Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes, … Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
72 quai de la Loire,
75019 Paris.

Nouvel énoncé

Énoncé nº 316 (Mireille GENIN, 44-Nantes)

D, E et F sont les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle ABC. Montrer que le triangle DEF est rectangle si et seulement si l'un des angles du triangle ABC vaut 120°.

Solutions

Énoncé nº 307 (François DUC, 84-Orange)

On veut pouvoir peser avec une balance Roberval n'importe quel objet de masse entière, inférieure ou égale à M grammes, en disposant uniquement de n poids dont la somme des masses ne dépasse pas M. Exprimer en fonction de M la plus petite valeur possible de n, et indiquer les masses des poids correspondants.

SOLUTION

J'ai reçu des solutions de Richard BECZKOWSKI (71-Chalon sur Saône), René BENOIT (91-Palaiseau), Christine FENOGLIO (69-Lyon), J.C. LAUGIER (17-Rochefort), René MANZONI (76-Le Havre), Annie PERROT (75-Paris), Pierre SAMUEL (92-Bourg la Reine) et André STEF (54-Nancy), mais tout le monde n'a pas vu que chaque poids peut être mis soit sur le plateau de droite, soit sur le plateau de gauche de la balance. De sorte qu'avec n poids, de masses a_1, a_2, …, a_n, on peut peser les objets de masse : $|\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n|$, avec $\varepsilon_k = 1$ si on met le k-ième poids sur le plateau de droite, $\varepsilon_k = -1$ si l'on met le k-ième poids sur le plateau de gauche et $\varepsilon_k = 0$ si l'on n'utilise pas le k-ième poids. Si la somme est positive, il faudra mettre l'objet à peser sur le plateau de gauche, sinon il faudra le mettre sur le plateau de droite.

Il est clair qu'on obtient ainsi au plus 3^n sommes distinctes, dont 0, et que si la somme s est obtenue, la somme $-s$ l'est également. De sorte qu'avec n poids, on peut peser au plus $(3^n - 1)/2$ masses distinctes strictement positives. Si donc $(3^n - 1)/2 < \mathrm{M} \leq (3^{n+1} - 1)/2$, il faudra au minimum $(n + 1)$ poids. Pour peser toutes les masses entre 1 et $(3^n - 1)/2$, il suffit de prendre des poids de masse 1, 3, 9, …, 3^{n-1} : cela se prouve par récurrence sur n. Si tous les entiers entre $-(3^n - 1)/2$ et $(3^n - 1)/2$ peuvent s'écrire $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 3 + \ldots + \varepsilon_n 3^{n-1}$ (ce qui est manifestement vrai pour $n = 1$), tout entier k entre $-(3^{n+1} - 1)/2$ et $(3^{n+1} - 1)/2$ peut s'écrire

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 3 + \ldots + \varepsilon_n 3^{n-1} + \varepsilon_{n+1} 3^n,$$

avec $\varepsilon_{n+1} = +1$ si $k > (3^n - 1)/2$, $\varepsilon_{n+1} = -1$ si $k < -(3^n - 1)/2$, $\varepsilon_{n+1} = 0$ sinon.

Pour peser toutes les masses entre 1 et M, il suffit de remplacer la dernière masse 3^n par : $m = \mathrm{M} - (3^n - 1)/2$. On n'a d'ailleurs pas le choix : un poids plus léger ne permettrait pas d'atteindre la masse M, un poids plus lourd ne respecterait pas l'hypothèse de l'énoncé que la somme des masses ne dépasse pas M. Le raisonnement ci-dessus s'applique en remplaçant 3^n par m, et permet de conclure que le nombre cherché est : $1 + \mathrm{E}(\log_3(2\mathrm{M} + 1))$.

Un problème voisin, classique, consiste à trouver parmi 3^n pièces, dont une seule est plus légère, laquelle est plus légère, avec n pesées sur une balance Roberval. Si une seule de M pièces est différente des autres, mais soit plus légère soit plus lourde, comment faut-il s'y prendre pour la déterminer avec le minimum de pesées ?