Découvrir l'exponentielle et le logarithme avec Cabri-Géomètre

Roger Cuppens(*)

Dans le dossier du numéro 460 est étudiée la possibilité d'introduire l'exponentielle avant le logarithme comme le suggèrent les nouveaux programmes de Terminale S. Dans un remarquable article, Jean-Pierre Friedelmeyer montre diverses possibilités pour introduire ces deux fonctions et signale que l'outil informatique pourrait grandement modifier cet enseignement, un exemple étant fourni par André Stoll qui présente deux TP sur la méthode d'Euler. Dans cet article, je vais montrer qu'une utilisation « expérimentale » des nouveaux moyens de calcul permet d'aller beaucoup plus loin dans cette direction.

1. Introduction des fonctions

Avec les outils « Calculatrice » (qui contient un bouton « ln », mais où l'on peut invoquer aussi une fonction « exp ») et « Table » du logiciel Cabri(1), on obtient facilement le tableau suivant(2) :

x :	exp(x) :	ln(x) :
- 5,0	0,006737946999085	
- 4,0	0,018315638888734	
- 3,0	0,049787068367864	
- 2,0	0,135335283236613	
- 1,0	0,367879441171442	
0,0	1,000000000000000	$-\infty$
1,0	2,718281828459045	0,000000000000000
2,0	7,389056098930650	0,693147180559945
3,0	20,085536923187668	1,098612288668110
4,0	54,598150033144236	1,386294361119891
5,0	148,413159102576600	1,609437912434100

Table 1

Remarque. Les blancs dans la troisième colonne correspondent au message d'erreur « Domain error for a logarithm » :

(*) Professeur émérite : Université Toulouse III Paul Sabatier, E.A. 3692, LEMME, France et Groupe Géométrie dynamique de l'IREM de Toulouse.

(1) J'utilise ce logiciel d'abord parce que c'est l'outil que je connais le mieux, mais aussi parce que son utilisation en analyse supprime des murs qui semblent infranchissables pour certains élèves : on restaure ainsi le cours de l'histoire où la notion de courbe (et de tangente) a précédé celle de fonction (et de dérivée). Il va sans dire que la plupart des considérations qui vont suivre peuvent être obtenues avec n'importe quel tableur-grapheur ou calculatrice graphique.

(2) On utilise ici simplement l'attrait pour découvrir les possibilités d'un nouveau jouet : par exemple, qui n'a jamais introduit un nombre dans une calculatrice comportant une touche « racine carrée » et constaté qu'en tapant plusieurs fois sur cette touche, on obtient toujours 1…

Au simple examen de ce tableau (que l'on peut bien entendu compléter par d'autres valeurs éventuellement non entières), on peut déduire un certain nombre de remarques telles que :

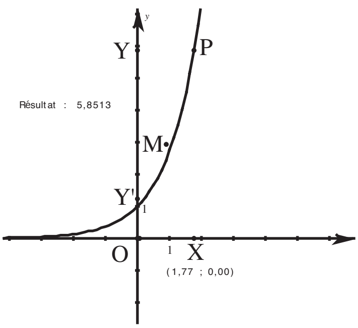
- exp(x) semble un nombre positif pour toutes les valeurs de x ;
- exp(x) semble croître avec x (et même très rapidement !) ;
- ln(x) ne semble défini que pour des x positifs ;

etc.

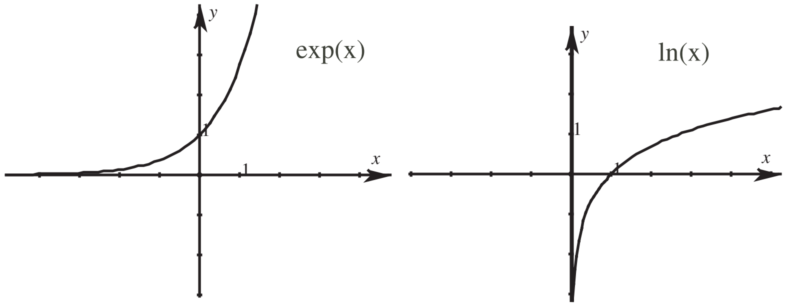
On peut alors parler de fonction exponentielle et demander à Cabri la courbe représentative. Pour ceci, il suffit dans Cabri II de montrer les axes, de prendre un point X sur l'axe des abscisses et de déterminer :

- avec l'outil « Coord. ou équation », l'abscisse x de X ;
- avec l'outil « Calculatrice », $y = \exp(x)$;
- avec l'outil « Report de mesure », le point Y d'ordonnée y ;
- le symétrique P de l'origine O par rapport au milieu M des points X et Y.

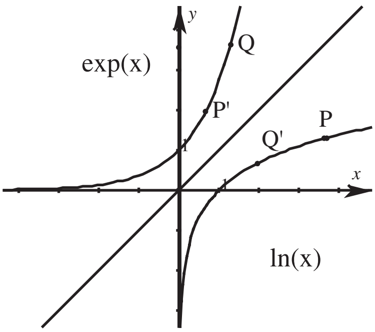
Le lieu du point P quand le point X varie est la courbe cherchée. On obtient :



Avec la version Cabri II plus, on peut aller beaucoup plus vite : avec l'outil « Expression », on tape « exp(x) » et avec l'outil « Appliquer une expression », on clique sur ce qui vient d'être tapé et sur l'un des axes : on obtient alors directement la courbe représentative. De plus, en remplaçant dans l'expression « exp » par « ln », on obtient la courbe représentative de la fonction ln :



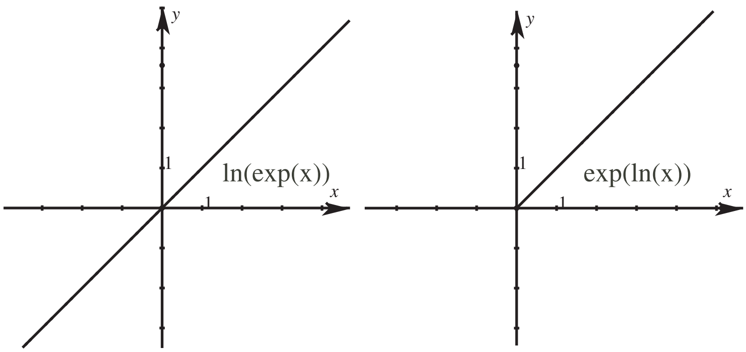
Mais il est plus intéressant de tracer les deux courbes dans un même repère, ce qui montre une symétrie évidente : le symétrique Q par rapport à la première bissectrice d'un point P situé sur la courbe représentative de exp se trouve « visuellement » sur la courbe représentative de ln et le symétrique Q′ par rapport à cette même bissectrice d'un point P′ situé sur la courbe représentative de ln se trouve « visuellement » sur la courbe représentative de exp :



On peut donc penser que :

Conjecture 1. Les deux fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

On peut renforcer cette conjecture en traçant la courbe représentative de ln o exp ou de exp o ln :



On peut aussi dans l'outil « Calculatrice » taper successivement sur les boutons « Inv » et « ln » :

Cabri sait que la fonction réciproque de ln est exp !

