Exercices de ci, de là

Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.

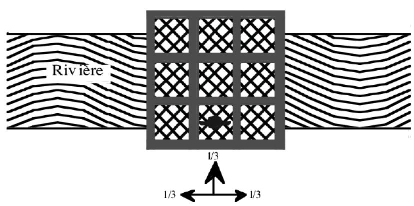
Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :
APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices :

Exercice 466-1 (Christian Planchon – Marvejols)

L'ivrogne



Pour rentrer chez lui, Don Garcia doit traverser un pont sans balustrade, constitué de trois rangées de trois dalles ; ses amis l'ont laissé sur la dalle centrale de la première rangée. Saoul comme il est, s'il tombe à l'eau, c'est la noyade assurée. Les yeux rivés sur l'autre berge, il s'élance. Titubant, il a autant de chance de faire un écart à gauche qu'un écart à droite ou qu'un pas en avant.
L'amplitude de ses écarts et de ses pas étant égale aux côtés des dalles carrées, quelle est la probabilité pour qu'il traverse ?

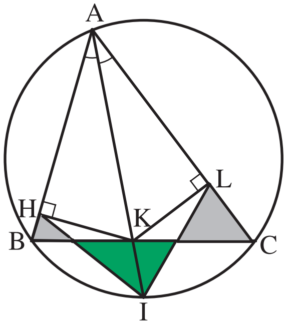
Exercice 466-2 (Stéphan Manganelli – Carpentras)

Les nombres métaux

Enseignant en TS, j'ai découvert (tout seul !) en début d'année, lorsque l'on pratiquait, avec mes élèves, le théorème des fonctions continues strictement monotones (bijections) pour résoudre par approche numérique (dichotomie, balayage) certaines équations, le résultat suivant que je vous propose :
On connaît très bien le nombre d'or, solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.
On connaît un peu moins le nombre d'argent, solution de $x^3 = x^2 + x + 1$.
On connaît très peu le nombre de bronze, solution positive de $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$.
Et je m'arrête là pour la suite de ces nombres métaux … dont j'ai conjecturé et montré la convergence vers 2 ! (ce n'est pas très dur, les outils de terminale suffisent).

Solutions d'exercices

Exercice 461-4 (proposé par Gérard Macombe, IPR à Rennes).



ABC *est un triangle inscrit dans un cercle. La bissectrice de l'angle* $\widehat{\mathrm{BAC}}$ *coupe le cercle en* I *et* [BC] *en* K. H *et* L *sont les projetés orthogonaux de* K *sur* (AB) *et* (AC).
Comparer l'aire du triangle vert à la somme des aires des deux triangles gris.

Miguel Amengual Covas nous signale que c'est le problème n° 2 de la 28ème olympiade internationale de mathématiques à Cuba en 1987.

Cet exercice a fait l'objet de réponses nombreuses et variées. Il fait donc aussi l'objet d'une présentation un peu plus longue qu'à l'habitude dans cette rubrique.

Solution de Richard Beczkowski (*Dijon*)

Appelons $2a$ la mesure en radians de l'angle en A du triangle ABC. L'aire de ce triangle est $\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin 2a$.
Le quadrilatère AHIL est réunion de deux triangles égaux AHI et ALI.

Son aire est $\mathrm{AH}\times\mathrm{AI}\times\sin a=\mathrm{AK}\times\cos a\times\mathrm{AI}\times\sin a=\frac{1}{2}\mathrm{AK}\times\mathrm{AI}\times\sin 2a.$

Les triangles ABI et AKC sont semblables car leurs angles sont égaux :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AI}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

car (AI) est bissectrice en A de ABC et

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CK}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}},\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)$$

car ces derniers sont des angles inscrits qui interceptent le même arc de corde [AB].

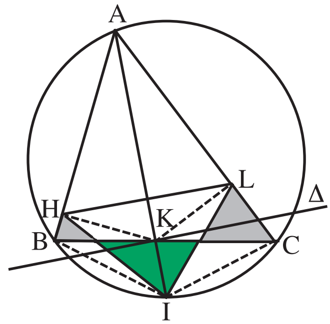
Cette remarque permet d'affirmer que $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AK}}=\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AC}}$ et par conséquent

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}=\mathrm{AK}\times\mathrm{AI}.$$

Le triangle ABC et le quadrilatère AHIL ont même aire.
Il en découle que l'aire du triangle vert est égale à la somme des aires des deux triangles gris.

Solution de Michel Tanguy (*Quimper*)

Démontrer que les aires sont égales c'est démontrer que l'aire du triangle ABC est aussi celle du cerf-volant AHIL.



