Préambule à l'article suivant

L'article qui suit, *Un logiciel utilisant le calcul formel pour le lycée*, est proposé par une équipe IREM-INRP de Rennes. Il présente l'utilisation d'un logiciel de calcul formel pour aider les élèves à résoudre des problèmes.

La Commission du Bulletin a été intéressée par la démarche des auteurs. Face aux difficultés que rencontre l'enseignement des mathématiques, ils mènent une recherche d'envergure pour les faire comprendre au plus grand nombre. Leur volonté affirmée d'intégrer la technologie à ces apprentissages répond au désir institutionnel et à une évidente nécessité sociale et professionnelle.

Mais la commission s'interroge sur le contraste entre la faible capacité théorique et technique des élèves concernés et les possibilités qu'offre le logiciel. Des élèves déconcertés par la résolution d'une équation du premier degré sont-ils réellement capables d'interpréter l'évolution de graphiques dépendant de paramètres ? *Sont-ils en mesure d'interroger efficacement le logiciel ?*

L'usage d'un logiciel sophistiqué ne conduit-il pas à déplacer vers la technique des problèmes conceptuels et de calcul fondamentaux, sans faire progresser les élèves dans ces domaines ?

Est-il devenu impossible d'amener des élèves à raisonner à partir des données, laissant les outils informatiques à des situations complexes où ils jouent pleinement leur rôle ?

Ces interrogations à propos des exemples présentés posent des questions de fond concernant la place de tels logiciels dans l'enseignement des mathématiques :

– L'informatique peut-elle voler au secours des déficiences conceptuelles et de calcul des élèves?
– Est-ce son emploi légitime?
– Ne vaut-il pas mieux traiter directement ces difficultés, laissant les outils informatiques donner leur pleine mesure là où ils sont performants?
– Et ces performances ne sont-elles pas *en corrélation directe* avec l'aptitude des élèves à poser de bonnes questions, donc avec leur compréhension mathématique ?

La commission invite les lecteurs à engager le débat sur le rôle que peuvent ou non jouer les logiciels (dont ceux de calcul formel) dans l'enseignement des mathématiques au lycée.

Un logiciel utilisant le calcul formel pour le lycée

Bernard Le Feuvre, Xavier Meyrier,
Pascal Vincent & Jean Baptiste Lagrange

Résumé.

Le calcul formel est peu utilisé et exploité au lycée. Dans les programmes et instructions, son statut reste incertain. Les possibilités qu'offre le calcul formel ne sont pas clairement identifiées et les enseignants sont souvent réticents à les exploiter. « Comment intégrer des outils de calcul formel dans un cours de mathématiques au lycée ? ». Notre groupe INRP-IREM de Rennes travaille depuis plusieurs années sur cette problématique et a conçu le logiciel Casyopée, qui utilise des possibilités du calcul formel. Suite à des expérimentations dans des classes de lycée, nous faisons évoluer ce logiciel pour faciliter son utilisation par les élèves et les professeurs. Dans cet article nous précisons comment une réflexion sur le calcul formel nous a conduit à développer Casyopée. À travers des exemples d'utilisation, nous montrons comment un logiciel de ce type peut contribuer à l'activité mathématique des élèves et à leur compréhension des notions.

Le nom Casyopée a été choisi pour ***CA**lcul **SY**mbolique **O**ffrant des **P**ossibilités pour l'**É**lève et l'**E**nseignant*.

Partie 1. Le calcul formel au lycée

Le calcul symbolique (ou formel) sur ordinateur est aujourd'hui un secteur en développement important. Les logiciels disponibles offrent aux chercheurs et professionnels utilisateurs des mathématiques la possibilité de mener de façon relativement sûre des calculs et démonstrations qui seraient d'un coût rédhibitoire sans l'ordinateur. Les élèves des lycées sont concernés par cette évolution : les calculatrices récentes offrent à des degrés divers des fonctionnalités de calcul formel, des logiciels tels que DERIVE ou Maple peuvent exister dans les lycées et des sites Internet permettent du « calcul formel en ligne ».

L'enseignement des mathématiques connaît des bouleversements profonds liés à ce contexte. Comme les autres disciplines, les mathématiques doivent aujourd'hui démontrer leur valeur formative. Les représentations que les jeunes et les citoyens se font des mathématiques privilégient souvent les aspects calculatoires de cette discipline et minimisent sa dimension d'explication du monde et de formation de l'esprit. À une époque où, grâce aux logiciels symboliques, les calculs semblent pouvoir être pris en charge par des machines, un enseignement qui n'évoluerait pas verrait sa valeur formative fortement contestée.