2. Propriétés fonctionnelles

2.1. Équation fonctionnelle fondamentale de l'exponentielle

En revenant au tableau de valeurs ci-dessus, on peut vérifier que le rapport de deux termes successifs de la deuxième colonne est toujours égal à 2,718… et en déduire la conjecture :

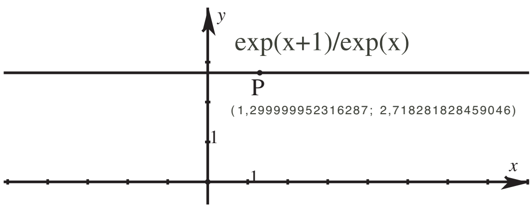
$$\exp(x+1) = \exp(x)\exp(1) \tag{1}$$

pour tout x entier, ce qui entraîne que pour tout x entier :

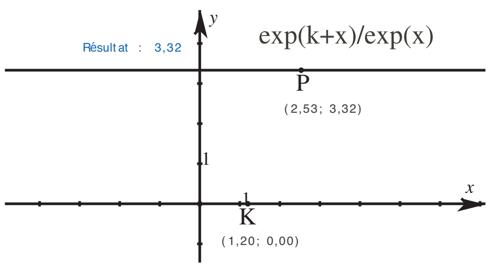
$$\exp(x) = \left(\exp(1)\right)^x = \mathrm{e}^x \tag{2}$$

en posant e = exp(1).

En traçant la courbe représentative de l'expression « exp(x+1)/exp(x) » et en déterminant l'ordonnée d'un point P pris sur ce lieu, on peut vérifier que la relation (1) reste valable pour des valeurs non entières de x :



De même, en déterminant l'abscisse k d'un point K pris sur l'axe des abscisses(3) et en appliquant l'expression « exp(k+x)/exp(x) » à cette abscisse et aux axes, on obtient une droite parallèle à l'axe des abscisses et on peut alors vérifier que l'ordonnée d'un point pris sur cette droite est égale à exp(k) :



(3) On pourrait introduire directement le nombre k, mais la méthode indiquée ici permet d'observer les modifications de la courbe obtenue en faisant bouger le point K (ce qui est plus commode que de modifier un nombre).

La relation (1) se généralise donc en

$$\exp(x+x')=\exp(x)\exp(x')\,. \tag{3}$$

On peut donc conjecturer que :

> La fonction exp est solution de l'équation fonctionnelle :
> $$f(x+x')=f(x)f(x') \tag{4}$$

Si f est solution de (4) pour tous x et y réels, on a :

$$f(x)=f(x)f(0),$$

ce qui donne

$$f(0)=0$$

(auquel cas f est identiquement nulle) ou

$$f(0)=1. \tag{5}$$

Si on élimine le premier cas, on a :

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)} \tag{6}$$

et

$$f(2t)=\left(f(t)\right)^2, \tag{7}$$

d'où l'on déduit que f doit être positive et que

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{f(t)},$$

puis

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}. \tag{8}$$

Réciproquement, si f vérifie (5) et (8), alors

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)},\quad f\left(\frac{y}{2}\right)=\sqrt{f(y)}$$

et

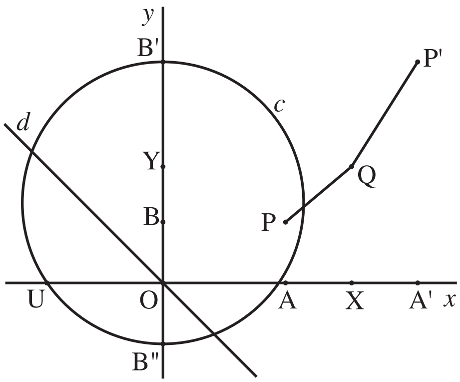
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right),$$

c'est-à-dire (4).

De (8) on déduit que, si la courbe représentative γ d'une solution de (4) passe par deux points P (a,b) et P′ (a',b'), elle passe aussi par le point Q $\left(\frac{a+a'}{2},\sqrt{bb'}\right)$.

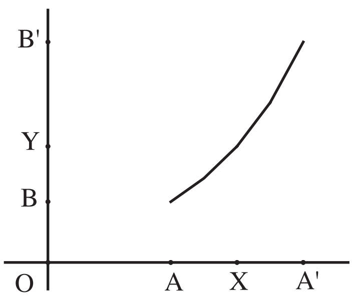
Une construction classique de la racine carrée (cf., par exemple, [2], p. 255 ou [3], p. 56) nous mène à la construction suivante dans Cabri : si A, A′, B, B′ sont quatre points tels que les droites (AA′) et (BB′) se coupent en O et soient

perpendiculaires (B et B′ étant d'un même côté de (AA′)), on détermine :
– le symétrique B″ du point B par rapport à la droite (AA′) ;
– l'un des points d'intersection U du cercle de diamètre [B′B″] avec la droite (AA′) ;
– le symétrique Y du point U par rapport à la bissectrice *d* de $\widehat{UOB'}$;
– le milieu X des points A et A′ ;
– le symétrique P (resp. P′, resp. Q) du point O par rapport au milieu des points A et B (resp. A′ et B′, resp. X et Y).



De ce qui précède on déduit que, si P et P′ se trouvent sur la courbe représentative d'une solution de (3), alors le point Q se trouve sur cette même courbe : les segments [PQ] et [QP′] sont donc deux cordes de cette courbe qui fournissent une première approximation de la courbe.

