La chose, en long, en large et en 3D

Mady Frémal, Renée Gossez, Robert Haine(*), Christian Van Hooste & Claude Villers

L'article ci-dessous synthétise et fait suite à un article paru dans « Exploration didactique : des démonstrations, à la rencontre des compétences au travers de thèmes », été 2005, édité par la SBPMef.

Cet ouvrage[1], qui présente des sujets et des matières des quatre dernières années du secondaire est le fruit d'un travail collectif. Il comporte huit thèmes : « Fractions et proportions », « Équations diophantiennes », « Jouez du triangle », « La droite d'Euler », « Faites du trapèze », « Réguliers en apparence », « Rebondissements », « Un lieu ».
Des références aux compétences tant disciplinaires que transversales, accompagnent chacun des thèmes traités.

Les propositions de démonstrations présentes dans la brochure offrent une grande diversité dans les stratégies utilisées. C'est ainsi que le lecteur y rencontrera aussi bien la géométrie synthétique que la géométrie vectorielle et la géométrie analytique.

Tout au long de l'ouvrage des généralisations possibles des problèmes traités sont proposées et parfois développées dans l'esprit d'un enseignement en spirale.
C'est ainsi que dans le thème 8, « Un lieu », qui nous occupe ici, les auteurs sont partis de la définition focale de l'ellipse pour se demander ce qui se passerait si l'on remplaçait dans cette définition, les foyers (des points) par des droites sécantes. Ensuite est venue l'idée de voir ce que devenait ce dernier lieu si l'on se plaçait dans l'espace ; puis sans retenue, de voir ce que cela changerait de prendre deux droites parallèles ou, mieux, gauches !

Quand chacun des membres du groupe y va de sa suggestion en surenchérissant, une simple question touchant à des situations apparemment épuisées permet de découvrir un lieu peu banal, dans l'espace, que les auteurs appellent entre eux « LA CHOSE ».

Voici les différentes étapes de la progression

(*) Contact : Robert Haine, rue de Gaillarmont, 8, 4032 Chénée, Belgique.
E-mail : robert.haine@skynet.be

(1) L'ouvrage (format A4, 140 pages) peut être obtenu auprès de l'APMEP (brochure n° 877, page 67 de la plaquette « Visages … ») au prix de 9 € plus 5,50 € de frais de port en livrant depuis Paris.

ÉTAPE 1

Quel est le lieu des points du PLAN dont la somme des distances à deux droites SÉCANTES données est une constante donnée ?

Solution : Elle peut s'obtenir aisément par :
– voie synthétique où l'on utilise une propriété bien connue d'un point de la base d'un triangle isocèle, à savoir que la somme de ses distances à chacun des côtés isométriques est égale à la longueur de la hauteur relative à l'un de ces côtés.
– ou par voie analytique, en prenant soin de prendre un repère orthonormé porté par les bissectrices des deux droites données.
Le lieu existe toujours, quelle que soit la paire de droites données et la distance constante donnée ; il est original : c'est un *rectangle*. Il devient carré dans le cas particulier où les deux droites données sont perpendiculaires.

ÉTAPE 2

Quel est le lieu des points du PLAN dont la somme des distances à deux droites PARALLÈLES données est une constante donnée ?

Solution : elle est très aisée à obtenir bien qu'elle engendre une *discussion* basée sur la comparaison entre la constante donnée et la distance entre les deux droites parallèles. Selon que la première est supérieure, égale ou inférieure à la seconde le lieu est formé de *deux droites parallèles* à celles données, *la région fermée du plan comprise entre les deux droites* ou *l'ensemble vide*.

ÉTAPE 3

Quel est le lieu des points du PLAN dont la somme des distances à deux CÔTÉS OPPOSÉS d'un RECTANGLE donné est une constante donnée ?

Solution : le lieu découle directement du cas précédent : soit *deux segments parallèles aux côtés donnés, de même longueur qu'eux et deux demi- ellipses* dont les foyers sont les extrémités des segments donnés ; soit le *rectangle lui-même fermé* : soit *l'ensemble vide*.

ÉTAPE 4

Quel est le lieu des points de l'ESPACE dont la somme des distances à deux droites PARALLÈLES données est une constante donnée ?

Solution : même discussion, cas identiques. Selon que la première est supérieure, égale ou inférieure à la seconde, le lieu est un *cylindre illimité* « entourant les deux droites données », *la région fermée du plan comprise entre les deux droites données* ou *l'ensemble vide*.

ÉTAPE 5

Quel est le lieu des points de l'ESPACE dont la somme des distances à deux CÔTÉS OPPOSÉS d'un RECTANGLE donné est une constante donnée ?

Solution : le lieu découle directement du cas précédent : soit un *cylindre limité par deux « demi- ballons de rugby »* ; soit le *rectangle lui-même fermé* ; soit *l'ensemble vide*.

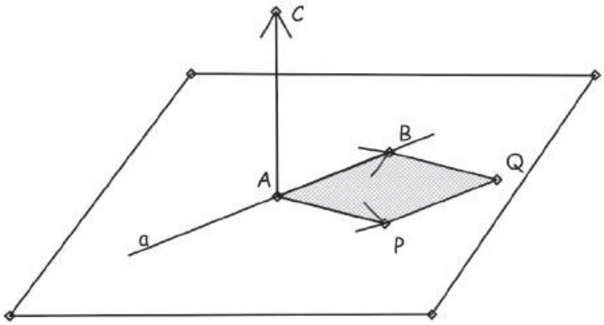
ÉTAPE 6

Quel est le lieu des points de l'ESPACE dont la somme des distances à deux droites SÉCANTES données est une constante donnée ?

