# La fabuleuse histoire des nombres métaux(*)

**Stéphan Manganelli**

## 1. Prologue

Tout a commencé un mois d'octobre alors que je cherchais ma route entre le chapitre « Continuité et tableaux de variations » et le chapitre « Nombres complexes : Première partie »…

*Plus je grimpais sur la montagne et plus il faisait froid ; pourtant je me rapprochais du soleil… Ce fut toute une histoire*[1].

## 2. Le nombre d'or ?

Voyez en ce point d'interrogation final un peu de plaisanterie (j'attaque fort !), juste pour dire que même si tout n'a pas été dit sur ce nombre, de nombreuses gens s'y sont bien attardés dessus…

On sait entre autres qu'il s'agit de la solution positive (notée $\varphi$) de l'équation $x^2 = 1 + x$ et que $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$.

Vous me permettrez de ne pas en dire plus…

## 3. À la recherche du nombre d'argent…

Certes moins connu (on trouve trois bricoles si l'on tape NOMBRE D'ARGENT sur GOOGLE !) que le *nombre d'or*, le **nombre d'argent** peut être défini comme l'unique solution de l'équation $x^3 = 1 + x + x^2$.

Montrons cette existence et cette unicité, puis donnons une valeur … approchée et même exacte (soyons fous !) de ce nombre.

### 3.1. Étude de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

$f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme toute fonction polynôme.
Pour tout nombre réel $x$, $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Le discriminant de $3x^2 - 2x - 1$ vaut 16, et le trinôme admet pour racine $-\dfrac{1}{3}$ et 1.

D'où le tableau de variations suivant pour $f$ :

(*) Je les ai appelés comme ça !

(1) Francis COMBES, *Petites leçons de choses*.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{22}{27}$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Conclusion** : Nous pouvons donc affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\phi$ dans $\mathbb{R}$. Cette solution appartient à $]1\ ;+\infty[$.

### 3.2. Localisation et approximation de la solution

Dans un premier temps, par dichotomie, on peut localiser $\phi$ entre 1,8 et 1,9.

Puis, par **balayage avec la calculatrice**, on aboutit à l'encadrement d'amplitude $10^{-2}$ suivant : $1{,}83 < \phi < 1{,}84$.

### 3.3. Valeur exacte de $\phi$ par la méthode de Cardan

En utilisant la méthode de Cardan pour la résolution des équations du troisième degré, on obtient :

$$\phi = \sqrt[3]{\frac{19+3\sqrt{33}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{19-3\sqrt{33}}{27}} + \frac{1}{3}.$$

## 4. Après l'or et l'argent…

Le *nombre d'or*, ultra connu, est la solution positive de $x^2 = 1 + x$.

Le *nombre d'argent*, vraiment moins connu, est l'unique solution de l'équation $x^3 = 1 + x + x^2$.

Quant au **NOMBRE DE BRONZE**…, ne cherchez pas, je l'invente à l'instant.

Il vient de suite à l'idée d'étudier l'équation $x^4 = 1 + x + x^2 + x^3$.

En faisant de même que pour les nombres d'or et d'argent, on obtient les résultats suivants :

- L'équation $x^4 = 1 + x + x^2 + x^3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une positive. On l'appelle $\beta$ et par analogie avec les deux autres nombres, on la nomme le NOMBRE DE BRONZE.
- La calculatrice donne l'approximation suivante : $1{,}92 < \beta < 1{,}93$.
- Reste à trouver la valeur exacte de $\beta$, mais ma folie s'arrête là !

## 5. La ruée vers l'or

Et là… et là… vous ne remarquez rien ? !… 1,62… 1,83… 1,92… ça tendrait pas vers 2 ça?