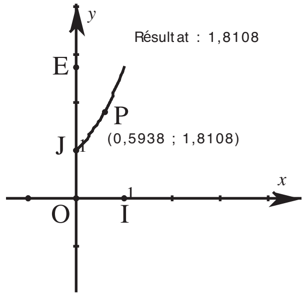
Si on construit une macro EquaFonc1 ayant pour objets initiaux les cinq points O, A, A′, B et B′(4) et pour objets finaux les deux segments [PQ] et [QP′]. et si on applique cette macro aux points O, A, X, B et Y, puis aux points O, X, A′, Y et B′, on obtient alors une réunion de quatre segments qui fournit une deuxième approximation de la courbe :



On construit alors une macro EquaFonc2 ayant pour objets initiaux les cinq points O, A, A′, B et B′ et pour objets finaux les quatre segments obtenus. En itérant ce procédé, on peut construire une suite de macros EquaFonc*n* ayant pour objets initiaux les cinq points O, A, A′, B et B′(4) et pour objets finaux 2^n segments dont la

(4) Pour diminuer le nombre d'objets intermédiaires, on y ajoutera la droite (AA′) et la bissectrice *d*.

réunion donne une approximation de la courbe. Par exemple, en utilisant le système d'axes de Cabri et en appliquant la macro EquaFonc5 aux points O (0,0), O, I(1,0), B(0,1) et E (0,e)[5], on obtient une courbe γ et en déterminant les coordonnées x et y d'un point P pris sur cette courbe, on constate que $y = \exp(x)$ à 10^{-4} près.



Puisqu'avec les formules (6) et (7), on peut étendre ce résultat en dehors du segment [0,1], on peut conjecturer le résultat suivant :

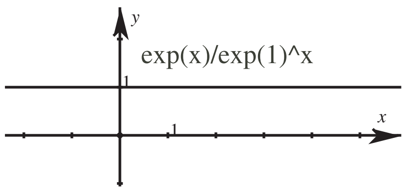
Conjecture 2. La fonction exp est la seule fonction continue sur **R** vérifiant :

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y), \\ f(1) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Mais qu'est-ce-que le nombre e ?

Remarques. 1. La continuité semble nécessaire puisque l'on ne définit « réellement » la fonction f que sur un ensemble dénombrable. Mais rappelons que l'existence de solutions non continues de l'équation (4) dépend (comme presque toute l'analyse classique) en la croyance en l'axiome du choix (non dénombrable)[6]. Faut-il soulever ce problème en Terminale ?

2. En appliquant l'expression « exp(x)/exp(1)^x »[7] aux axes, on obtient la droite d'équation $y = 1$:



Pour Cabri, la relation

$$\boxed{\exp(x) = \left(\exp(1)\right)^x = \mathrm{e}^x} \qquad (2)$$

(5) Puisqu'on ne peut appliquer dans Cabri une macro qu'à des objets différents, on remplacera le deuxième O par un point qui coïncide avec O, par exemple le symétrique de ce point par rapport à la droite (OI).
(6) Si on adopte un point de vue constructif, toutes les fonctions partout définies sont continues. On consultera à ce sujet [4].
(7) Rappelons que dans une calculatrice « ^ » permet de noter « linéairement » la puissance.

est valable pour tout x. Mais qu'est-ce-que e^x pour x non entier ?

2.2. Équation fonctionnelle fondamentale du logarithme

De (3), l'on déduit :

$$x + x' = \ln(\exp(x)\exp(x'))$$

et en posant

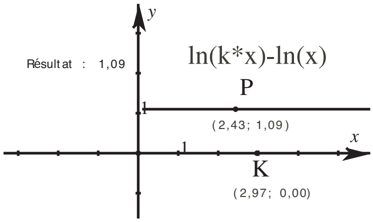
$$x = \ln(u) \Leftrightarrow u = \exp(x),$$

$$x' = \ln(v) \Leftrightarrow v = \exp(x'),$$

on obtient :

$$\ln(u) + \ln(v) = \ln(u \cdot v),$$

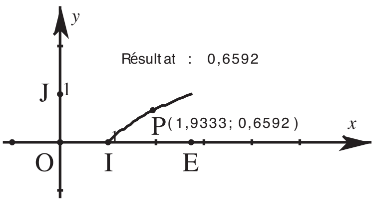
que l'on vérifie comme précédemment avec Cabri :



On peut donc conjecturer que :

> La fonction ln est solution de l'équation fonctionnelle :
> $$f(x \cdot x') = f(x) + f(x'). \quad (9)$$

On peut évidemment refaire l'étude précédente pour l'équation (9) et la fonction ln. Mais on peut remarquer qu'en appliquant la macro EquaFonc5 aux points O (0,0), O, J (0,1), I (1,0), E (e,0), on obtient une courbe qui approche celle de la fonction ln.



On peut donc émettre la :

> **Conjecture 3**. La fonction ln est la seule fonction continue sur $\mathbf{R}^+$ vérifiant :
> $$\begin{cases} f(xy) = f(x) + f(y), \\ f(e) = 1. \end{cases}$$

Remarques. 1. La procédure utilisée est finalement très proche de la démarche du découvreur des logarithmes. En effet, ce n'est pas pour donner une primitive à la fonction $1/x$ que Neper a inventé les logarithmes[8] : pour des motifs de calcul, il

(8) Comme le laissait suggérer un dessin humoristique illustrant un manuel scolaire.

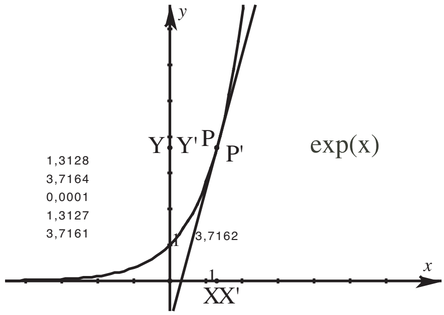
combinait deux mouvements, l'un à « accroissement arithmétique » et l'autre à « accroissement géométrique ».