De nouvelles approches se font jour, qui donnent plus de place à l'expérimentation et à la simulation, notamment grâce à l'ordinateur. Les instructions officielles recommandent l'usage du tableur et de logiciels de géométrie dynamique, ce qui montre que, dans les domaines numérique et géométrique, ces approches sont aujourd'hui reconnues. En revanche, bien que des recherches menées au cours des

dix dernières années aient montré l'intérêt que peut présenter leur usage dans l'enseignement, les logiciels de calcul formel ne semblent pas pouvoir se faire reconnaître aussi clairement et les instructions officielles demandent essentiellement aux professeurs de veiller aux usages possibles par les élèves à leur propre initiative(1).
L'utilisation du calcul formel entre en effet en conflit avec une tradition de l'enseignement très marquée par l'usage du papier et du crayon, spécialement dans le domaine de l'algèbre et de l'analyse. L'enseignement de ces domaines est ainsi dans une contradiction : la tradition le conduit à s'appuyer fortement sur le calcul manuel, à y consacrer du temps et de l'énergie alors que ce calcul perd sa légitimité sociale du fait de la capacité des machines à le prendre en charge.
Notre hypothèse est qu'une évolution dans ce domaine ne peut venir des logiciels existants. Des situations d'utilisation de ces logiciels ont été produites et expérimentées par la recherche en didactique. Elles trouvent leurs limites dans le fait que ces logiciels ont été conçus pour des tâches très générales et indépendamment des connaissances mathématiques de l'utilisateur. Il n'est donc guère possible à l'enseignant d'organiser de véritables situations d'apprentissage, et l'élève est vite perdu dans les multiples fonctionnalités qui lui sont offertes et qu'il peut généralement très difficilement relier à ses connaissances mathématiques(2).

Partie 2. Le projet Casyopée

Notre équipe, INRP-IREM de Rennes a produit les spécifications de l'environnement *Casyopée*, un logiciel pour l'apprentissage de l'algèbre et de l'analyse au lycée. L'environnement fait appel à un « noyau de calcul formel » pour fournir à l'élève un environnement de travail adapté au domaine d'apprentissage, notamment des primitives générales de traitement des expressions algébriques (développement, factorisation, …), des aides à l'organisation des objets mathématiques intervenant dans la résolution d'un problème ainsi qu'une assistance à la preuve. Il permet au professeur de préparer et de suivre le travail de l'élève.
Différentes maquettes ont été développées et testées auprès d'élèves. Dans la plus récente, nous nous sommes attachés à explorer une nouvelle forme d'activité algébrique. Alors que le calcul en papier crayon et les logiciels standards considèrent les expressions de façon isolée, l'environnement que nous développons organise en réseau les différentes expressions intervenant dans la résolution d'un problème. L'ordinateur peut facilement mettre à jour ce réseau quand l'utilisateur modifie certains de ses éléments. Il devient ainsi possible, pour aborder un problème générique, d'explorer facilement des cas particuliers et de conduire une généralisation. Les relations entre expressions algébriques sont mieux mises en évidence du fait de leur invariance dans les modifications du réseau.

(1) « *L'utilisation du calcul symbolique n'est pas prise en compte dans les programmes actuels. Cependant, … l'usage de ces logiciels par les élèves se développe. Leur prise en compte par les enseignants devient nécessaire à court terme.* » Les TICE en maths au collège et au lycée. Inspection générale de Mathématiques, octobre 2004.
(2) Voir (Lagrange 2000) pour une explicitation de ce point de vue et (Lagrange, Heilbronner 2003) pour un premier développement d'un environnement, articles parus dans le bulletin vert.

