

Exercices de ci, de là

Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain)

IREM, Faculté des Sciences,

40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex

ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices :

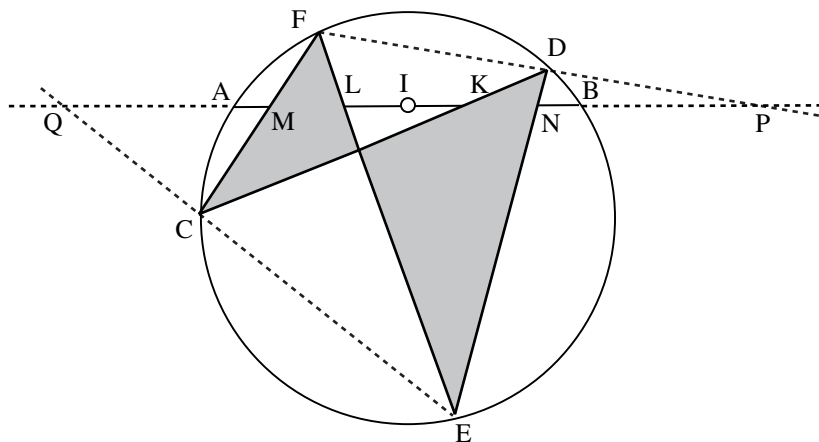
Exercice 467-1 (Michel Lafond - Dijon)

Se référant à l'exercice 461-1 de Georges Lion et Maurice Starck, Michel Lafond nous propose le théorème du sphinx (figure ci-dessous) :

Si dans un cercle, AB est une corde de milieu I , et si CD et EF sont deux autres cordes coupant AB respectivement en K et L avec I milieu de KL , alors :

Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN .

Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ .



Je n'ai pas essayé de démontrer cette généralisation, mais sans doute, des lecteurs voudront bien s'attaquer à cette énigme du sphinx, que j'ai trouvée dans un numéro récent de MATHEMATICS MAGAZINE (Octobre 2005).

Michel Lafond va faire paraître un article sur le sujet dans une revue locale de Bourgogne.

Exercice 467-2 (Louis Rivoalan - Rochefort)

La suite de terme général $(\cos n)^n$ est -elle convergente ?

La réponse est non. Mais c'est loin d'être évident.

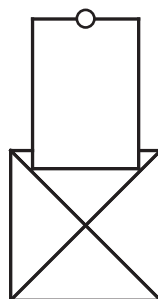
En effet, s'il est facile de montrer que 0 est une valeur d'adhérence, on peut aussi démontrer que 1, et -1 , le sont aussi, ce qui montre que cette suite ne converge pas. Une question qui reste en suspens : est ce que tout nombre de l'intervalle $[-1 ; 1]$ est une valeur d'adhérence pour cette suite ?

Solutions d'exercices**Exercice 462-4**

Dans le BV n° 462, Nathalie Chevalarias présentait un outil de menuisier servant à dessiner des ellipses. Cet outil est constitué de deux pièces en bois ; l'une de forme carrée dans laquelle l'artisan a pratiqué deux rainures selon les diagonales ; l'autre de forme rectangulaire dont les deux sommets d'une largeur vont pouvoir coulisser dans les rainures. Un crayon est fixé au milieu de l'autre largeur.

Il faut savoir aussi que la largeur de la pièce rectangulaire vaut exactement la moitié de la diagonale du carré.

Montrer que le crayon a effectivement dessiné une ellipse quand la planche rectangulaire a effectué un mouvement complet ?

