Les nombres décimaux

Pierre Rey

Dans son article « *Quoi de neuf dans les nouveaux programmes de mathématique de l'école élémentaire* » paru dans le bulletin de l'APMEP n° 441 en septembre/octobre 2002 (et dans la brochure n° 159 « *Réflexions sur les programmes de mathématiques du collège et de l'école élémentaire* »), Jean-François BERGEAUT, parlant du nouveau programme de l'école élémentaire, écrit : « *c'est selon moi un programme ambitieux, cohérent et " révolutionnaire " sur certains de ses aspects, puisque au-delà des contenus et des compétences devant être acquises en fin de cycles, il apporte des éléments souvent très précis sur le geste professionnel de l'enseignant. Voici un programme qui prend ses responsabilités même si d'aucuns peuvent y voir une restriction de la liberté pédagogique de l'enseignant, voire une uniformisation des pratiques* ».

Nous allons illustrer cette opinion en commentant la progression imposée par le programme à partir du cycle 3 pour l'apprentissage du concept de nombre décimal et en voir les implications dans notre pratique professionnelle au collège.

Nous avons pu constater, notamment au cours de liaisons école/collège que la pratique la plus utilisée à l'école pour approcher le nombre décimal est de partir de mesures de longueurs et d'écrire rapidement 25 m et 12 cm sous la forme 25,12 m. Cette pratique participe de la vision qu'ont certains élèves du nombre décimal comme juxtaposition de deux nombres entiers qui seront traités indépendamment lors d'opérations. Le nouveau programme demande d'abandonner cette approche et d'en reporter le lien après l'étude du nombre décimal : « *L'écriture à virgule est* *présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales, le lien avec le système métrique étant fait ensuite*[(1)] ».

La progression qui est préconisée par les nouveaux programmes est de commencer par étudier les fractions « *Au cycle 3, les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres* »[(2)] « *utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : problèmes de partage, de mesure de longueurs ou d'aires, de repérage d'un point sur une droite* »[(3)]. Il est bien précisé de n'utiliser que des « fractions simples » et de n'envisager aucun calcul sur les fractions, ce travail étant celui du collège. Il est intéressant de noter que cette progression, fractions décimales puis nombres décimaux, correspond à l'introduction historique de ces nombres « *Les écritures à virgule prennent sens en étant mises en relation avec les fractions décimales, ce qui correspond à l'introduction historique des décimaux* »[(4)].

Ainsi la fraction est introduite comme un outil de fractionnement d'une grandeur unité, certains auteurs l'appellent **fraction-partage**. Elle permet alors de mesurer une longueur (pliage d'une bande de papier), de partager une grandeur unité (quadrillage, réseau de parallèles équidistantes, etc.) et elle permet le repérage de points sur une demi-droite graduée. Alors « $\frac{3}{4}$ *lu " trois quarts " est compris comme " trois fois un quart "* »[(5)] (unité partagé en quatre et prise de trois parts).

De même $\frac{7}{3}$ c'est 7 fois un tiers de l'unité ; il est nécessaire d'introduire des fractions supérieures à 1. C'est sur ces fractions que nous pourrons travailler la compétence attendue en fin de cycle 3 : « *écrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à* 1 »[(6)]. Ce travail va s'articuler autour de la représentation de $\frac{7}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ et du fait que 3 fois $\frac{1}{3}$ c'est l'unité $\frac{3}{3}$; alors dans $\frac{7}{3}$ il y a 2 fois $\frac{3}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Ce travail va permettre aussi d'« *encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs* »[(7)].

Après ce travail sur les fractions simples, on définit les fractions décimales comme des fractions particulières : leur dénominateur est 10, ou 100 ; elles correspondent à un partage de l'unité en 10 ou en 100. En recourant à des quadrillages appropriés, on peut introduire quelques fractions équivalentes, le programme se restreint à $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$; $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ ou $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$.

(1 Mathématiques. Document d'accompagnement. Articulation école collège.
(2) Id.
(3) Document d'application des programmes. Cycle 3.
(4) Id.
(5) Mathématiques. Document d'accompagnement. Articulation école collège.
(6) Document d'application des programmes. Cycle 3.
(7) Document d'application des programmes. Cycle 3.

