theta_1}{2}\right).$$

Sa partie réelle suffit à déterminer l'angle δ de la rotation $r_2 \circ r_1$:

$$\cos\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} - \left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right)\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\ ,$$

la partie vectorielle fournissant l'axe de cette rotation :

$$\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)\overrightarrow{u_3} = \left(\cos\frac{\theta_1}{2}\right)\overrightarrow{u_2} + \left(\cos\frac{\theta_2}{2}\right)\overrightarrow{u_1} + \left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right)\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\ .$$

Pour notre problème où l'on suppose $\theta_1 = \theta_2 = \delta = 2\pi/3$ ou $\pi/2$, il suffit de résoudre :

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{2}$$

dans le premier cas,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dans le second ; lorsque la méthode est connue, le résultat est immédiat.