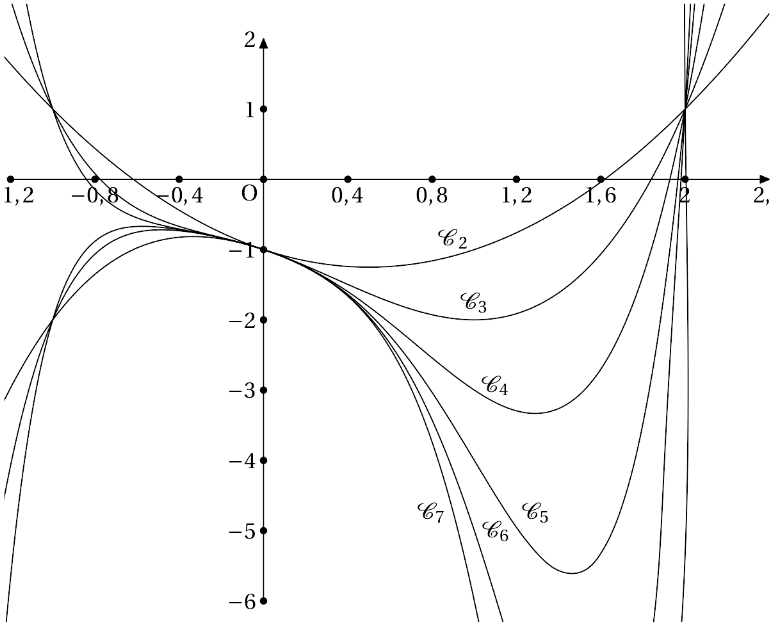
Résumons et expliquons le « ça» :

- On a $\varphi$ qui est la solution positive de $x^2 = 1 + x$ ;
- On a $\phi$ qui est la solution positive de $x^3 = 1 + x + x^2$ ;

- On a $\beta$ qui est la solution positive de $x^4 = 1 + x + x^2 + x^3$ ;
- etc.

La suite formée par ces solutions positives $\varphi_n$ (uniques ! ?) successives des équations $x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$, $(n \geq 2)$ convergerait-elle vers 2 lorsque $n$ tend vers l'infini ?

Alors pour commencer, je demande à l'ami Hubert(2) qui manipule bien les logiciels de me « vérifier » ça! et voici ce que donnent les courbes métalliques $\mathscr{C}_n$ :




Comme dirait l'autre t'es toujours dans la conjecture… reste le plus beau, la DÉMO ! ! ! et je m'y colle.

**L'équation $x^n = x^{n-1} + \ldots + x + 1$ a une racine positive unique**

Multiplions par $x - 1$. Il vient : $x^{n+1} - x^n = x^n - 1$, soit

$$x^n (2 - x) = 1 \qquad \text{(A)}$$

Posons $f_n(x) = x^n (2 - x)$. On obtient : $f_n'(x) = x^{n-1} (2n - (n + 1)\,x)$, d'où le tableau de variations :

| $x$ | 0 | 1 | $\frac{2n}{n+1}$ | $\varphi_n$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n(x)$ | 0 ↗ | 1 ↗ | . | ↘ 1 | ↘ 0 | ↘ $-\infty$ |

(2) Hubert RAYMONDAUD.

Il en résulte que l'équation (A) a une seule solution positive $\varphi_n$, autre que 1 et qu'elle vérifie

$$\frac{2n}{n+1} < \varphi_n < 2,$$

ce qui prouve que $\varphi_n$ tend vers 2 quand $n$ tend vers l'infini.

**La suite ($\varphi_n$) est strictement croissante**

Le tableau de variations de $f_n$ montre que les seules valeurs positives de $x$ pour lesquelles $f_n(x) > 1$ sont celles de $]1\ ;\ \varphi_n[$

Considérons alors $f_n(\varphi_{n-1}) = \varphi_{n-1} \times (\varphi_{n-1})^{n-1}\,(2 - \varphi_{n-1})$.

D'après la définition même de $\varphi_{n-1}$, on en tire : $f_n(\varphi_{n-1}) = \varphi_{n-1} > 1$.

Il en résulte que $\varphi_{n-1}$ appartient à $]1\ ;\ \varphi_n[$, ce qui prouve que la suite $(\varphi_n)$ est strictement croissante.

