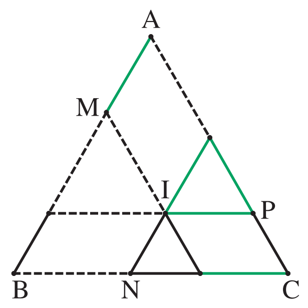
Remarques sur l'article précédent

La proposition de cet article a « interpellé » Bernard Parzysz qui s'est intéressé il y a quelque temps à ce type de graphique. Voici ses remarques. Par ailleurs, ce type de représentation et le point de vue de Bernard se retrouvent dans l'« ancienne » brochure éditée par l'A.P.M.E.P. n° 27, toujours en vente, : « Pour une mathématique vivante en seconde ».
Sa contribution est également suivie d'une invitation à rêver proposée par Bruno Alaplantive.

Soit un triangle équilatéral ABC, et un point I intérieur au triangle.
La parallèle à (CA) menée par I coupe [AB] en M.
La parallèle à (AB) menée par I coupe [BC] en M.
La parallèle à (BC) menée par I coupe [CA] en M.
Où placer le point I pour que la longueur IM + IN + IP soit minimum ?



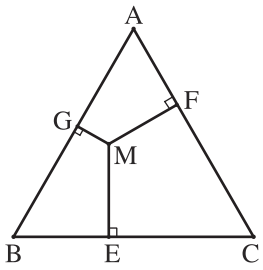
Si on utilise une même typographie pour tracer les segments ayant la même longueur, on peut constater :
1° qu'on en n'a besoin que de 3 (par ex. plein, tiret et vert) ;
2° que la longueur demandée correspond à celle des côtés du triangle ABC (« plein + tiret + vert », si on ose dire), et qu'elle est donc constante.

Cette constatation justifie « à la chinoise » le principe des graphiques triangulaires utilisés en statistique descriptive. Le report des coordonnées des unités statistiques (pourcentages) à partir des axes s'effectue en effet parallèlement aux côtés du triangle, et non pas perpendiculairement à ces côtés. Bien sûr, il y a un rapport simple (quoique irrationnel) entre la somme des distances de I aux côtés du triangle et la somme des distances IM + IN + IP, mais il ne me semble pas utile, comme j'ai remarqué que le font certains manuels, de passer par la projection pour justifier le principe de ce type de graphique.

Rêvons un peu ; si on avait le temps…

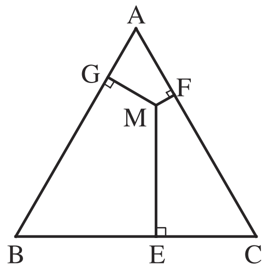
À l'ordinateur

Si on a l'opportunité de faire cette activité en salle informatique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (ici Cabri), les élèves constateront immédiatement la constance de la somme des trois longueurs (figures 1 et 2). Ils devraient penser d'eux-mêmes à approcher M d'un côté et à le placer dessus (figure 3), voire à le faire sortir du triangle… Peut-être un élève aura-t-il l'envie de placer le point M sur A ? (figure 4) ; mais il sera sûrement nécessaire d'analyser et de traduire cette dernière figure par la conjecture que la somme des trois longueurs est égale à la hauteur du triangle équilatéral.



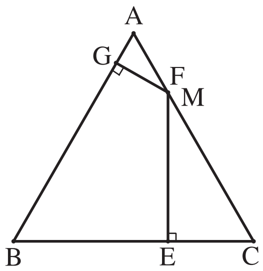
MG + ME + MF
= 1,51 cm + 3,86 cm + 3,29 cm
= 8,66 cm

Figure 1



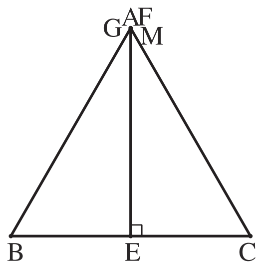
MG + ME + MF
= 2,33 cm + 5,48 cm + 0,86 cm
= 8,66 cm

Figure 2



MG + ME + MF
= 2,47 cm + 6,19 cm + 0,00 cm
= 8,66 cm

Figure 3



MG + ME + MF
= 0,00 cm + 8,65 cm + 0,00 cm
= 8,66 cm

Figure 4

Quelques précisions et remarques sur ces figures.
Le triangle ABC initial fait 10 cm de côté. Les longueurs et leur somme sont obtenues grâce au logiciel. Tant que le point M reste sagement à l'intérieur, la somme annoncée demeure égale à 8,66 cm… Pourtant à regarder de plus près les arrondis de la figure 2, il faudra expliquer pourquoi la somme calculée par le logiciel n'est pas 8,67 cm. Cas contraire à la figure 3, sans oublier le splendide 8,65 = 8,66 de la figure 4 !!!
Indiscutablement, voilà un appel à une discussion riche.