Solution :
Nous supposons l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormé O*xyz*.

- Avant toute chose, dotons-nous d'une formule qui donne la distance d'un point à une droite.

Soit une droite *a* comprenant le point A, dirigée selon le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



La distance d'un point P à cette droite *a* est(2) $|P, a| = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

En effet, la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}$ donne l'aire du parallélogramme ABQP tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Mais l'aire de ce parallélogramme est aussi égale à $|P, a| \cdot \|\vec{u}\|$.

Nous avons donc $\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\| = |P, a| \cdot \|\vec{u}\|$, d'où découle la formule annoncée.

- Soient deux droites sécantes D_1 et D_2 et A leur point commun.

Plaçons notre repère de telle manière que l'origine se trouve en A et que les droites D_1 et D_2 admettent respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ (1, *m*, 0) et $\vec{v}$ (1, −*m*, 0) où *m* est un réel strictement positif.

Recherchons le lieu des points P (*x*, *y* ,*z*) tels que $|P, D_1| + |P, D_2| = 2k$ (avec $k > 0$).

(2) N.D.L.R. Il s'agit de la notation belge |A, B| de la distance AB utilisée tout au long.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées $(-mz,\ z,\ mx-y)$ et que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(mz,\ z,\ -mx-y)$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{P},\mathrm{D}_1| + |\mathrm{P},\mathrm{D}_2| = 2k \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2z^2+z^2+(mx-y)^2}}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{\sqrt{m^2z^2+z^2+(mx+y)^2}}{\sqrt{1+m^2}} = 2k \\
&\Leftrightarrow m^2z^2+z^2+(mx-y)^2 \\
&\qquad\qquad = 4k^2(1+m^2)+m^2z^2+z^2+(mx+y)^2 - 4k\sqrt{1+m^2}\,\sqrt{m^2z^2+z^2+(mx+y)^2} \\
&\qquad \text{et } (mx+y)^2 + \left(1+m^2\right)z^2 \leq 4k^2\left(1+m^2\right) \\
&\Leftrightarrow k\sqrt{1+m^2}\,\sqrt{m^2z^2+z^2+(mx+y)^2} = k^2\left(1+m^2\right)+mxy \\
&\qquad \text{et } (mx+y)^2 + \left(1+m^2\right)z^2 \leq 4k^2\left(1+m^2\right) \\
&\Leftrightarrow k^2\left(1+m^2\right)\left(m^2z^2+z^2+\ (mx+y)^2\right) = k^4\left(1+m^2\right)^2 + 2k^2mxy\left(1+m^2\right)+m^2x^2y^2 \\
&\qquad \text{et } (mx+y)^2 + \left(1+m^2\right)z^2 \leq 4k^2\left(1+m^2\right) \text{ et } xy \geq \frac{-k^2\left(1+m^2\right)}{m} \\
&\Leftrightarrow k^2\left(1+m^2\right)^2z^2 + k^2\left(1+m^2\right)\ (mx+y)^2 = k^4\left(1+m^2\right)^2 + 2k^2mxy\left(1+m^2\right)+m^2x^2y^2 \\
&\qquad \text{et } \frac{-k^2\left(1+m^2\right)}{m} \leq xy \leq \frac{k^2\left(1+m^2\right)}{m} \\
&\Leftrightarrow m^2x^2y^2 = k^2\left(1+m^2\right)m^2x^2 + k^2\left(1+m^2\right)y^2 + k^2\left(1+m^2\right)^2z^2 - k^4\left(1+m^2\right)^2 \\
&\qquad \text{et } |xy| \leq \frac{k^2\left(1+m^2\right)}{m}.
\end{aligned}
$$

Le lieu des points P *est la surface d'équation*

$$
\boxed{\begin{cases} m^2x^2y^2 = k^2\left(1+m^2\right)m^2x^2 + k^2\left(1+m^2\right)y^2 + k^2\left(1+m^2\right)^2z^2 - k^4\left(1+m^2\right)^2 \\ |xy| \leq \dfrac{k^2\left(1+m^2\right)}{m} \end{cases}}
$$

Comme les variables x, y, z n'interviennent qu'au carré dans cette équation, cette surface est symétrique par rapport aux plans Oxy, Oyz et Oxz, c'est-à-dire le plan $(\mathrm{D}_1,\ \mathrm{D}_2)$ et les plans perpendiculaires à $(\mathrm{D}_1,\ \mathrm{D}_2)$ contenant une des bissectrices de la paire de droites D_1 et D_2.

- *L'intersection de ce lieu avec le plan* $(\mathrm{D}_1,\ \mathrm{D}_2)$ *est le bord d'un rectangle.*

De fait, pour $z = 0$, nous avons

$$m^2x^2y^2 = k^2\left(1+m^2\right)m^2x^2 + k^2\left(1+m^2\right)y^2 - k^4\left(1+m^2\right)^2$$

ou encore

$$\left(m^2x^2-k^2\left(1+m^2\right)\right)\left(y^2-k^2\left(1+m^2\right)\right)=0,$$

d'où

$$x=\pm\frac{k}{m}\sqrt{1+m^2}\vee y=\pm k\sqrt{1+m^2},$$

ce qui montre que, dans le plan Oxy, les points du lieu appartiennent à des droites parallèles aux axes Ox et Oy.