Le travail fait sur l'écriture d'une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 va être reconduit :

$\frac{24}{10}$ c'est $\frac{20}{10}$ et $\frac{4}{10}$, donc 2 et $\frac{4}{10}$ que l'on va, **par convention, écrire 2,4** ;

$\frac{956}{10}$ c'est $\frac{950}{10}$ et $\frac{6}{10}$, donc 95 et $\frac{6}{10}$ que l'on va, **par convention, écrire 95,6** ;

$\frac{258}{100}$ c'est $\frac{200}{100}$ et $\frac{58}{100}$, donc 2 et $\frac{58}{100}$ que l'on va, **par convention, écrire 2,58**.

L'usage de l'oral est primordial et doit être sans cesse repris à l'école comme au collège :

$\frac{24}{10}$ se dit « vingt quatre dixièmes » et 2,4 se dit « deux et quatre dixièmes » ;

$\frac{258}{100}$ se dit « deux cent cinquante huit centièmes » et 2,58 se dit « deux et cinquante huit centièmes ».

La familiarisation avec le nombre décimal passe par cet apprentissage oral, il permet d'éviter l'obstacle $\frac{4}{10} = 4,10$ (puis $\frac{7}{3} = 7,3$), il permet d'expliquer les retenues dans les opérations, il permet de faire apparaître la présence obligatoire d'un chiffre des unités (et ainsi éviter la fausse « symétrie » du vocabulaire du nombre par rapport à la virgule et la confusion dizaine/dixième), il permet d'éviter l'automatisme entier + fraction = entier « virgule » le numérateur de la fraction, …

L'égalité $2 + \frac{58}{100} = 2,58$ sera bien sûr établie, mais en revenant souvent à l'énoncé oral.

Cette écriture à virgule permet de prolonger les principes de la numération de position vus sur les nombres entiers :

« *Les écritures à virgule prennent sens en étant mises en relation avec les fractions décimales […]. Cela permet de comprendre que la valeur d'un chiffre est dix fois plus petite que celle du chiffre écrit immédiatement à sa gauche et dix fois plus grande que celle du chiffre qui est écrit immédiatement à sa droite (ce qui est vrai aussi bien pour la partie entière que pour la partie décimale)* »(8).

On pourra alors exploiter des exemples comme $\frac{503}{100}$ c'est 5 et $\frac{3}{100}$ que l'on va, par convention, écrire 5,03 où il y a nécessité du zéro comme chiffre des dixièmes.

On va établir que $\frac{10}{100}$ c'est $\frac{1}{10}$, donc que $\frac{50}{100}$ c'est 5 fois $\frac{10}{100}$ donc $\frac{5}{10}$. Ce qui va permettre d'aboutir à la décomposition de $\frac{258}{100}$: $\frac{258}{100}$ c'est $\frac{250}{100}$ et $\frac{8}{100}$, mais

(8) Document d'application des programmes. Cycle 3.

$\frac{250}{100}$ c'est 25 fois $\frac{10}{100}$ donc 25 fois $\frac{1}{10}$ donc $\frac{25}{10}$. Or $\frac{25}{10}$ c'est $\frac{20}{10}$ et $\frac{5}{10}$, mais $\frac{20}{10}$ c'est 2 fois $\frac{10}{10}$ soit 2 unités. On a alors $\frac{258}{100}$ c'est 2 unités et $\frac{5}{10}$ et $\frac{8}{100}$ que l'on énoncera oralement avant d'écrire $2 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100}$.

Par la suite on introduit les écritures $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{1}{100} = 0{,}01$ et on aborde le travail de décomposition avec ces différentes écritures :

$56{,}43 = (5 \times 10) + 6 + \left(4 \times \frac{1}{10}\right) + \left(3 \times \frac{1}{100}\right)$,

$56{,}43 = (5 \times 10) + 6 + (4 \times 0{,}1) + (3 \times 0{,}01)$.

C'est ainsi que les nouveaux programmes mettent en place le nombre décimal au cycle 3 et que les professeurs de sixième doivent appréhender les connaissances de leurs élèves. Le tableau numérique de position, s'il n'a pas à disparaître, n'est plus le passage obligé dans l'apprentissage du nombre décimal.