2. Si la conjecture 1 est vraie, les conjectures 2 et 3 sont équivalentes.

3. Équations différentielles

3.1. Dérivée

On peut obtenir une valeur approchée de la dérivée de la fonction exp avec la méthode exposée dans [2], p. 299 et [3], p. 83 : on prend deux points P et P′ de la courbe d'abscisses x et $x' = x + h$ et on demande la pente p de la droite (PP′) :



Pour h très petit, p est très « proche » de la dérivée cherchée. Voici ce que donne Cabri pour diverses valeurs de h(9) :

h	p
0,1	3,908218776247656
0,01	3,734706554003857
0,001	3,717922795307782
0,0001	3,716249953138469
0,00001	3,716082724085075
0,000001	3,716066001983148
0,0000001	3,716064332681414
0,00000001	3,716064182473440
0,000000001	3,716064304112266
0,0000000001	3,716071546995348
0,00000000001	3,716112834845219

alors que la valeur de $\exp(x)$ est 3,716064143740230. On peut donc raisonnablement conjecturer que :

$$\boxed{\text{La fonction exp est solution de l'équation différentielle : } y' = y.}$$

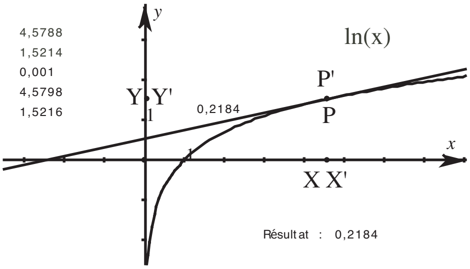
Remarque. Le fait que l'on puisse déduire ce résultat de l'équation (3) augmente considérablement la validité de cette conjecture.

(9) Ajoutons que pour $h = 10^{-12}$ la pente donnée est infinie tandis que pour $h = 10^{-13}$ la droite (PP′) cesse d'exister. Il peut être intéressant d'expliquer un tel comportement.

Des propriétés des fonctions réciproques, on peut déduire que :

La fonction ln est solution de l'équation différentielle : $y' = \frac{1}{x}$,

ce que confirme Cabri avec la même méthode.



3.2. La méthode d'Euler

Rappelons le principe de la méthode d'Euler : si un point P (a,b) se trouve sur la courbe représentative γ d'une solution d'une équation différentielle

$$y' = f(x, y)$$

et si x est une valeur proche de a, alors (il est probable que) le point Q (x,y) défini par

$$\frac{y-b}{x-a} = f(a,b) \qquad (10)$$

se trouve « presque » sur la courbe γ et le segment [PQ] est « proche » de la courbe γ.

Si x est quelconque, on peut former une suite (x_j) de points telle que $x_0 = a$, $x_n = x$ et telle que x_j soit « proche » de x_{j-1}. Pour $j = 1, \ldots, n$, on calcule de proche en proche y_j à partir de $y_0 = b$ suivant la formule :

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = f(x_{j-1}, y_{j-1}).$$

On peut espérer que le point P_j (x_j,y_j) soit proche de γ et que la courbe constituée de la réunion des segments $[P_{j-1}P_j]$ soit une bonne approximation de la courbe γ.

En général, on forme la suite (x_j) selon la formule

$$x_j = a + \frac{j(x-a)}{n}. \qquad (11)$$

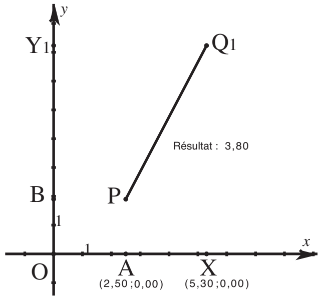
Nous utilisons dans la suite une variante de cette méthode adaptée à Cabri.

3.3. Résolution de l'équation $y' = y$ par la méthode d'Euler

Dans le cas de l'équation $y' = y$, l'équation (10) devient :

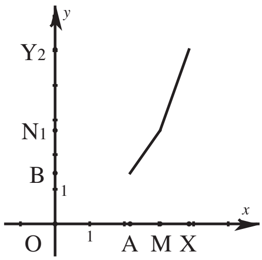
$$y = b(1 + x - a).$$

Si on se donne dans le repère de Cabri deux points A et X sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées, on détermine :
– les abscisses a et x des points A et X ;
– le nombre $k = 1 + x - a$;
– le transformé Y_1 du point B par l'homothétie de centre O et de rapport k ;
– le symétrique P (resp. Q_1) du point O par rapport au milieu de [AB] (resp. $[XY_1]$.



On définit alors une macro EulerExpo1 ayant pour objets initiaux les points A, X et B et le système d'axes et pour objet final le point Y_1 et le segment $[PQ_1]$.

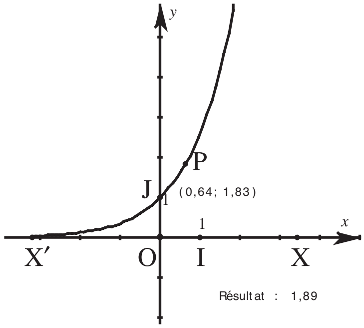
Puis on détermine le milieu M des points A et X et on applique cette macro aux points A, M et B (et au système d'axes), ce qui donne un point N_1 et un segment, puis la même macro aux points M, X et N_1, ce qui donne un point Y_2 et un deuxième segment :



En itérant le procédé, on construit une suite de macros EulerExpo$n$ ayant pour objets initiaux les points A, X et B et le système d'axes et pour objet final un point Y_n et 2^n segments. Si n est assez grand, la réunion de ces segments fournit une bonne approximation de la courbe représentative d'une solution de l'équation $y' = y$.

Par exemple, si on prend un point X d'abscisse positive sur l'axe des abscisses, l'application de la macro EulerExpo6 à O, X et J donne une courbe qui ressemble à la courbe représentative de la fonction exp. On a le même phénomène si on applique la même macro à O, X′ et J, X′ étant un point d'abscisse négative.

Mais, en déterminant les coordonnées x et y d'un point P pris sur l'un des segments obtenus, on constate que y (sur la figure 1,83) est encore assez éloigné de $\exp(x)$ (sur la figure 1,89).



On voit donc que la méthode proposée, même si elle est intéressante car on peut « voir » les réunions de segments « converger » vers la courbe solution, est forcément limitée par le nombre assez considérable des objets impliqués ! On peut évidemment améliorer ceci en supprimant les segments et en ne conservant que les points Y_n qui fournissent une approximation de exp(x). On obtient alors la courbe recherchée comme le lieu du point Y_n quand le point X parcourt Ox. Nous verrons dans le paragraphe 6 qu'une réflexion plus approfondie nous mènera à de meilleurs résultats.

