Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle comporte beaucoup d'exercices de géométrie. Certains pourront le regretter, mais c'est peut-être la preuve que la géométrie n'a pas perdu de son intérêt. Les exercices dans d'autres domaines sont, bien sûr, les bienvenus. Envoyez-nous des exercices d'un niveau élémentaire piochés de-ci de-là qui vous ont plu ou vous ont intrigué. Nous les répercuterons avec plaisir.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :
APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices

Exercice 468-1 (Jean-Christophe Laugier - Rochefort) – Corol'aire nº 65

Déterminer des entiers A et B tels que A / B = 0,2006… avec B minimal.

Exercice 468-2 (Jacques Bouteloup - Rouen)

On considère un cercle (C), un diamètre [AB], une corde [CD] parallèle à [AB], et un point M de la droite (AB) (et non du segment [AB]) ; (MC) et (MD) recoupent (C) en E et F ; la perpendiculaire en M à (AB) coupe (CD) et (EF) en H et K.

1) Démontrer que M est le milieu de [HK].
2) Démontrer que, lorsque M décrit la droite (AB), la droite (EF) enveloppe une ellipse que l'on précisera.

Exercice 468-3 (Raymond Raynaud - Digne)

Deux hauteurs et deux médiatrices pour un losange

Dans un triangle ABC, les hauteurs issues de B et de C et les médiatrices des côtés [AB] et [AC] portent les côtés d'un parallélogramme.

Pour quels triangles ABC ce parallélogramme est-il un losange ?

Solutions :

Exercice 463-3

Georges Lion nous signale les erreurs suivantes dans le corrigé de l'exercice 463-3 à la page 872 du Bulletin Vert nº 467. Il faut lire BI^2 et CJ^2 au lieu de BI et CJ ; d'où la nécessité dans toute la suite de remplacer la fraction 4/9 par 2/3.

Toujours au même endroit la deuxième inégalité n'a pas lieu d'être à condition d'entendre le mot « bissectrice » aux deux sens « intérieure ou extérieure ». L'énoncé de l'exercice précise bien bissectrice des angles. Seul le cas $BD^2 = 2BC^2$ doit être exclu.

Exercice 464-1 (Georges Lion – Wallis, et Maurice Starck – Nouméa)
En le point Q milieu d'une corde [AB] d'un cercle C se coupent deux cordes [UV] et [XY] ; la droite (AB) coupe (UX) en M et (VY) en N. Montrer que Q est aussi le milieu de [MN].
On souhaite une solution sans calculs et, si possible, élémentaire.

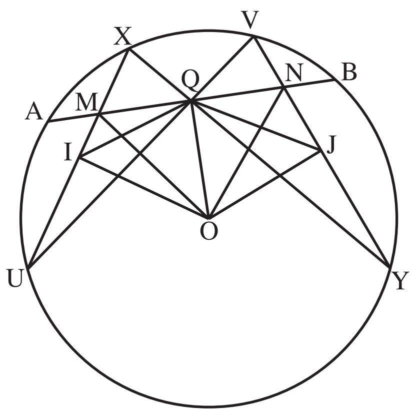
Nous avions rendu compte des solutions à cet exercice dans le dernier Bulletin Vert. Deux autres solutions nous sont parvenues : celle de l'auteur de l'exercice qui, comme il l'espérait, a trouvé une solution sans calculs et élémentaire ; celle d'Alain Larroche qui n'utilise pas la notion de polaire ni de conjugaison harmonique.

Solution de Geoges Lion (Wallis)

On note P l'intersection de (UX) et (VY), R celle de (VX) et (UY).
Par construction la polaire de R par rapport à la réunion de (UX) et (VY) l'est aussi par à rapport à la réunion de (UV) et (XY), c'est donc (PQ).
Si (QR) coupe (UX) en S et (VY) en T le birapport [RQST] vaut −1 et le pinceau PQ, PR, PS, PT est harmonique.
Par ailleurs, toujours par construction, la polaire de Q par rapport à C est (PR) qui est donc parallèle à (AB). (AB) coupe les droites du pinceau ci-dessus en les trois points M, N, Q tels que Q soit le milieu de [MN].