**Encadrement de $\varphi_n$**

On reprend l'inégalité $\frac{2n}{n+1} < \varphi_n < 2$ démontrée plus haut. On en tire, en prenant les inverses et en élevant à la puissance $n$ :

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{\varphi_n^n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{2^n}$$

Comme $\frac{1}{\varphi_n^n} = 2 - \varphi_n$, on obtient :

$$2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{2^n} < \varphi_n < 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Il reste à exploiter l'inégalité $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$, soit $1+\frac{1}{n} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, que l'on peut justifier en TS par l'étude des variations de $\mathrm{e}^t - (1 + t)$.

On obtient finalement :

$$2-\frac{\mathrm{e}}{2^n} < \varphi_n < 2 - \frac{1}{2^n}.$$

En fait, on a $\varphi_n \approx 2 - \frac{1}{2^n}$, mais cela devient difficile à formuler et à justifier en TS.

## 6. Épilogue

Pour tout vous avouer, j'ai bien cru l'espace d'un moment – oh pas très long – que j'avais fait une grande découverte.

Je commence par en parler à Hubert, à d'autres collègues… : « connais pas ! ».

On me conseille d'écrire à Jean FROMENTIN, responsable de la rubrique problèmes du bulletin vert de l'APMEP… Là, tellement de problèmes ont été visités… Jean : « connais pas… même le nombre d'argent… mais je vais passer l'info à Serge PARPAY, responsable de la rubrique Exercices de ci, de là… ».

Ah! il faut que je vous dise aussi (rendons à mon prof ce qui est à mon prof !) que la dénomination nombre d'argent m'avait été donnée (sur un devoir maison) par mon prof de T.C. en 1986.

Bref! Je continue mes recherches… J'ai l'honneur de rencontrer Jean-Louis PIEDNOIR, et me voilà reparti dans ma quête… Jean-Louis : « jamais entendu parler… mais… je prends une feuille, un crayon… et effectivement ça marche bien tout ça ! ». (Il va beaucoup plus vite que moi ! ! ! et surtout d'une façon plus, allez, je ne vais pas trop me faire du mal, … plus fine…). Alors là ! Je me dis… T'es tout proche du soleil et pourtant t'as de plus en plus froid… tu m'étonnes !

Tout s'écroule !

Entre temps Jean a transmis aussi le problème à un autre collègue responsable de la rubrique problèmes de Corol'aire, qui a fait des recherches…

Je lui laisse le mot de cette fin tragique ; voilà ce qu'il me répond à travers Jean :

« Voici un petit résumé, traduit en français, de ce que j'ai pu trouver à l'adresse :

http ://Mathworid.wolfram.com/Fibonaccin-StepNumber.html

On définit une généralisation de la suite de FIBONACCI, appelée « $n$-step Fibonacci sequence par les anglo-saxons » (je ne sais pas s'il existe un équivalent fixé de ce nom en français), de la façon suivante :

$$\mathrm{F}_k^{(n)} = 0 \text{ pour } k \leq 0, \text{ et } \mathrm{F}_1^{(n)} = \mathrm{F}_2^{(n)} = 1 \text{ et } \mathrm{F}_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_{k-i}^{(n)} \text{ pour } k > 2.$$

On peut établir que :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\mathrm{F}_k^{(n)}}{\mathrm{F}_{k-1}^{(n)}} = n\text{-anacci constante.}$$

C'est l'unique solution positive $\alpha_n$ de $x^n(2 - x) = 1$ ou de $x^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^i = 0$.

On a : $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 2$.

Le collègue a retrouvé par lui-même une propriété déjà établie. Il peut en être légitimement fier mais il ne peut prétendre à la priorité sur ce résultat. Il est très difficile de découvrir quelque chose de neuf, surtout avec des moyens élémentaires, autour d'une suite aussi ancienne et étudiée que celle de Fibonacci. Il existe même une revue américaine appelée *Fibonacci Quaterly* uniquement consacrée à ce thème. Pour ce qui concerne la démonstration de la propriété : $\alpha_n \to 2$ quand $n \to +\infty$, elle se trouve dans le chapitre précédent et ne nécessite pas de connaissances supérieures à celles d'une T.S. ».

FIN.