On peut néanmoins émettre la :

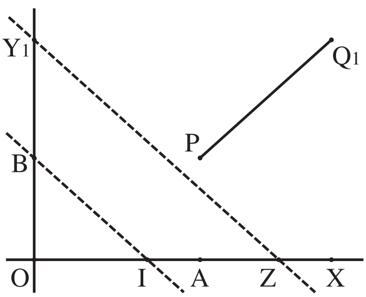
Conjecture 4. Si a et b sont deux nombres réels, il existe une fonction y et une seule vérifiant le système :

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(a) = b. \end{cases}$$

En particulier, la fonction exp est la solution du système :

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Remarques. 1. Au lieu de la construction « analytique » de base, on peut déterminer le point Y_1 avec la construction « géométrique » suivante : dans un repère (O,I,J) de Cabri, si A et X sont deux points de la droite (OI) et un point B sur la droite (OJ), soit Z le symétrique du point A par rapport au milieu de [IX]. Le point Y_1 est alors le projeté du point Z sur la droite (OJ) parallèlement à la droite (IB) :



2. On peut vérifier que l'ordonnée y_n des points Y_n suit une progression géométrique de premier terme b et de raison $1+\dfrac{b-a}{2}$. On voit ainsi que la construction précédente est en réalité la même que celle du paragraphe 2.1 et que les conjectures 2 et 4 sont équivalentes. J'ai néanmoins donné ces deux constructions pour que l'on puisse les utiliser indépendamment l'une de l'autre. Nous verrons dans le paragraphe 6 comment utiliser cette remarque pour obtenir un résultat intéressant.

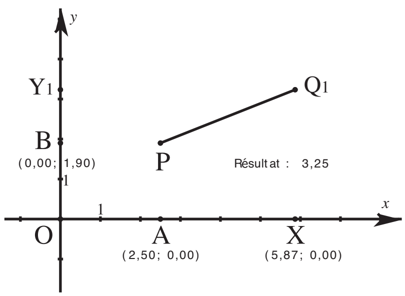
3.3. Résolution de l'équation $y' = 1/x$ par la méthode d'Euler

Dans le cas de l'équation $y' = 1/x$, (10) devient :

$$y = b + \frac{x}{a} - 1.$$

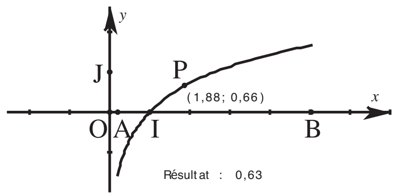
Si on se donne dans le repère (O,I,J) de Cabri deux points A et X sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées et si on détermine :
– les abscisses a et x des points A et X et l'ordonnée b du point B ;
– le nombre $k = b + x/a - 1$;
– sur l'axe (OJ) le point Y_1 d'ordonnée k ;
– le symétrique P (resp. Q_1) du point O par rapport au milieu de [AB] (resp. $[XY_1]$), si X est proche de A, le segment $[PQ_1]$ est proche de la courbe représentative de la solution du système :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \\ y(a) = b. \end{cases} \qquad (12)$$



On peut alors définir une macro EulerLn1 ayant pour objets initiaux le système d'axes et les points A, X et B et pour objet final le point Y_1 et le segment $[PQ_1]$, puis une suite de macros EulerLnn avec les mêmes objets initiaux et pour objets finaux un point Y_n et 2^n segments dont la réunion fournit une approximation de la courbe représentative de la solution du système (12).

Par exemple, si B est un point de l'axe des abscisses, l'application de la macro EulerLn6 au système d'axes et aux points I, B et O fournit une courbe proche de la courbe représentative de la fonction ln avec les mêmes restrictions que précédemment :



On peut donc émettre la :

Conjecture 5. Si a et b sont deux nombres réels ($a \neq 0$), il existe une fonction y et une seule vérifiant le système :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \\ y(a) = b. \end{cases}$$

En particulier, la fonction ln est la solution du système :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Remarques. 1. Si la conjecture 1 est vraie, les parties des conjectures 4 et 5 relatives aux fonctions exp et ln sont équivalentes.

2. La méthode d'Euler appliquée à une équation

$$y' = f(x)$$

revient au calcul approché (par une méthode de rectangles) de l'intégrale :

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

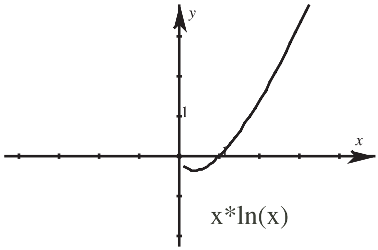
Je ne comprends donc pas pourquoi certains collègues refusent l'introduction de l'exponentielle ou du logarithme par la méthode d'Euler pour préférer introduire le logarithme par une aire.

3. Cette fois-ci la construction est différente de celle du paragraphe 2. Elle ne permet donc pas de voir directement l'équivalence des conjectures 3 et 5. Pour l'obtenir, il faudrait remplacer la suite des points (x_j) par une suite en progression géométrique, ce qui revient à remplacer (11) par la formule :

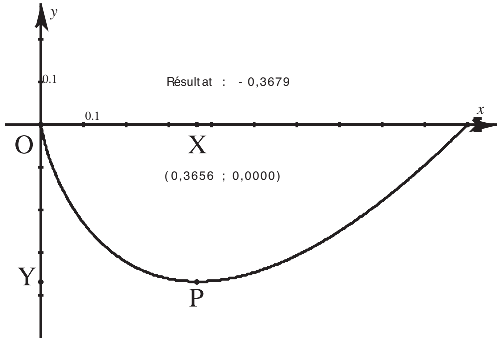
$$x_j = a \times \sqrt[n]{(x-a)^j}.$$

4. Comportement aux bornes

En traçant la courbe de l'expression « x * ln(x) », on obtient :



ce qui permet de penser (avec un peu d'imagination) que x ln(x) est proche de 0 au voisinage de 0. On peut obtenir une figure plus précise en prenant un système d'axes orthonormé (O,I,J) et un point X sur le segment [OI], en déterminant l'abscisse x du point X et le nombre $y = x \ln(x)$, puis en traçant le lieu du point P (x,y) quand X varie :



On peut alors conjecturer que :

$$\lim_{x \to 0+} x \ln(x) = 0. \tag{13}$$

Remarque. On peut obtenir une valeur approximative du minimum en déplaçant le point X jusqu'à obtenir un point correspondant à un changement de variation de Y. J'ai trouvé :

$$x \simeq 0,3656,\ y = -0,3679,$$

mais il faut être un expert (ou avoir fait le calcul à la main ou avec un système de calcul formel) pour penser que