**Solution de Richard Beczkowski (Dijon)**

Schématisons l'instrument pour une étude géométrique :

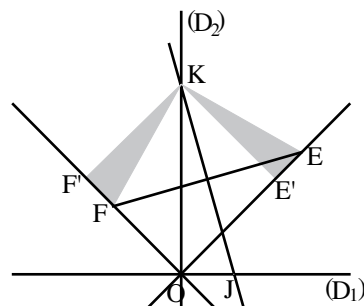
- pour le carré $ABCD$, de centre O , prenons les deux droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires (ses médianes) avec leurs bissectrices (BD) et (AC) (les diagonales du carré) ;
- pour le rectangle sa base $[EF]$ de longueur d , demi diagonale du carré, et sa médiatrice. Le point E se déplace sur le segment $[AC]$ alors que F décrit $[BD]$.

La médiatrice de $[EF]$ coupe (D_1) en J et (D_2) en K .

Les points E' et F' sont les projections orthogonales de K sur les droites (OE) et (OF) .

Le point K étant intersection de la médiatrice de $[EF]$ et de la bissectrice de l'angle $(\overline{OE}, \overline{OF'})$, les distances KE et KF d'une part, KE' et KF' d'autre part sont égales.

Dans la rotation de centre K qui amène E' et (OE)



sur F' et (OF') – son angle est donc $\frac{\pi}{2}$ – le point E' a pour image F' .

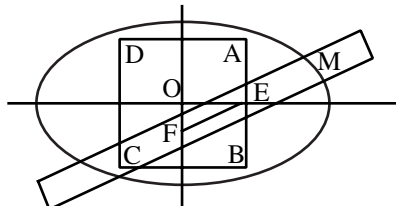
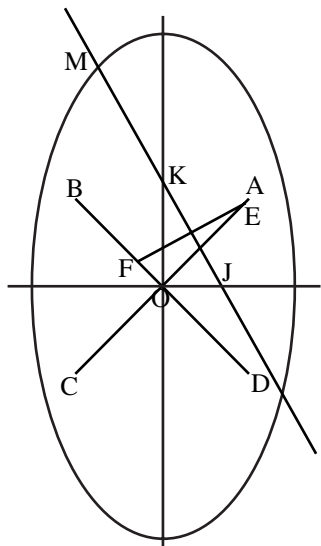
Le triangle EKF est rectangle isocèle en K . C'est aussi le cas du triangle EJF . Le quadrilatère $EKFJ$ est un carré et $KJ = EF = d$.

La pointe du crayon est en M sur la médiatrice de $[EF]$.

Les points J, K, M matérialisent la célèbre bande de papier qui permet le tracé par points d'une ellipse d'axes (D_1) et (D_2) , le demi grand axe est JM et le demi petit axe est KM .

Pratiquement la plus petite ellipse que l'on puisse tracer sans empiéter sur le carré, est circonscrite à ce dernier. Si on place le crayon sur la droite (EF) il dessine une ellipse d'axes (OA) et (OB) dont le petit axe ne peut pas être plus court que la diagonale du carré.

Quelqu'un verrait-il une raison de ne pas utiliser le dispositif suivant qui donne le même résultat que celui proposé ?



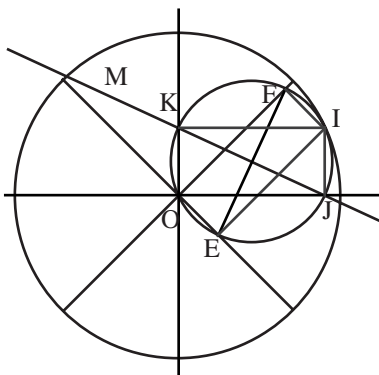
Il doit bien y avoir encore quelques « poilus » pour reconnaître un magnifique exemple de mouvement plan sur plan !

Le plan mobile (la planche rectangulaire) glisse, théoriquement sans frottement, sur le plan fixe du carré.

À chaque instant tout se passe comme si le mouvement était circulaire autour d'un point appelé centre instantané de rotation. Toutes les normales aux trajectoires des points liés au plan mobile passent par ce centre. C'est ici le point I dont la trajectoire dans le plan fixe, le cercle de centre O et de rayon d , est la base du mouvement alors que la trajectoire de I

dans le plan mobile, le cercle de rayon $\frac{d}{2}$

dont le centre est le milieu de $[EF]$, en est la roulante.