Si $y=\pm k\sqrt{1+m^2}$, la condition $|xy|\leq\frac{k^2\left(1+m^2\right)}{m}$ indique que x ne peut varier que de $-\frac{k\sqrt{1+m^2}}{m}$ à $\frac{k\sqrt{1+m^2}}{m}$.

Si $x=\pm\frac{k}{m}\sqrt{1+m^2}$, la condition $|xy|\leq\frac{k^2\left(1+m^2\right)}{m}$ indique que y ne peut varier que de $-k\sqrt{1+m^2}$ à $k\sqrt{1+m^2}$.

- *L'intersection du lieu avec le plan* Oxz *est une ellipse.*

De fait, pour $y = 0$, nous obtenons

$$k^2\left(1+m^2\right)m^2x^2+k^2\left(1+m^2\right)^2z^2=k^4\left(1+m^2\right)^2$$

ou encore

$$\frac{m^2x^2}{k^2\left(1+m^2\right)}+\frac{z^2}{k^2}=1.$$

La condition $|xy|\leq\frac{k^2\left(1+m^2\right)}{m}$ est alors remplie.

- *L'intersection du lieu avec le plan* Oyz *est une ellipse.*

De fait, pour $x = 0$, nous obtenons

$$k^2\left(1+m^2\right)y^2+k^2\left(1+m^2\right)^2z^2=k^4\left(1+m^2\right)^2$$

ou encore

$$\frac{y^2}{k^2\left(1+m^2\right)}+\frac{z^2}{k^2}=1.$$

La condition $|xy|\leq\frac{k^2\left(1+m^2\right)}{m}$ est encore remplie.

- *Les points du lieu situés sur l'axe* Oz ont pour hauteur (ou cote) $z = \pm k$.
- *L'intersection du lieu par un plan parallèle au plan* (D_1, D_2) est soit le bord d'un rectangle, soit une courbe fermée du ème degré (voir exemple ci-dessous), soit la paire de points (C $(0, 0, k)$, C′$(0, 0, -k)$), soit vide.
- *L'intersection du lieu avec les plans contenant une des droites* D_1 *ou* D_2 *et l'axe* Oz est donnée par le système suivant.

$$\begin{cases} m^2x^2y^2 = k^2\left(1+m^2\right)m^2x^2 + k^2\left(1+m^2\right)y^2 + k^2\left(1+m^2\right)^2 z^2 - k^4\left(1+m^2\right)^2 \\ y = \pm mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 = 2k^2\left(1+m^2\right)y^2 + k^2\left(1+m^2\right)^2 z^2 - k^4\left(1+m^2\right)^2 \\ y = \pm mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y^2 - k^2\left(1+m^2\right)\right)^2 = k^2\left(1+m^2\right)^2 z^2 \\ y = \pm mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - k^2\left(1+m^2\right) = \pm k\left(1+m^2\right)z \\ y = \pm mx \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 = k\left(1+m^2\right)\left(k \pm z\right).$$

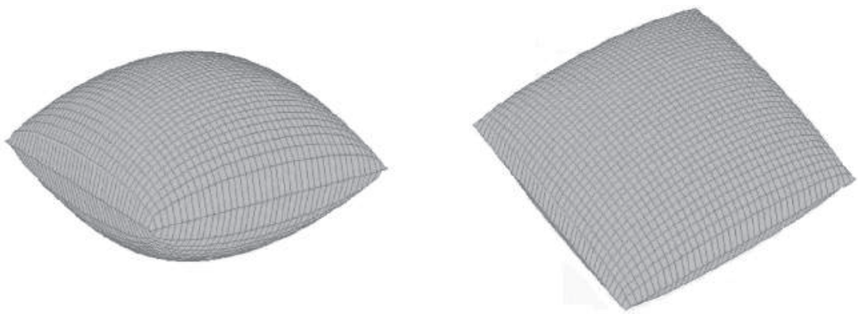
NB : les signes ± sont indépendants.

Ce sont deux arcs de paraboles limités par les points C et C′, d'axes Oz et de sommets

A : $\left(-\dfrac{k\sqrt{1+m^2}}{m}, -k\sqrt{1+m^2}, 0\right)$ et A′ : $\left(\dfrac{k\sqrt{1+m^2}}{m}, k\sqrt{1+m^2}, 0\right)$ pour l'une,

B : $\left(-\dfrac{k\sqrt{1+m^2}}{m}, k\sqrt{1+m^2}, 0\right)$ et B′ : $\left(\dfrac{k\sqrt{1+m^2}}{m}, -k\sqrt{1+m^2}, 0\right)$ pour l'autre.

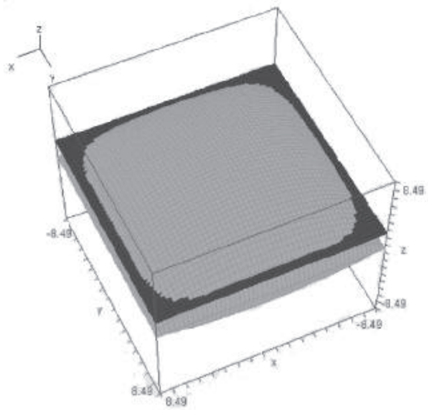
- *Illustrations du lieu dans le cas où* $m = 1$ *et* $k = 6$.