« *La maîtrise des nombres décimaux est loin d'être assurée au sortir de l'école primaire. Le sens même de l'écriture à virgule (valeur de chaque chiffre en fonction de sa position) est repris en sixième, en particulier pour assurer une bonne compréhension des procédures de comparaison, d'encadrement et d'intercalation. Dans le prolongement du travail effectué à l'école primaire, plusieurs aspects sont à consolider concernant les nombres décimaux :*

– *considérer l'écriture à virgule comme une autre écriture des fractions décimales (sens de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ *, …) ;*
– *comprendre que les décimaux sont un bon outil pour mesurer des grandeurs, pour repérer des points sur la droite numérique (aspect fondamental) pour la comparaison, l'encadrement, les approximations, … ;*
– *utiliser les décimaux pour approcher le quotient de deux entiers.* »[9].

Outre les compétences opératoires maintenant à la charge des professeurs de collège (multiplication des décimaux, technique de division d'un décimal par un entier puis par un décimal en cinquième), le professeur de sixième doit enseigner ce que certains auteurs appellent la **fraction-quotient** : $\frac{7}{3}$ est la solution de l'équation $3 \times \ldots = 7$ c'est-à-dire le quotient de 7 par 3. Il lui faudra concilier ces deux approches : 1 partagé en 3 pris 7 fois, c'est la même chose que 7 partagé en 3 ; ou encore 7 fois le tiers de 1, c'est aussi le tiers de 7.

Pour en revenir aux questions de mesure de longueurs dans le système métrique, les nouveaux programmes préconisent évidemment de faire le lien ensuite avec ces mesures de grandeurs.

(9) Mathématiques. Document d'accompagnement. Articulation école collège.

« *Dans le cas où une grandeur est exprimée à l'aide des unités usuelles, il s'agit de mettre en relation des désignations telles que 3 m 25 cm et 3,25 m ou 3 m 5 cm et 3,05 m ou encore 2 h 30 min et 2,5 h.* »[10]

Un des objectifs de l'école primaire (pour les prix, les longueurs, les masses, les contenances et les durées) est d'aider les élèves à faire le lien entre l'écriture « complexe » d'une mesure qui utilise plusieurs unités (souvent deux) et l'écriture à l'aide d'un nombre décimal qui n'utilise qu'une seule unité.

Ainsi 3 m 8 cm = 3,08 m. Cet exemple est intéressant car il permet de comprendre (mieux qu'une égalité comme 3 m 18 cm = 3,18 m) les fondements de cette égalité.

En effet, si on revient au système métrique, 1 cm = $\frac{1}{100}$ m donc 8 cm = $\frac{8}{100}$ m et

3 m 8 cm = 3 m + $\frac{8}{100}$ m = 3,08 m.

Il est nécessaire d'établir ce lien entre valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture décimale et relations entre unités de mesure pour comprendre l'égalité entre les deux écritures.

Au collège, les élèves auront à mettre en œuvre ces mêmes liens dans des cas plus complexes, comme celui des aires.

Là encore, le travail de justification (aidé par l'expression orale des relations et par des « réalisations concrètes ») permettra d'éclairer les phénomènes beaucoup mieux que ne le fait la simple manipulation de tableaux de conversion, souvent utilisée comme un « truc magique ».

Un autre cas est intéressant à étudier et de plus en plus présent dans notre vie quotidienne : c'est celui de l'expression décimale des durées.

Si on se limite à des cas très simples, l'expression orale suffit à trouver l'écriture décimale : 2 h 30 min peut se dire 2 h et demie, ce qui peut suffire à certains élèves pour comprendre l'écriture 2,5 h (à condition toutefois que l'égalité $0{,}5 = \frac{1}{2}$ soit bien assurée).

La situation est plus complexe s'il s'agit d'exprimer 4 h 15 min sous forme décimale et beaucoup ne résisteront pas à écrire 4,15 h ! Il faut en effet comprendre que 15 min c'est $\frac{1}{4}$ h et que $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$, ce qui permet d'arriver à l'écriture correcte 4,25 h.

Le cas général est plus complexe et relève du collège puisque, par exemple, pour 4 h 20 min, il faut comprendre que 20 min = $\frac{20}{60}$ h = $\frac{1}{3}$ h qui ne peut être qu'approchée par un nombre décimal, d'où 4 h 20 min ≈ 4,33 h[11].

Le lien entre la fraction et la division n'est pas fait au cycle 3, il sera conduit à partir de la nouvelle conception de la fraction comme quotient au cours de la classe de sixième.

(10) Document d'application des programmes. Cycle 3.

(11) Roland Charnay. Site MIAM, académie Aix-Marseille.