On peut, moyennant quelques calculs peu compliqués, montrer que tous les points liés au plan mobile décrivent une ellipse qui peut éventuellement être un cercle ou un segment de droite. Rappelons que les droites (EF) et (KJ) enveloppent chacune une astroïde.

Autres solutions : Alain Corré (*Moulins*), Georges Lion (*Wallis*), Raymond Raynaud (*Digne*).

Exercice 463-2 (Georges Lion)

Sur C, cercle circonscrit à un triangle ABC, construire le point M dont la droite de Simpson est parallèle à une droite donnée.

Solution de l'auteur

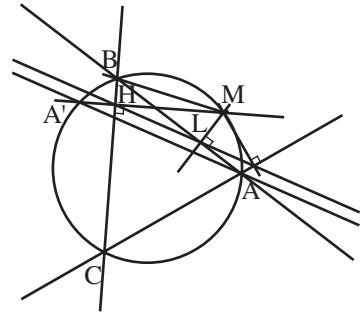
On suppose le problème résolu et on note H et L les projetés de M sur (BC) et (AB) respectivement ; (MH) recoupe C en A'. Montrons que (AA') est parallèle à (HL) en utilisant les angles orientés de droites.

En effet on a

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MB}) \\ &= (\overrightarrow{LH}, \overrightarrow{LB}) = (\overrightarrow{LH}, \overrightarrow{AB}), \end{aligned}$$

par cocyclicité, alignement, puis de nouveau cocyclicité et alignement.

La construction demandée découle aussitôt du parallélisme de la droite de Simson et de (AA').



Autres solutions : Alain Corré (*Moulins*), Albert Marcout (*Sainte-Savine*), Raymond Raynaud (*Digne*). Jacques Borowczyk (*Tours*) renvoie à l'article sur la géométrie élémentaire du triangle dans le plan complexe : J.E. Ofmann – *L'enseignement mathématique* 1958 (pages 178 - 211).

Exercice 463-3 (Pascale Pombourcq)

Construire un triangle isocèle ABC connaissant la base BC et la longueur de la bissectrice des angles à la base.

Solution de Jacques Borowczyk (IUFM Orléans-Tours)

Analyse

Soient D_b le point d'intersection de la bissectrice issue de B et du côté [AC] et D_c le point d'intersection de la bissectrice issue de C et du côté [AB].

Le quadrilatère BCD_cD_b est un quadrilatère inscriptible dont trois des côtés sont isométriques. Le problème équivaut à construire un quadrilatère convexe inscriptible dont trois des côtés sont isométriques connaissant la longueur commune de ses diagonales et la longueur du quatrième côté.

Le théorème de Ptolémée affirme que le produit des diagonales de tout quadrilatère

$A_1A_2A_3A_4$ est inférieur à la somme des produits opposés (inégalité de Ptolémée) et que pour un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ dont les sommets sont des points non alignés, le quadrilatère convexe $A_1A_2A_3A_4$ est inscriptible si, et seulement si on a la relation :

$$A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4.$$

Il en résulte que la diagonale β et la base $BC = a$ sont liés au côté $x = BD_c = D_cD_b = D_bC$ par la relation : $\beta^2 = x^2 + xa$.

Ainsi x et $x + a$ ont pour moyenne géométrique β , d'où une construction géométrique pour déterminer deux longueurs de différence a et de moyenne géométrique β .

Par ailleurs, la longueur de la bissectrice des angles à la base est

$$BI = CJ = \frac{ac[(a+c)^2 - b^2]}{(a+c)^2} = \frac{ac[(a+c)^2 - c^2]}{(a+c)^2} = \frac{a^2c(a+2c)}{(a+c)^2}.$$

Si a est fixé, cette longueur est une fonction strictement croissante de c .