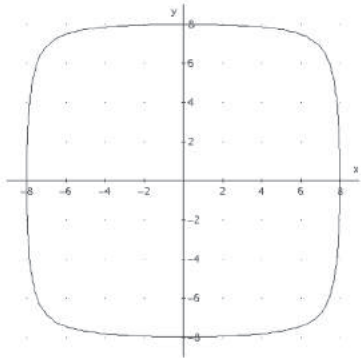


Remarque : si l'on peut critiquer l'usage du produit vectoriel de deux vecteurs (qui n'est au programme que des classes à option forte en mathématiques) pour déterminer la distance d'un point à une droite dans l'espace, il reste néanmoins une solution élégante qui se passe de cet outil : profiter de la présence de deux plans perpendiculaires entre eux et contenant la droite, et du théorème de Pythagore.

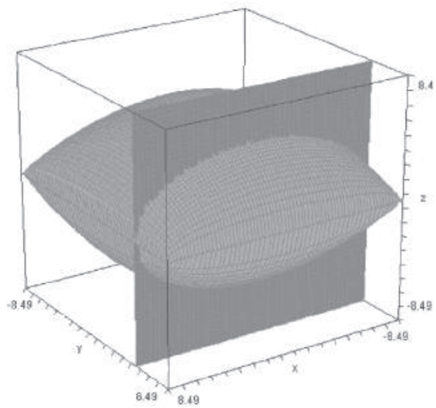
Il est tout à fait remarquable que la surface en question présente des sections aussi variées que rectangle, carré dans le cas particulier, ellipse, arc de parabole, courbe plane du quatrième degré lorsqu'on la coupe par des plans. En voici quelques exemples.

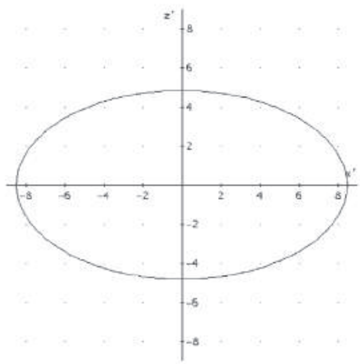
Intersection de la surface avec un plan parallèle au plan O*xy* (toujours pour $m = 1$ et $k = 6$) :



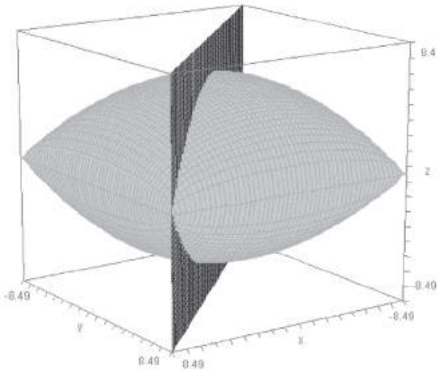


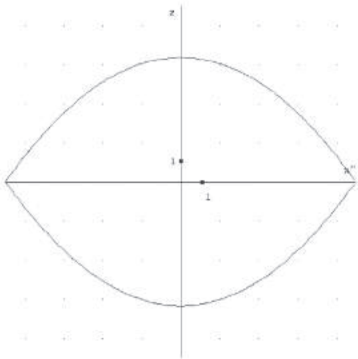
Intersection de la surface avec un plan parallèle au plan O*xz* :



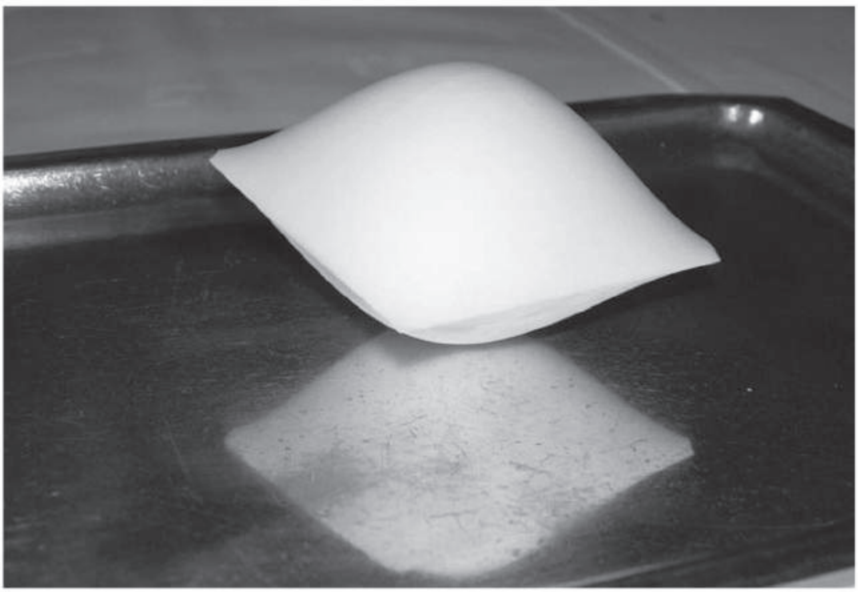


Intersection de la surface avec le plan (Oz, D_1) :





Encore plus étonnant : la gâterie, la cerise sur le gâteau :



La photo ci-dessus est celle de « la chose » réalisée en trois dimensions par le CRIF.
Centre d’excellence de l’industrie technologique dans le parc scientifique du Sart-Tilman, rue Bois saint-Jean, 12, à 4102 Seraing-lez-Liège.
À partir d’une équation d’une surface (ellipsoïde, hyperboloïde, …) ou encore d’une équation du quatrième degré à trois variables comme celle de « la chose », le CRIF réalise l’objet en question.
Utilisant des outils tels que laser, imprimante laser, ordinateur, des matériaux liquides ou pâteux, en poudre ou en plaque, et bien sûr la compétence des ingénieurs et le savoir-faire des techniciens, le CRIF crée des objets, non par soustraction de matière, mais par addition !