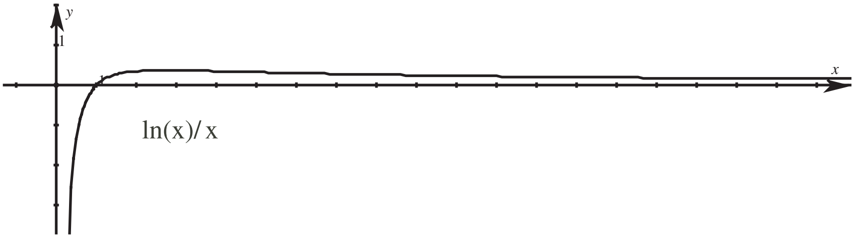
$$\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0,3679.$$

Il faudrait de plus affiner le déplacement du point X au moyen d'un levier ([1], p. 190) pour vérifier que le minimum se situe bien au point $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

En faisant dans (13) le changement de variable $x \rightarrow \frac{1}{x}$, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \tag{14}$$

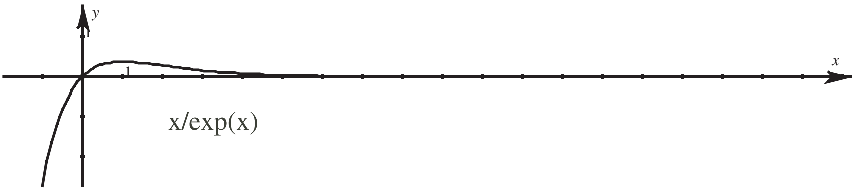
ce que confirme le tracé de la courbe représentative de l'expression « ln(x)/x » :



De même, en faisant dans (14) le changement de variable $x \to \exp(x)$, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0, \qquad (15)$$

ce que l'on confirme de la même manière :

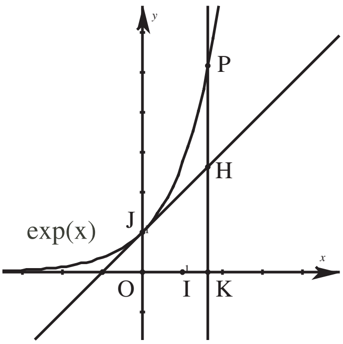


5. Une définition possible de l'exponentielle(10)

Dans ce paragraphe, nous notons P_n le polynôme :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

En traçant les courbes représentatives des expressions « exp(x) » et « 1+x », on constate que la droite d'équation $y = 1 + x$ (qui est la tangente à la courbe γ de l'exponentielle au point J (0,1)) est au dessous de γ.



On peut donc conjecturer que pour tout x :

(10) La méthode de ce paragraphe peut sembler artificielle, mais c'est la seule que j'ai trouvée pour introduire « naturellement » la définition utilisée par Michel Fréchet dans le Bulletin 460.

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

La considération des aires du domaine curviligne OKPJ et du trapèze OKHJ donne pour $x > 0$ l'inégalité :

$$\int_0^x \exp(t)dt \geq \int_0^x (1+t)dt,$$

ce qui donne :

$$\exp(x) - 1 \geq x + \frac{x^2}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\exp(x) \geq \mathrm{P}_2(x)$$

pour tout $x > 0$. En itérant le procédé, on obtient :

$$\exp(x) \geq \mathrm{P}_n(x)$$

pour tout $x > 0$.

Remarques. 1. On peut obtenir cette dernière inégalité sans aucun recours aux aires et intégrales en étudiant les fonctions

$$\mathrm{F}_n(x) = \exp(x) - \mathrm{P}_n(x).$$

Si on suppose que

$$\mathrm{F}_{n-1}(x) \geq 0,$$

puisque

$$\mathrm{F}_n'(x) = \exp(x) - \mathrm{P}_n'(x) = \exp(x) - \mathrm{P}_{n-1}(x) = \mathrm{F}_{n-1}(x) \geq 0$$

et puisque

$$\mathrm{F}_n(0) = 0,$$

on a

$$\mathrm{F}_n(x) \geq 0$$

pour tout $x > 0$.

2. On en déduit immédiatement une démonstration de (15) et même de

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

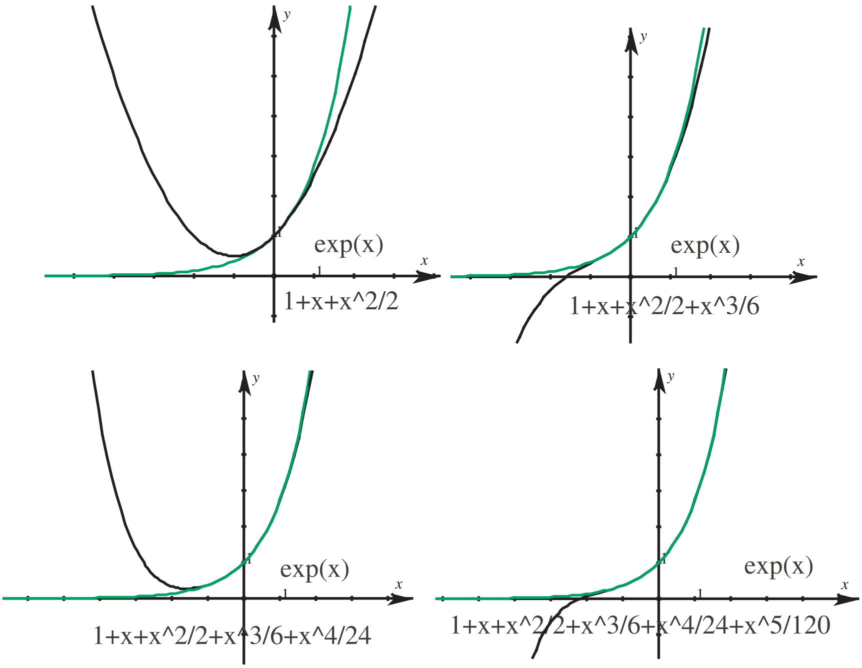
pour tout entier n.

La même méthode montre que

$$\mathrm{P}_{2n+1}(x) \leq \exp(x) \leq \mathrm{P}_{2n}(x)$$

pour tout $x < 0$ et tout entier naturel n.