Solution d'Alain Larroche (Saint-Fargeau-Ponthierry)

La puissance d'un point par rapport à un cercle entraîne que QV·QU = QX·QY soit QV/QX = QY/QU.
Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, alors ils sont semblables. Or les angles $\widehat{XQU}$ et $\widehat{VQY}$, opposés par le sommet, ont la même mesure. Les triangles XQU et VQY sont donc semblables.
Soient I et J les milieux respectifs des cordes [XU] et [VY].



Les triangles $\widehat{IXQ}$ et $\widehat{QVJ}$ sont aussi semblables car XQ/XI = 2XQ/XU = 2VQ/VU = VQ/VJ et les angles $\widehat{QIX}$ et $\widehat{QJV}$ ont donc même mesure.
Par ailleurs, les triangles OQM et OIM sont respectivement rectangles en Q et I puisque, dans un cercle, la droite joignant le milieu d'une corde au centre de ce cercle est la médiatrice de cette corde. De même les triangles OQN et OJN sont respectivement rectangles en Q et J.

Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est aussi le centre du cercle circonscrit à ce triangle, donc les points O, Q, M et I d'une part et les points O, Q, N et J d'autre part, appartiennent à un même cercle.

Les angles $\widehat{\mathrm{QOM}}$ et $\widehat{\mathrm{QIX}}$ ont la même mesure car ce sont deux angles inscrits dans un même cercle interceptant le même arc, de même pour les angles $\widehat{\mathrm{NOQ}}$ et $\widehat{\mathrm{QJV}}$.

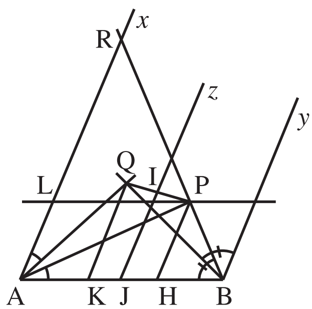
D'où $\widehat{\mathrm{QOM}} = \widehat{\mathrm{QON}}$. Les deux triangles rectangles OQM et OQN qui ont un côté de l'angle droit commun sont donc égaux et QM = QN.

D'après ce qui précède on déduit donc que les angles $\widehat{\mathrm{MOQ}}$ et $\widehat{\mathrm{NOQ}}$ ont la même mesure. Les triangles rectangles MOQ et NOQ sont donc isométriques, QM = QN et Q est bien le milieu de [MN].

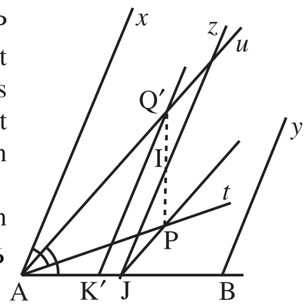
Exercice 464-2 (Georges Lion – Wallis)

À tout point P intérieur à l'ensemble E délimité par le segment [AB] et deux demi-droites [Ax) et [By) à supports parallèles et de même sens on associe le point Q intérieur à E tel que les angles $\widehat{x\mathrm{AQ}}$ et $\widehat{\mathrm{BAP}}$ soient égaux, de même que les angles $\widehat{y\mathrm{BQ}}$ et $\widehat{\mathrm{ABP}}$. Trouver le lieu géométrique du milieu I de [PQ].

Solution de l'auteur



1) Notons H et K les points en lesquels les parallèles à (Ax) et (By) menées par P et Q coupent respectivement [AB], R le point d'intersection de (BP) et [Ax) et L le point en lequel la parallèle à (AB) menée par P coupe [Ax).
Pour des raisons angulaires, les triangles KQB et LPR sont semblables de même que les triangles AKQ et ALP. On a donc les relations :
KB / LR = KQ / LP = AK / AL,
d'où KB / KA = LR / LA = PR / PB = HA / HB (Thalès).
Ainsi les segments [HK] et [AB] ont le même milieu J et I appartient à]Jz) demi-droite menée par J parallèlement à (Ax) et (By) (Théorème des milieux).