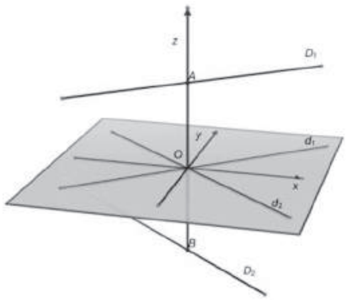
C'est ainsi que la gamme de leurs réalisations va de trophées sportifs à des joints d'étanchéité pour la fusée Ariane, en passant par des couverts de table, des bouteilles d'eau, des boîtiers de téléphone ou d'audio-guides, des maquettes de phares de voiture, des tasses pour passagers de la classe économique en avion, des jeux d'échecs, voire votre visage à partir de photos !

ÉTAPE 7

Quel est le lieu des points de l'ESPACE dont la somme des distances à deux droites GAUCHES données est une constante donnée ?

Solution :
Soient D_1 et D_2 les deux droites gauches et $2k$ la constante donnée.
Si on note $2h$ la distance entre D_1 et D_2, il s'impose de distinguer les cas où $k < h$, $k = h$ et $k > h$.
Si $k < h$, le lieu est vide.
Si $k = h$, le lieu est le segment [AB] de la perpendiculaire commune aux deux droites gauches.
Si $k > h$, le problème est traité ci-dessous de deux manières différentes.

Le choix des axes s'impose clairement, à savoir : l'origine O est au milieu du segment de la perpendiculaire commune aux deux droites données et les axes OX et OY sont les bissectrices des angles formés par les parallèles aux droites D_1 et D_2 menées par O.
Le troisième axe OZ complète le système de manière que le repère soit dextrorsum.
Dans ces axes, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0, 0, h)$ et $(0, 0, -h)$.



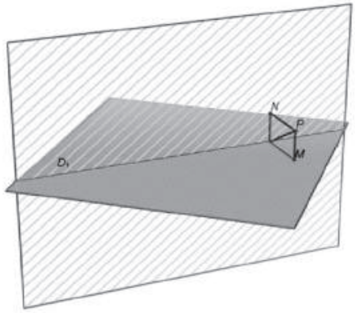
$(\cos a, \sin a, 0)$ et $(\cos a, -\sin a, 0)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites D_1 et D_2, $2a$ étant la plus petite mesure positive en radians de $\widehat{D_1D_2}$.
On peut résoudre la question, en ne perdant pas de vue que $k > h > 0$, par deux méthodes :

a) en prenant l'angle a $\left(0 < a \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$,
b) en prenant le coefficient angulaire m $(0 < m \leq 1)$ d'une des droites
et ce, sans nuire à la généralité du problème.

Première méthode

Soit $P(\alpha, \beta, \gamma)$ un point quelconque du lieu tel que $d(P, D_1) + d(P, D_2) = 2k$.

$d(P, D_1) = \sqrt{|PM|^2 + |PN|^2}$ où $|PM|$ est la distance de P au plan horizontal contenant D_1 et $|PN|$ la distance de P au plan (OZ, D_1).



$|\mathrm{PM}| = |\gamma - h|$.

Comme l'équation du plan (OZ, D_1) est $x \sin a - y \cos a = 0$, $|\mathrm{PN}| = |\alpha \sin a - \beta \cos a|$.

De même, $d(\mathrm{P}, D_2) = \sqrt{|\mathrm{PR}|^2 + |\mathrm{PS}|^2}$ où $|\mathrm{PR}|$ est la distance de P au plan horizontal contenant D_2 et $|\mathrm{PS}|$ la distance de P au plan (OZ, D_2).

$|\mathrm{PR}| = |\gamma + h|$.

Comme l'équation du plan (OZ, D_2) est $x \sin a + y \cos a = 0$, $|\mathrm{PS}| = |\alpha \sin a + \beta \cos a|$.

L'équation du lieu apparaît alors sous la forme irrationnelle et peu appétissante :

$$\sqrt{|\gamma - h|^2 + |\alpha \sin a - \beta \cos a|^2} + \sqrt{|\gamma + h|^2 + |\alpha \sin a + \beta \cos a|^2} = 2k$$

ou, en revenant aux notations courantes (x, y, z) :

$$\sqrt{|z - h|^2 + |x \sin a - y \cos a|^2} + \sqrt{|z + h|^2 + |x \sin a + y \cos a|^2} = 2k.$$

À ce stade-ci, les conditions d'élévation au carré sont satisfaites. L'élévation au carré, suivie d'une simplification par 2, puis de l'isolement du seul radical restant conduit à l'équation :

$$\begin{aligned}(z^4 + h^4 - 2h^2z^2 + x^4 \sin^4 a + y^4 \cos^4 a - 2x^2y^2 \sin^2 a \cos^2 a + 2x^2z^2 \sin^2 a \\ + 2y^2z^2 \cos^2 a + 2h^2x^2 \sin^2 a + +2h^2y^2 \cos^2 a - 8hxyz \sin a \cos a)^{\frac{1}{2}} \\ = 2k^2 - z^2 - h^2 - x^2 \sin^2 a - y^2 \cos^2 a.\end{aligned}$$