Si θ note l'angle $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)$, α l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{KC}\right)$ avec $\vec{u}$ vecteur dirigeant Δ, en se plaçant dans un repère orthonormé direct $\left(K,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que KL = 1, on a alors : A de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$, C de coordonnées $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)};\dfrac{\sin\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}\right)$, B de coordonnées $\left(\dfrac{-\cos\alpha}{\cos(\theta+\alpha)};\dfrac{-\sin\alpha}{\cos(\theta+\alpha)}\right)$.

Le triangle ABC a ainsi comme aire

$$\mathrm{A}_1=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\times h=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos(\theta-\alpha)}+\frac{1}{\cos(\theta+\alpha)}\right)\times\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}$$

en évaluant la hauteur par le calcul de la distance de A à la droite (BC) d'équation $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$.

[bon, on pourrait remarquer que cette hauteur fait un angle α avec (AK) mais comme je suis parti dans les calculs…]

Je vais calculer l'aire du cerf-volant en cherchant les coordonnées de I. En remarquant que $\left(\overrightarrow{CK},\overrightarrow{CI}\right)=\theta$, l'équation de (CI) est

$$\left(x-\frac{\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}\right)\sin(\theta+\alpha)-\left(y-\frac{\sin\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}\right)\cos(\theta+\alpha)=0$$

et donc I a pour ordonnée

$$y_{\mathrm{I}}=\frac{\sin\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}-\frac{\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta+\alpha)}$$

et ainsi j'évalue

$$\mathrm{AI}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta+\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}$$

que je réduis au même dénominateur ; et avec un peu de trigo, j'obtiens :

$$\mathrm{AI}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\theta\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta+\alpha)}$$

et donc l'aire du cerf-volant est $\dfrac{1}{2}\mathrm{AI}\times\mathrm{HL}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AI}\times2\cos\theta$.

Et si je remarque que

$$\left(\frac{1}{\cos(\theta-\alpha)}+\frac{1}{\cos(\theta+\alpha)}\right)=\frac{2\cos\theta\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta+\alpha)}$$

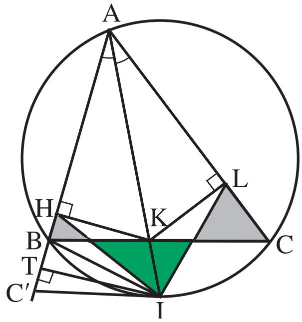
je peux constater que $A_1 = AI \times \cos\theta$, ce que l'on souhaitait.

Solution de Gérard Macombe (*Rennes*)

Démontrer que les aires sont égales c'est démontrer que l'aire du triangle ABC est aussi celle du quadrilatère AHIL.

Première étape : J'appelle h la longueur KH (hauteur dans le triangle ABK).

$$2\ \text{aire(ABC)} = h\ (\text{AB} + \text{AC}) \qquad (1)$$



Je note C′ le symétrique de C par rapport à (AI) [(AI) axe de symétrie pour l'angle ABC].
AC = AC′ ≠ AB si ABC est un triangle quelconque.
IC′ = IC par symétrie et IC = IB (cordes correspondants à des angles égaux).
Donc BIC′ est isocèle et T est le milieu de [BC′].
Conclusion : AB + AC = AB + AC′ = 2AT.

Deuxième étape : En reprenant (1), on a :

$$2\ \text{aire(ABC)} = 2\,h \cdot \text{AT}.$$

Or $\text{AT} = \text{AH} \times \dfrac{\text{AI}}{\text{AK}}$ (Homothétie ou Théorème de Thalès). Donc

$$\text{Aire(ABC)} = h \times \text{AH} \times \frac{\text{AI}}{\text{AK}} = \text{AH} \times \left(h \times \frac{\text{AI}}{\text{AK}}\right) = \text{AH} \times \text{IT}.$$

Soit aire(ABC) = 2 Aire(AHI) = aire(AHIL).

Une belle solution de Mireille Bournaud (*Vitry-Sur-Seine*) a donné lieu à une animation réalisée par François Colmez (Antony) que vous pouvez voir sur le site de l'APMEP.

Une autre solution de Bruno Alaplantive (*St Jean du Falga*) est également présentée sous la forme d'une animation que vous pouvez aussi voir sur le site de l'APMEP.

Autres solutions de Georges Lion (Wallis), Raymond Raynaud (Digne), Christian Planchon (Marvejols), Pascal Bray, et une solution graphique de Nicolas Patrois avec un logiciel de géométrie dynamique.