Mais si on trace sur le même dessin les courbes représentatives des fonctions exp et P_n, on constate que ces courbes coïncident « visuellement » sur des intervalles de plus en plus grands :



On peut donc émettre la :

Conjecture 6.

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

6. Approximation des fonctions exponentielle et logarithme(11)

6.1. Approximation de la fonction exp

De la relation

$$\exp'(0) = \exp(0) = 1$$

et de la définition de la dérivée, on déduit que, si x est un nombre réel « petit », alors :

$$\exp(x) \simeq 1 + x.$$

D'autre part, si x est un nombre réel et n un entier naturel, on sait que :

$$\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

(11) Les résultats de ce paragraphe sont les versions « calculatoires » des constructions que j'avais proposées dans le chapitre 9 de [2] pour obtenir avec la version I de Cabri des courbes approchant les courbes représentatives des fonctions exp et ln. En raison de l'introduction dans la version II de Cabri de l'outil « Calculatrice », je n'avais pas reproduit ces résultats dans [3].

De ces deux relations, on peut émettre la conjecture que si n est assez grand pour que $\frac{x}{n}$ soit petit, alors

$$\exp(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

autrement dit la

Conjecture 7.

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Le fait que, pour $n = 2^k$, on retrouve le résultat de la remarque 2 du paragraphe 3.2 augmente la plausibilité de cette conjecture que l'on peut vérifier sur des exemples. Par exemple, dans le cas $x = 1$, on peut obtenir les valeurs suivantes de $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ que l'on comparera à la valeur 2,718 281 828 459 045 de e = exp(1) fournie par la calculatrice de Cabri :

n	u_n
10,0	2,593742460100002
100,0	2,704813829421528
1.000,0	2,716923932235594
10.000,0	2,718145926824926
100.000,0	2,718268237192297
1.000.000,0	2,718280469095753
10.000.000,0	2,718281694132082
100.000.000,0	2,718281798347358
1.000.000.000,0	2,718282052011560
10.000.000.000,0	2,718282053234788
100.000.000.000,0	2,718282053357110

(pour $n = 10^{12}$, la valeur fournie est 0).

Remarque. Il peut être intéressant d'étudier « finement » ce tableau.

6.2. Approximation de la fonction ln

De même des relations

$$\ln(1) = 0$$

et

$$\ln'(1) = 1,$$

on déduit que, si x est un nombre réel « voisin » de 1, alors :

$$\ln(x) \simeq x - 1.$$

D'autre part, si x est un nombre réel et n un entier naturel, on sait que :

$$\ln(x) = \left(\ln\left(\sqrt[n]{x}\right)\right)^n$$

De ces deux relations, on peut émettre la conjecture que si n est assez grand pour que $\sqrt[n]{x}$ soit proche de 1, alors

$$\ln(x) \simeq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

autrement dit la

Conjecture 8.

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

que l'on peut vérifier sur des exemples. Par exemple, dans le cas $x = 2$, on peut obtenir les valeurs suivantes de $v_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ que l'on comparera à la valeur 0,693 147 180 559 945 de ln(2) fournie par la calculatrice :

n	v_n
10,0	0,717734625362931
100,0	0,695555005671888
1.000,0	0,693387462580741
10.000,0	0,693171203764997
100.000,0	0,693149582819963
1.000.000,0	0,693147420793849
10.000.000,0	0,693147204078315
100.000.000,0	0,693147184094300
1.000.000.000,0	0,693147095276458
10.000.000.000,0	0,693147761410273
100.000.000.000,0	0,693156643194470

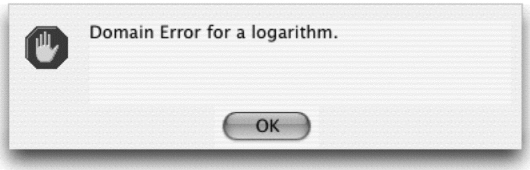
(pour $n = 10^{12}$, la valeur fournie est 0).

Remarque. Comme pour le précédent, il peut être intéressant d'étudier « finement » ce tableau.

7. Développements ultérieurs

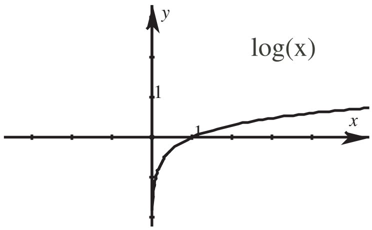
7.1. Logarithme décimal

La calculatrice de Cabri contient encore un bouton « log » avec lequel on obtient un symbole « log10 » et qui donne, comme pour le bouton « ln » un nombre pour des valeurs positives et un message d'erreur pour des valeurs négatives.

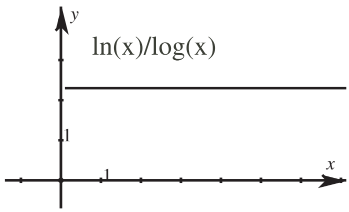


En particulier on obtient log (10) = 1.

On peut obtenir la courbe représentative de cette fonction log :



En dressant un tableau comme au premier paragraphe ou en traçant la courbe représentative de $\ln(x)/\log(x)$, on peut voir que cette fonction est constante :

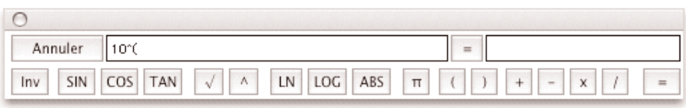


Le calcul de la constante ne présentant aucune difficulté, on en déduit que :

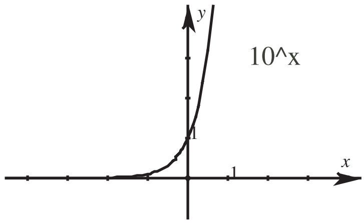
$$\boxed{\ln(x) = \ln(10) \times \log(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)}.}$$

7.2. Fonction k^x

Si on demande à l'outil « Calculatrice » la réciproque de la fonction log, on obtient :

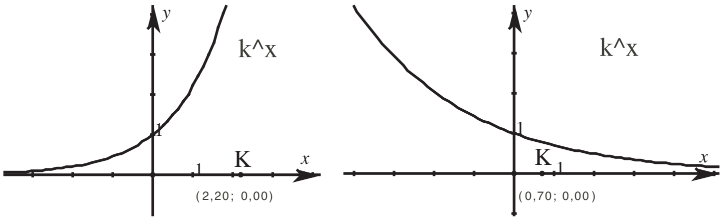


On a donc une nouvelle fonction $x \mapsto 10^x$ dont on peut demander la courbe représentative :

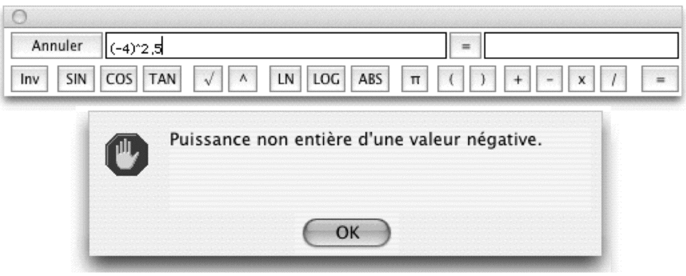


Pour Cabri, 10^x est donc définie pour des valeurs non entières de x !