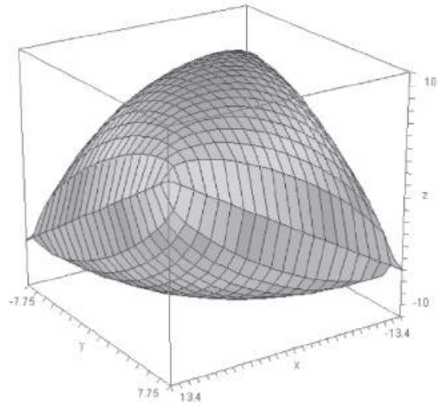
Cette équation est toujours irrationnelle mais ne contient plus qu'un seul radical.
La condition d'élévation au carré est :

$$2k^2 - z^2 - h^2 - x^2 \sin^2 a - y^2 \cos^2 a \geq 0. \qquad (1')$$

Forts du respect de celle-ci, nous élevons au carré, réduisons les termes semblables et l'équation du lieu apparaît :

$$\begin{cases}(hz + xy \sin a \cos a)^2 = k^2(x^2 \sin^2 a + y^2 \cos^2 a + z^2 + h^2 - k^2) & \text{(L)} \\ 2k^2 - z^2 - h^2 - x^2 \sin^2 a - y^2 \cos^2 a \geq 0 & (1')\end{cases}$$

Voici une représentation du lieu dans le cas où $a = \dfrac{\pi}{6}$, $h = 6$ et $k = 9$, surface que nous nommerons provisoirement « chose bis » :



Étudions les caractéristiques du lieu (L) :

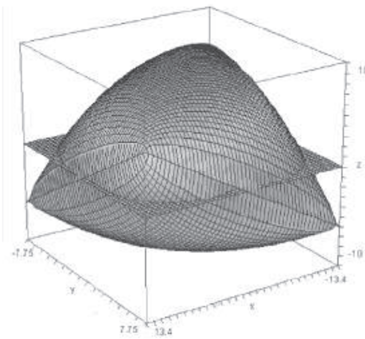
Intersection avec le plan $z = 0$.

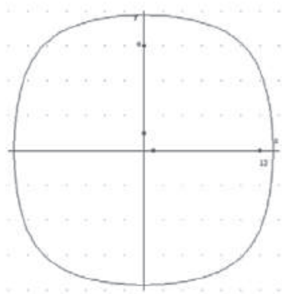
$$\left(xy\sin a\cos a\right)^2 = k^2\left(x^2\sin^2 a + y^2\cos^2 a + h^2 - k^2\right) \tag{2}$$

avec la condition :

$$2k^2 - h^2 - x^2\sin^2 a - y^2\cos^2 a \geq 0. \tag{2'}$$

L'équation (2) est celle d'une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à OX, par rapport à OY et par rapport à 0.





Intersection avec le plan $y = 0$.

On trouve l'équation

$$z^2\left(k^2 - h^2\right) + k^2x^2\sin^2 a = k^2\left(k^2 - h^2\right)$$

qui est celle d'une ellipse, assortie de la condition

$$2k^2 - z^2 - h^2 - x^2\sin^2 a \geq 0.$$

Intersection avec le plan $x = 0$

On trouve l'équation

$$z^2\left(k^2-h^2\right)+k^2y^2\cos^2 a=k^2\left(k^2-h^2\right)$$

qui est celle d'une ellipse, assortie de la condition

$$2k^2-z^2-h^2-y^2\cos^2 a\geq 0.$$

Intersections avec OX : deux points $\left(\dfrac{\sqrt{k^2-h^2}}{\sin a},0,0\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{k^2-h^2}}{\sin a},0,0\right)$.

Intersections avec OY : deux points $\left(0,\dfrac{\sqrt{k^2-h^2}}{\cos a},0\right)$ et $\left(0,-\dfrac{\sqrt{k^2-h^2}}{\cos a},0\right)$.

Intersections avec OZ : deux points $(0, 0, k)$ et $(0, 0, -k)$ plus éloignés de O que A et B puisque nous travaillons avec l'hypothèse $k > h$.

Intersection avec le plan $(\mathrm{OZ}, \mathrm{D}_1)$.

L'équation de $(\mathrm{OZ}, \mathrm{D}_1)$ étant $x \sin a - y \cos a = 0$, on trouve une équation du quatrième degré

$$\left(hz+x^2\sin^2 a\right)^2=k^2\left(h^2+2x^2\sin^2 a+z^2-k^2\right) \qquad (3)$$

assortie de la condition :

$$2x^2\sin^2 a+z^2\leq 2k^2-h^2.$$

L'équation (3) bicarrée en x, du deuxième degré en z, se décompose en deux équations de paraboles :

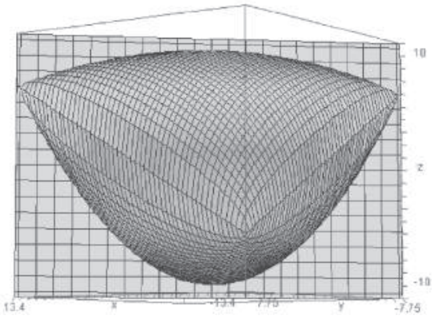
$$z=\frac{1}{k-h}\left[x^2\sin^2 a-k(k-h)\right]$$

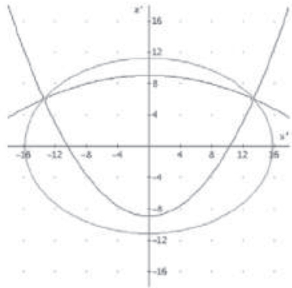
et

$$z=\frac{1}{k+h}\left[-x^2\sin^2 a+k(k+h)\right]$$

dont les points d'intersection ont pour coordonnées $\left(\pm\dfrac{1}{\sin a}\sqrt{k^2-h^2},h\right)$. On vérifie aisément que ces points appartiennent à l'ellipse d'équation

$$2x^2\sin^2 a+z^2=2k^2-h^2.$$





L’ellipse représente la limite imposée par la condition.