Cette longueur varie entre $\frac{4}{9}a^2$ et $2a^2$. Ainsi la longueur a de la base BC et la

longueur β de la bissectrice des angles à la base vérifient : $\frac{4}{9} < \frac{\beta}{a} < \sqrt{2}$.

Synthèse

On considère le cercle de diamètre la base BC et la tangente à ce cercle passant par B . Soit E un point de la tangente à ce cercle passant par B tel que $BE = \beta$. Une construction géométrique permet de déterminer deux longueurs de différence a et de moyenne géométrique β :

– Première construction : on trace la droite (EO) où O désigne le milieu de la base BC qui coupe le cercle de diamètre $[BC]$ en deux points distincts M_1 et M_2 de telle sorte que :

$$EB^2 = EM_1 \cdot EM_2, \quad EM_2 - EM_1 = BC.$$

– Seconde construction : soit E' le symétrique du point E par rapport à O : c'est un point de la tangente à ce cercle passant par C tel que $CE' = \beta$. On trace le cercle de centre O passant par E (et par E') qui coupe la droite (BC) en deux points N_1 et N_2 de telle sorte que ON_1 et BN_1 sont deux longueurs de différence a et de moyenne géométrique β .

Si le cercle de centre B et de rayon $\beta = EB$ et le cercle de centre C et de rayon EM_1 (resp. BN_1) se coupent en un point D , alors le cercle de centre C et de rayon $\beta = EB$ et le cercle de centre B et de rayon EM_1 se coupent en un point D' symétrique de D par rapport à la médiatrice de $[BC]$ et le quadrilatère convexe $BD'DC$ est un quadrilatère inscriptible dont trois des côtés sont isométriques et les droites (BD') et (CD) se coupent en un point A de la médiatrice de $[BC]$. Le triangle ABC est un triangle isocèle construit sur la base $[BC]$ et dont la longueur de la bissectrice des angles à la base est β .

Discussion

Pour que les deux cercles se coupent, il faut et il suffit que l'on ait

$$|\beta - x| \leq BC \leq \beta + x.$$

Mais on sait par ailleurs que la longueur a de la base BC et la longueur β de la bissectrice des angles à la base vérifient : $\frac{4}{9} < \frac{\beta}{a} < \sqrt{2}$.

Cela montre que pour tout couple de réels strictement positifs (a, β) vérifiant $\frac{4}{9} < \frac{\beta}{a} < \sqrt{2}$, il existe un triangle isocèle construit sur la base [BC] et dont la longueur de la bissectrice des angles à la base est β et que deux solutions distinctes sont symétriques par rapport à la droite (BC).

Autres solutions : Miguel Amengual (*Mallorca*), Alain Corre (*Moulins*), Jean-Pierre Friedelmeyer (*Osenbach*), Georges Lion (*Wallis*), Albert Marcout (*Sainte-Savine*), Raymond Raynaud (*Digne*), Jean Théocliste (*Valence*).

Exercice 464-1 (Georges Lion et Maurice Starck)

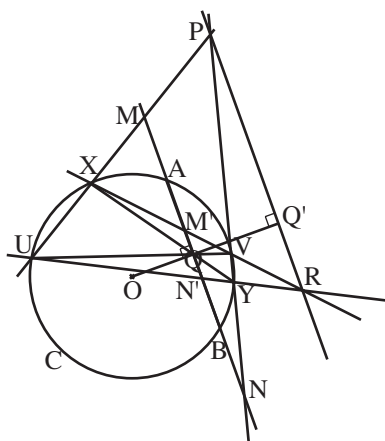
En le point Q milieu d'une corde [AB] d'un cercle C se coupent deux cordes [UV] et [XY] ; la droite (AB) coupe (UX) en M et (VY) en N. Montrer que Q est aussi le milieu de [MN].

Solution de Marie-Laure Chaillou (Épinay/Orge)

Les droites (UX) et (VY) se coupent en P.
Les droites (VX) et (UY) se coupent en R.
La droite (PR) est la polaire du point Q par rapport au cercle C. Donc (PR) est orthogonale à (OQ), donc parallèle à la droite (AB).
Et les droites (PQ) et (PR) sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites (PU) et (PV).