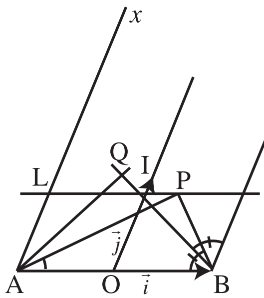


2) Soit I un point de]Jz). On cherche un point P intérieur à E tel que I soit le milieu du segment joignant P au point Q associé à P comme dans l'énoncé ; la recherche de P sera facilitée par le fait que le problème posé n'admet pas une solution unique.
Soit (tAu) un secteur contenu dans E, contenant I en son intérieur et tel que les angles $\widehat{y\mathrm{BQ}}$ et $\widehat{\mathrm{ABP}}$

soient égaux. L'image de [Au) par la symétrie de centre I permet de construire P sur [At) puis Q′ sur [Au) tel que I soit le milieu de [PQ′] ; par Q′ on mène la parallèle à (Ax) qui coupe [AB] en K′. Les points Q, H et K étant définis à partir de P comme en 1) on obtient que K et K′ sont identiques comme symétriques de H par rapport à J d'où l'identité de Q et Q′ comme intersection de [Au) avec la parallèle à (Ax) menée par K.
Tout point I de]Jz) est bien le milieu d'un segment [PQ].

Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

Utilisons le repère affine $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, où O est le milieu de [AB], où $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et où $\vec{j}$ est le vecteur de même norme que $\vec{i}$ et de même sens et direction que la demi-droite [Ax).
Soient a et $-b$ les coefficients directeurs respectifs des droites (AP) et (BP), (les nombres a et b sont strictement positifs).
Les équations des droites sont alors : (AP) : $y=a(x+1)$ et (BP) : $y=-b(x-1)$.



En résolvant le système, on obtient les coordonnées de P : $\left(\frac{b-a}{a+b},\frac{2ab}{a+b}\right)$.

Les droites (AQ) et (BQ) ont pour coefficients directeurs respectifs $a'=\frac{1}{a}$ et $b'=\frac{1}{b}$.

Les coordonnées de Q sont donc : $\left(\frac{b'-a'}{a'+b'},\frac{2a'b'}{a'+b'}\right)=\left(\frac{a-b}{a+b},\frac{2}{a+b}\right)$ et les coordonnées de I sont : $\left(0,\frac{1+ab}{a+b}\right)$.

Le point I appartient donc à la demi-droite ouverte [Oz) de même sens et de même direction que [Ax).
On vérifie que le lieu de I est cette demi-droite toute entière en remarquant que l'ordonnée $f(a,b)$ du point I décrit $\mathbb{R}_+^*$, lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

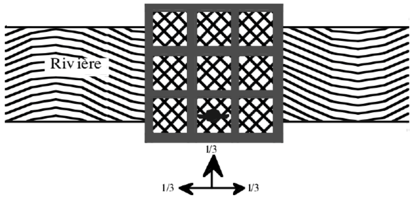
En effet, $f(a,a)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ décrit l'intervalle $[1,+\infty[$ lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$ et $f\left(a,\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{f(a,a)}$ décrit l'intervalle $]0,1[$ lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$.

Autres solutions : Raymond Raynaud (Digne), Alain Corré (Moulins), René Manzoni (Le havre).

Exercice 466-1 (Christian Planchon – Marvejols)

L'ivrogne

Pour rentrer chez lui, Don Garcia doit traverser un pont sans balustrade, constitué de trois rangées de trois dalles ; ses amis l'ont laissé sur la dalle centrale de la première rangée. Saoul comme il est, s'il tombe à l'eau, c'est la noyade assurée. Les yeux rivés sur l'autre berge, il s'élance. Titubant, il a autant de chances de faire un écart à gauche qu'un écart à droite ou qu'un pas en avant.



L'amplitude de ses écarts et de ses pas étant égale aux côtés des dalles carrées, quelle est la probabilité pour qu'il traverse ?

Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

Pour $1 \leq n \leq 3$, soient C_n la position centrale de la n-ième rangée (à partir du départ) et B_n la position latérale sur le bord gauche ou droit de la même rangée.
Soit c_n (respectivement b_n) la probabilité pour Don Garcia de réussir la traversée à partir de la position C_n (respectivement B_n).
Ces probabilités sont liées par les relations suivantes :

$$c_n = \frac{1}{3}c_{n+1} + \frac{2}{3}b_n, \quad b_n = \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \quad \text{pour } 1 \leq n \leq 2,$$

$$c_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}b_3, \quad b_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}c_3.$$

En résolvant le système, on trouve successivement :

$$c_3 = \frac{5}{7}, b_3 = \frac{4}{7}, \quad c_2 = \frac{23}{49}, b_2 = \frac{17}{49}, \quad c_1 = \frac{103}{343}, \quad b_3 = \frac{74}{343}.$$

La probabilité demandée est : $c_1 = \dfrac{103}{343}$.

Autre solution : Alain Corré (Moulins).

Exercice 466-2 (Stéphan Manganelli - Carpentras)

Les nombres métaux

On connaît très bien le nombre d'or, solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.
On connaît un peu moins le nombre d'argent, solution de $x^3 = x^2 + x + 1$.
On connaît très peu le nombre de bronze, solution positive de $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$.
Et je m'arrête là pour la suite de ces nombres métaux … dont j'ai conjecturé et montré la convergence vers 2 !

Solution de Raymond Raynaud (Digne)

Soit n un entier supérieur à 1. Il s'agit de démontrer que l'équation e_n :

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$$

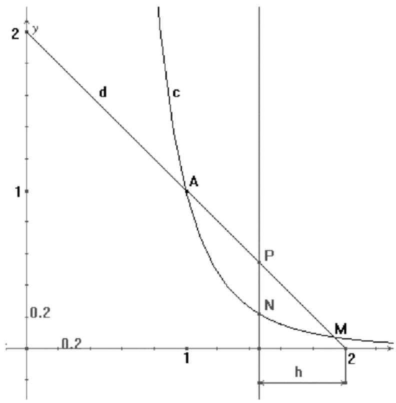
a une racine positive qui tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$.

e_n n'admet ni 0 ni 1 comme racine et pour tout x de $\mathbb{R} - \{0,1\}$:

$$x^n = x^{n-1} + \ldots + x + 1 \Leftrightarrow x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} \Leftrightarrow x^{n+1} - 2x^n = -1 \Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{x^n}.$$

Soit c et d les parties dans le premier quadrant des courbes représentatives des fonctions

$x \rightarrow \dfrac{1}{x^n}$ et $x \rightarrow 2 - x$.



Elles ont en commun deux points : le point A (1,1) et le point M dont l'abscisse x_M, comprise entre 1 et 2, est la solution positive de l'équation e_n.
Soit h un nombre positif inférieur à 1.
La droite d'équation $x = 2 - h$ coupe c et d respectivement en N et P.

$y_P = h$ et $y_N = \dfrac{1}{(2-h)^n}$.

Puisque $2 - h > 1$, pour tout h fixé, si petit soit-il, on peut, par le choix de n assez grand, rendre $(2 - h)^n$ aussi grand qu'on veut et par conséquent rendre y_N inférieur à y_P.
Cela réalisé, P est entre A et M, et $x_M > 2 - \mathrm{h}$.
On peut donc conclure que :
Lorsque n tend vers l'infini la racine positive de l'équation e_n tend vers 2.

Autre solution : Alain Corré (Moulins).

Autre solution : Marie-Laure Chaillou (Épinay sur Orge) qui précise :

La méthode est généralisable. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a \geq 1$.

e_a : $x^{n+1} = a(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1)$ admet une seule solution $\varphi_n(a)$ dans $\mathbb{R}^+$ et

$$\varphi_n(a) \in \left] a + 1 - \frac{1}{(a+1)^n}, a + 1 - \frac{1}{(a+1)^n} + \frac{1}{(a+1)^{n+1}} \right[.$$

Comment appeler ces nombres ? les nombres a-métalliques !