Intersection avec le plan (OZ, D_2).

L’équation de (OZ, D_2) est $x \sin a + y \cos a = 0$.
Pas de surprise, on trouve une équation du quatrième degré

$$\left(hz - x^2 \sin^2 a\right)^2 = k^2\left(h^2 + 2x^2 \sin^2 a + z^2 - k^2\right)$$

assortie de la même condition.

Montrons que, lorsque $h = k$, le lieu (L) se réduit bien au segment [AB].
Si $h = k$, l’équation du lieu devient :

$$2kxyz \sin a \cos a = k^2x^2 \sin^2 a + k^2y^2 \cos^2 a - x^2y^2 \sin^2 a \cos^2 a$$

et la condition :

$$z^2 \le k^2 - x^2 \sin^2 a - y^2 \cos^2 a.$$

Le système

$$\begin{cases} 2kxyz \sin a \cos a = k^2x^2 \sin^2 a + k^2y^2 \cos^2 a - x^2y^2 \sin^2 a \cos^2 a \\ z^2 \le k^2 - x^2 \sin^2 a - y^2 \cos^2 a \end{cases}$$

est-il équivalent à $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -k \le z \le k \end{cases}$?

Si $x = y = 0$ l’équation donne z indéterminé et la condition donne

$$z^2 \le k^2 \Leftrightarrow -k \le z \le k.$$

Si x et y sont différents de zéro, le système s'écrit

$$\begin{cases} z = \dfrac{k^2x^2\sin^2 a + k^2y^2\cos^2 a - x^2y^2\sin^2 a\cos^2 a}{2kxy\sin a\cos a} & (4) \\ z^2 \leq k^2 - x^2\sin^2 a - y^2\cos^2 a & (4') \end{cases}$$

Remplaçons z par la fraction (4) dans l'inéquation (4′).
Il vient, après quelques calculs :

$$k^4\left(x^2\sin^2 a - y^2\cos^2 a\right)^2 + 2k^2\left(x^4y^2\sin^4 a\cos^2 a + x^2y^4\sin^2 a\cos^4 a\right) + x^4y^4\sin^4 a\cos^4 a \leq 0.$$

Cette inéquation est clairement impossible.

Si $x = 0$ et $y \neq 0$, l'équation devient $0z = k^2y^2\cos^2 a$ qui est une équation impossible

Si $x \neq 0$ et $y = 0$, l'équation devient $0z = k^2x^2\sin^2 a$ qui est une équation impossible.

Maintenant, si nous voulons voir le lien avec le problème initial dans lequel les deux droites sont sécantes, il ne reste plus qu'à remplacer h par 0 dans les calculs précédents.

Si $h = 0$, l'équation du lieu devient

$$(xy\sin a\cos a)^2 = k^2\left(x^2\sin^2 a + y^2\cos^2 a + z^2 - k^2\right)$$

avec la condition :

$$2k^2 - z^2 - x^2\sin^2 a - y^2\cos^2 a \geq 0.$$

Si de plus $z = 0$, l'équation du lieu devient

$$(xy\sin a\cos a)^2 = k^2\left(x^2\sin^2 a + y^2\cos^2 a - k^2\right)$$

et se factorise en

$$\left(y^2\cos^2 a - k^2\right)\left(x^2\sin^2 a - k^2\right) = 0,$$

ce qui fournit les équations $x = \pm\dfrac{k}{\sin a}$ et $y = \pm\dfrac{k}{\cos a}$ assorties de la condition $2k^2 - x^2\sin^2 a - y^2\cos^2 a \geq 0.$

Ces équations sont celles des parallèles aux axes limitées respectivement par $-\dfrac{k}{\cos a} \leq x \leq \dfrac{k}{\cos a}$ pour les parallèles à OX et par $-\dfrac{k}{\sin a} \leq y \leq \dfrac{k}{\sin a}$ pour les parallèles à OY, ce qui prouve bien qu'il s'agit d'un rectangle (cf. étape 1, plus haut dans ce document).

En complément d'information, les sommets du rectangle sont sur l'ellipse d'équation

$$x^2 \sin^2 a + y^2 \cos^2 a = 2k^2.$$

Deuxième méthode

En prenant respectivement (1, m, 0) et (1, $-m$, 0) comme vecteurs directeurs des droites D_1 et D_2, le même repère et les mêmes coordonnées pour les points A et B, on trouve successivement :

L'équation du plan (OZ, D_1) : $mx - y = 0$.

La distance $|PM| = |\gamma - h|$, la distance $|PN| = \dfrac{|m\alpha - \beta|}{\sqrt{1+m^2}}$.