Le conjugué de Q par rapport à (MN) est le point d'intersection des droites (AB) et (PR) : les droites sont parallèles, donc Q est le milieu de [MN].

(AB) coupe (VX) en M' et (UY) en N' : Q est aussi le milieu de [M'N'].



Autres solutions : Alain Corre (*Moulins*), Michel Lafond (*Dijon*), Jean Lefort (*Witzenheim*), Georges Lion (*Wallis*), René Manzoni (*Le Havre*), Albert Marcout (*Sainte-Savine*), Christian Planchon (*Marjevols*), Raymond Raynaud (*Digne*), Pierre Renfer (*Ostwald*), Maurice Stark (*Nouméa*).

Exercice 464-3 (Jean-Claude Laugier)

Soit un ensemble A de nombres entiers compris entre 1 et 1000 tel qu'aucun élément de A ne soit le double d'un élément de A . Quel est le nombre maximal d'éléments de A ?

Solution de Pierre Samuel (Hossegor)

Pour n entier naturel, posons $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On considère les parties A de I_n telles que $A \cap 2A = \emptyset$ et, parmi elles, celles dont le cardinal M_n est maximal. Notons $v(x)$ l'exposant de 2 dans la décomposition de l'entier x . On va montrer qu'on peut prendre pour A la partie de I_n dont les éléments sont les nombres impairs, ceux de la forme $4 \times (\text{impair})$, $16 \times (\text{impair})$, etc., bref les entiers x tels que $v(x)$ soit pair (en particulier nul). Son complémentaire $B = I_n - A$ est l'ensemble des x tels que $v(x)$ soit impair. On a $2A \subset B$, d'où $A \cap 2A = \emptyset$. Reste à voir que $\text{card}(A)$ est maximal. On le vérifie facilement pour $n = 1, 2, 3$ et 4.

Procédons par récurrence sur n avec $I_n = A \cup B$ comme ci-dessus. Si $n + 1$ est impair, on peut ajouter $n + 1$ à A car $2(n + 1)$ est en dehors de I_{n+1} . Si $n + 1 = 2q$ et si $v(q)$ est pair, c'est-à-dire si $v(n + 1)$ est impair, alors q est dans A et l'on doit mettre $n + 1 = 2q$ dans $I_{n+1} - A$. Si $n + 1 = 2q$ avec $v(q)$ impair, c'est-à-dire si $v(n + 1)$ est pair, alors q est dans B et l'on peut ajouter $n + 1$ à A .

Notons $E(z)$ la partie entière du réel z . Dans I_n , le nombre des éléments impairs est

$E\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$. Celui des éléments de la forme $4 \times (\text{impair})$ est $E\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{2}\right)$. Celui des

éléments de la forme $16 \times (\text{impair})$ est $E\left(\frac{n}{32} + \frac{1}{2}\right)$, etc. On a donc :

$$\begin{aligned} M_{1000} &= 500 + 125 + E(31,25 + 0,5) + E(7,8125 + 0,5) \\ &\quad + E(1,953125 + 0,5) + E(0,48828125 + 0,5) \\ &= 500 + 125 + 31 + 8 + 2 + 0 = 666. \end{aligned}$$

Complément : Le raisonnement fait montre qu'on a $M_{n+1} = 1 + M_n$ si $v(n + 1)$ est pair et $M_{n+1} = M_n$ si $v(n + 1)$ est impair.

Autres solutions : Robert Bourdon (*Tourgeville*) : « Diabolique non ??? – Dans l'Apocalypse, 666 est le symbole de "La Bête". Y a qu'à croire ! », Frédéric De Ligat (*Montguyon*) qui signale le même nombre de la Bête, Alain Corre (*Moulins*) et René Manzoni (*Le Havre*).