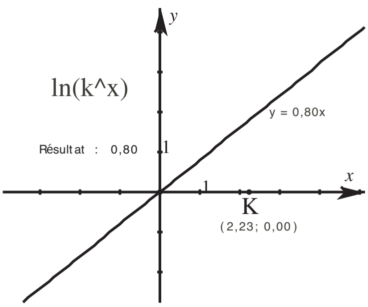
Pour essayer de généraliser à d'autres valeurs que 10, on peut avec l'outil « Coord ou équation » déterminer l'abscisse k d'un point K pris sur l'axe des abscisses et appliquer l'expression « k^x » au nombre k et aux axes. On obtient une fonction croissante si $k > 1$ et décroissante si $0 < k < 1$.



Par contre, on n'obtient rien si k est négatif, ce que l'on peut comprendre avec l'outil « Calculatrice » :



En demandant la courbe représentative de l'expression « ln(k^x) », on obtient une droite :



On aurait donc :

$$\ln(k^x) = \mathrm{C}\,x$$

pour une constante C et il est facile de voir que cette constante doit être égale à ln (k). La relation précédente est alors équivalente à :

$$\boxed{k^x = \exp(x \ln(k)).} \qquad (16)$$

De cette relation, on déduit que :

$$k^{x+x'} = k^x \cdot k^{x'}.$$

La fonction $x \mapsto k^x$ est donc la seule fonction continue sur **R** solution du système :

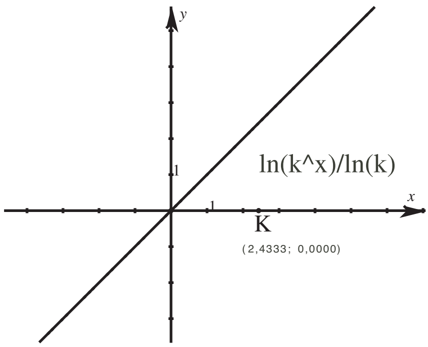
$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y), \\ f(1) = k. \end{cases}$$

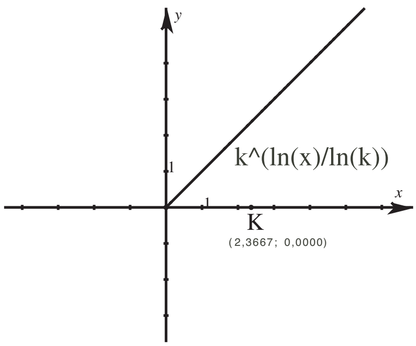
7.3. Logarithme de base *k*

La fonction $x \mapsto k^x$ étant strictement croissante, elle admet une fonction réciproque que l'on note $\log_k$:

$$\log_k(x) = y \Leftrightarrow x = k^y.$$

En traçant les courbes représentatives des expressions « ln(k^x)/ln(k) » et « k^(ln(x)/ln(k)) » :





on vérifie que

$$\log_k(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(k)}.$$

On en déduit facilement que $\log_k$ est la solution continue sur $\mathbf{R}^+$ du système :

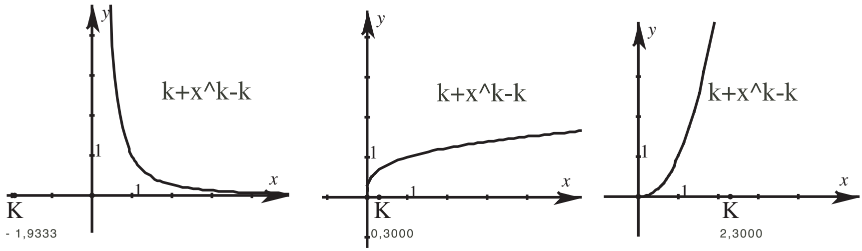
$$\begin{cases} f(xy) = f(x) + f(y), \\ f(k) = 1. \end{cases}$$

7.4. Fonction puissance

En échangeant dans (16) les rôles de k et x, on aurait :

$$x^k = \exp(k \ln(x)).$$

Pour tracer la courbe représentative de cette fonction, comme la technique précédente impose d'avoir la constante k avant la variable x, on l'appliquera à l'expression « k+x^k-k». On obtient des « allures » différentes suivant que k est négatif, compris entre 0 et 1 ou supérieur à 1 :



De plus on a la relation :

$$x^k \cdot x^{k'} = x^{k+k'},$$

mais aussi la relation

$$\left(x^k\right)^{k'} = x^{kk'},$$

d'où l'on déduit que la fonction réciproque de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto x^{1/k}$.

8. Conclusion

On voit qu'une étude expérimentale fournit beaucoup de pistes pour introduire les fonctions exponentielles et logarithmes : on peut par exemple partir de l'une des conjectures 2 à 8 et tout reconstruire. Il va sans dire que rien n'est démontré dans mes élucubrations (quoique…), mais pour cela je laisse la place à de vrais enseignants…

Bibliographie

[1] Roger Cuppens. Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre. Tome 1. Brochure de l'APMEP n° 104 (juin 1996).

[2] Roger Cuppens. Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre. Tome 2. Brochure de l'APMEP n° 105 (juin 1996).

[3] Roger Cuppens. Avec Cabri-Géomètre II, jouez … et faites de la géométrie. Brochure de l'APMEP n° 136 (janvier 2002).

[4] Roger Cuppens. Le continu et les moyens de calcul ou l'incalculable existe-t-il ? Bulletin de l'APMEP n° 422 (mai-juin 1999) p. 354-358.