De sorte que la distance de P (α, β, γ) à D_1, $d(P, D_1) = \sqrt{|PM|^2 + |PN|^2}$ vaut alors

$$\sqrt{|\gamma - h|^2 + \frac{|m\alpha - \beta|^2}{1+m^2}}.$$

Celle de P à D_2 se trouve facilement et vaut

$$\sqrt{|\gamma + h|^2 + \frac{|m\alpha + \beta|^2}{1+m^2}}.$$

L'équation du lieu cherché est alors, en revenant aux coordonnées courantes (x, y, z) :

$$\sqrt{|z-h|^2 + \frac{|mx-y|^2}{1+m^2}} + \sqrt{|z+h|^2 + \frac{|mx+y|^2}{1+m^2}} = 2k.$$

Les conditions d'élévation au carré sont respectées et s'effectuent en quelques lignes ; une seconde élévation nécessite la condition

$$2k^2 - z^2 - h^2 - \frac{m^2x^2 + y^2}{1+m^2} \geq 0$$

(qui est bien équivalente à la condition (1′) page 264).
La réduction des termes semblables conduit à l'équation cherchée :

$$\left\{\begin{array}{l} (1+m^2)^2 (k^2 - h^2)(z^2 - k^2) - m^2x^2y^2 - 2mh(1+m^2)xyz \\ \qquad\qquad\qquad + m^2(1+m^2)k^2x^2 + (1+m^2)k^2y^2 = 0 \\ 2k^2 - z^2 - h^2 - \dfrac{m^2x^2+y^2}{1+m^2} \geq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(L)}$$

La concordance des résultats obtenus par les deux méthodes se démontre aisément par la substitution $m = \tan a$; il en est de même des conditions d'élévation au carré et des intersections avec les plans successifs.

Intersection avec le plan $z = 0$

$$-k^2\left(1+m^2\right)^2\left(k^2-h^2\right)-m^2x^2y^2+m^2\left(1+m^2\right)k^2x^2+\left(1+m^2\right)k^2y^2=0$$

assortie de la condition

$$2k^2-h^2-\frac{m^2x^2+y^2}{1+m^2}\geq 0.$$

Intersection avec le plan $y = 0$
On trouve l'équation

$$\left(1+m^2\right)^2\left(k^2-h^2\right)\left(z^2-k^2\right)+m^2\left(1+m^2\right)k^2x^2=0$$

qui est celle d'une ellipse, assortie de la condition

$$2k^2-z^2-h^2-\frac{m^2x^2}{1+m^2}\geq 0.$$

Intersection avec le plan $x = 0$.
On trouve l'équation

$$\left(1+m^2\right)^2\left(k^2-h^2\right)\left(z^2-k^2\right)+\left(1+m^2\right)k^2y^2=0$$

qui est celle d'une ellipse également assortie de la condition

$$2k^2-z^2-h^2-\frac{y^2}{1+m^2}\geq 0.$$

Intersections avec OX : deux points $\left(\pm\frac{\sqrt{\left((1+m^2\right)\left(k^2-h^2\right)}}{m},0,0\right)$.

Intersections avec OY : deux points $\left(0,\pm\sqrt{\left((1+m^2\right)\left(k^2-h^2\right)},0\right)$.

Intersections avec OZ : (0, 0, ± k), ces deux derniers à ne pas confondre avec A et B.

Intersection avec le plan (OZ, D_1) d'équation $y = mx$: courbe du quatrième degré bicarrée en x, du deuxième degré en z, équivalente à

$$z=\frac{1}{\left(1+m^2\right)\left(k-h\right)}\left[m^2x^2-k\left(1+m^2\right)\left(k-h\right)\right]$$

ou

$$z=\frac{1}{\left(1+m^2\right)\left(k+h\right)}\left[-m^2x^2+k\left(1+m^2\right)\left(k+h\right)\right].$$

Intersection avec le plan (OZ, D_2) d'équation $y = -mx$: courbe du quatrième degré, bicarrée en x, du second degré en z qui est aussi sympathique que la précédente.

Il reste, pour être complet, à examiner le cas où les deux droites D_1 et D_2 sont orthogonales.

Dans ce cas, $a=\frac{\pi}{4}$, les vecteurs directeurs sont (1, 0, 0) et (−1, 0, 0) et $m = 1$.

Que l'on parte de l'équation (L) de l'encadré page 264 – où on remplace a par $\frac{\pi}{4}$ – ou bien de l'équation (L) de l'encadré page 269 – où on remplace m par 1 –, on trouve la même équation :

$$\left(2hz+xy\right)^2=2k^2\left(2h^2+x^2+y^2-2k^2\right).$$

In fine. si on fait $h = 0$, on retombe sur le problème plan et la section est le carré d'équation

$$\left(xy\right)^2=2k^2\left(x^2+y^2-2k^2\right),$$

équation qui se décompose en

$$\left(x^2-2k^2\right)\left(y^2-2k^2\right)=0,$$

c'est -à- dire le carré dont les sommets sont $\left(\pm k\sqrt{2},\pm k\sqrt{2}\right)$.

CONCLUSION

De notre point de vue, nous nous sommes bien amusés. De l'autre, chacun pourra remarquer au passage la diversité des lieux obtenus, la variété des méthodes pour les obtenir, et le fait peu courant de la construction « en dur » d'un objet mathématique à partir de son équation !

« La chose » a-t-elle déjà un nom officiel ? Et « La chose bis » ? Nous remercions d'avance toute personne qui nous éclairera à ce sujet.

« La chose », elle, est palpable puisqu'elle a la chance d'avoir été fabriquée en dur. « La chose bis » aura-t-elle ce privilège également ? C'est notre espoir. S'il se réalise, nous ne manquerons pas de vous en envoyer la photo.