À main levée

Voici une autre démonstration. Elle peut très bien n'être indiquée aux élèves qu'en complément de celle des aires, pour montrer la diversité des approches et des réponses à une même question, faire voir la richesse des mathématiques. « Totalement géométrique » en ce sens qu'elle n'utilise pas les aires, ni aucun calcul, elle nécessiterait, vue seule, d'avoir conjecturé que la somme des longueurs est égale à la hauteur du triangle. Son fil conducteur est simplement de rabouter les segments issus de M. La solution m'est venue de l'étude initiale du cas particulier où M est situé sur un côté, équivalent à la figure 3 mais *dessiné initialement à main levée*…

La parallèle à [AC] qui passe par M étant tracée, le triangle RDB rend ce cas particulier. Il suffit de dessiner le triangle équilatéral RMS, puis de substituer la hauteur [RN] à [MG] (figures 5 et 6). On recommence en translatant [MF] en [RL] qu’on échange alors par [AP] et le tour est joué (figure 7) :

$$ME + MG + MF = ME + RN + AP = AH.$$

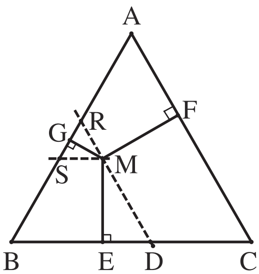


Figure 5

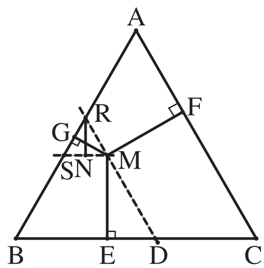


Figure 6

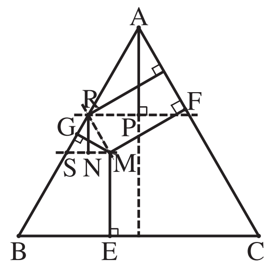
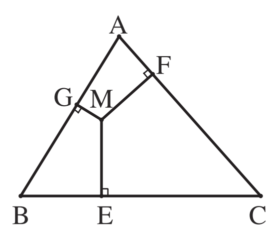


Figure 7

 **sur le gâteau : cas du triangle acutangle**



Dans un triangle dont tous les angles sont aigus (acutangle), les projetés orthogonaux de M sont bien sur les côtés.

Que dire de ME + MG + MF ? Est-elle encore constante ou alors comment faut-il placer M afin que cette somme soit minimale, voire maximale, … ?

Il est nécessaire cette fois-ci de revenir à l’aire du triangle afin d’ordonner les hauteurs relativement aux côtés dont elles sont issues. Le « calque » exact de la figure 7, obtenu sur Cabri en redéfinissant le point A comme libre(2) et en le déplaçant pour obtenir un triangle acutangle, est donné sur la figure 8.

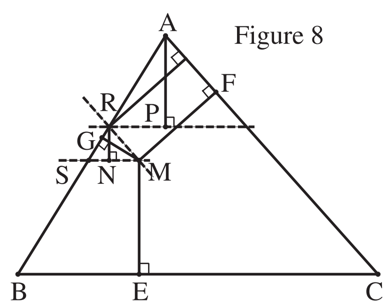


Figure 8

On peut toujours supposer AB ≤ AC ≤ BC. Alors

$$ME + MG + MF \geq ME + RN + AP = AH.$$

Finalement, dans un triangle acutangle,

> la somme des distances d’un point intérieur à ses projetés orthogonaux sur les côtés est comprise entre la plus petite des trois hauteurs du triangle et la plus grande.

(2) et non plus comme l’un des deux points d’intersection du cercle (B,BC) et du cercle (C,CB).

Les programmes de sixième, mis en place à la rentrée 2005, n'apportent pas de changements fondamentaux du point de vue des « grands équilibres » et du « niveau général d'exigence ». Un des objectifs essentiels est d'assurer une meilleure continuité des apprentissages entre l'école primaire et le collège, en particulier dans le domaine numérique. En effet, des modifications significatives ont été apportées dans l'apprentissage des nombres décimaux et fractionnaires au cycle 3 et les enseignants de collège doivent prendre en compte ces changements.

Les professeurs de mathématiques qui ont quelques années d'expérience ont pu assister, au fil des nouveaux programmes, à une évolution des compétences maîtrisées par les élèves entrant en sixième, dans le domaine des nombres décimaux. Ainsi, l'apprentissage de la multiplication et de la division des nombres avec virgule relève du collège depuis quelques années.

Avec les derniers programmes de l'école primaire, le point fort se situe au niveau de la notion même de nombre décimal et de l'écriture décimale.

L'article de Pierre Rey, amendé par la commission collège, met en évidence, de façon claire et précise, cette évolution vers l'écriture décimale telle qu'elle est enseignée aux élèves que nous accueillons en sixième.

À ce titre, il constitue une aide précieuse à la compréhension de ces nouveaux programmes pour tout enseignant de sixième.