De façon très concise, Casyopée peut être défini comme une « calculatrice de fonctions ». Les objets principaux sont les fonctions telles qu'on les rencontre au lycée : fonctions réelles définies sur une réunion d'intervalles de **R**, cette définition pouvant comporter des paramètres. Casyopée offre des possibilités étendues de calcul formel, d'exploration graphique et numérique, notamment par le pilotage des paramètres et une gestion dynamique des objets.
Quatre objectifs principaux nous ont guidés dans la conception du logiciel :
1. « Éviter que les élèves se perdent dans des tâches calculatoires ».
En effet, des situations problèmes amènent souvent les élèves à étudier les propriétés de fonctions et leur interprétation graphique. Même s'il reste nécessaire que les élèves acquièrent des compétences en calcul algébrique, dans de nombreux problèmes des calculs longs et techniques peuvent les empêcher de progresser efficacement dans leurs recherches et la construction de leurs preuves.
2. « Élargir le champ des problèmes ».
Le calcul formel permet d'envisager des activités potentiellement plus riches avec des techniques différentes et d'accéder aussi à des résultats plus généraux. Il faut pour cela que l'élève dispose d'un environnement où il puisse facilement agir dans les cadres numérique, graphique et algébrique.
3. « Aider les élèves à la démonstration ».
Il nous est apparu nécessaire d'introduire dans Casyopée une démarche de preuve exploitant les possibilités offertes par le calcul symbolique. Un des menus du logiciel s'intitule « *Justifier* » : l'élève choisit, dans une liste, des propriétés ou théorèmes, des boites de dialogue le guident dans sa démarche, le logiciel pouvant lui suggérer des outils pour sa justification. Il peut aussi émettre des conjectures et les utiliser dans sa démarche de preuve. Toutes les actions sont inscrites dans le « *Bloc Note* ». L'élève peut le modifier, le compléter et l'enregistrer. C'est alors un véritable support de rédaction et d'évaluation par le professeur.
4. « Adapter le logiciel au profil des élèves ».
Nous avons constaté que les logiciels de calcul formel sont utilisables par des professeurs ou des chercheurs plus que par des élèves de lycée. Nous avons conçu le logiciel Casyopée pour des élèves de lycée en tenant compte de leurs connaissances. C'est pourquoi, plutôt que développer un logiciel « généraliste » nécessairement complexe, nous avons préféré nous limiter à l'étude des fonctions. La prise en main est aisée : aucun apprentissage syntaxique n'est nécessaire.
Un paramétrage permet d'adapter le logiciel à différents profils d'élève. Le professeur peut tenir compte des connaissances et niveaux dans sa classe ainsi que de ses objectifs : il détermine alors les outils de calcul formel disponibles, les propriétés et les aides utilisables pour établir une preuve.
La version actuelle de Casyopée est le résultat de quatre années de développement et d'expérimentation dans un groupe de l'IREM de Rennes(3). Le lecteur intéressé se reportera à (Le Feuvre 2004) pour la présentation d'autres activités et à (Lagrange 2005) pour une présentation plus complète des raisons qui motivent ce projet. Des informations d'ordre pratique sont données à la fin de l'article.

(3) Le projet Casyopée est soutenu depuis le début par l'INRP (équipe en projet 4.b) et plus récemment par la communauté européenne (STRP ReMath) en association avec le laboratoire de didactique des mathématiques de l'Université Paris VII (Didirem).

Partie 3. Des exemples d'utilisation

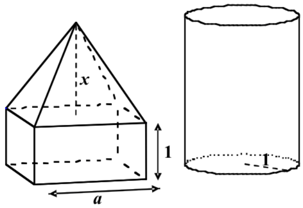
Il s'agit de présenter et discuter diverses possibilités d'utilisation de Casyopée s'adressant à des élèves du lycée dans des environnements différents (classe entière ou groupe) et faisant intervenir plusieurs types de fonctions.
Les activités que nous construisons sont courantes (inspirées d'exercices de manuels) mais justifient des démarches d'exploration, de modélisation algébrique (équation en seconde, dérivation en première et terminale) et de preuve. Ici deux activités (une en seconde et une en première STI) sont présentées.
Il ne nous paraît pas nécessaire de prévoir une prise en main préalable du logiciel par les élèves. Lors de la première utilisation, quelle que soit la situation, l'étude d'un cas numérique permet aux élèves de découvrir les principales fonctionnalités.
Nous ne cherchons pas ici à justifier l'utilisation du logiciel par des situations d'une complexité supérieure à ce que les élèves rencontrent habituellement. C'est pourquoi les activités que nous présentons ici seraient « faisables » à la main (en papier/crayon). Les manuels dont nous les avons tirés n'envisagent d'ailleurs pas l'utilisation d'un logiciel. Cependant, dans une classe, seuls quelques élèves sont à la fois habiles dans les manipulations algébriques et capables d'interpréter des formulations algébriques. En environnement papier/crayon ils seraient seuls à répondre (en partie ?) aux questions posées. Notre objectif, à travers l'utilisation de Casyopée est d'encourager *tous* les élèves à s'investir dans la recherche des problèmes posés, le logiciel les aidant à les comprendre et à les résoudre.
Quelques informations sur l'écran de Casyopée : il est constitué de plusieurs fenêtres (fenêtre des réels entrés ou obtenus lors de l'étude, fenêtre des fonctions, fenêtre du tableau des valeurs symboliques, fenêtre des expressions, fenêtre des représentations graphiques, fenêtre pour la résolution d'équations). Un bloc-notes enregistre les gestes effectués, il peut être complété et servir à la rédaction des solutions. Des commandes spécifiques permettent entre autres d'entrer des réels, des fonctions, de faire des calculs (outils de calcul formel), de créer des paramètres, d'obtenir une table de valeurs, de justifier, etc. Ces différentes fonctionnalités sont décrites dans les exemples traités.

En classe de seconde.

Deux volumes égaux - L'interaction graphique algébrique.

Présentation (cf. annexe 1)

Cette activité peut être faite en classe de seconde. Nous nous sommes inspirés du texte d'un exercice d'un livre de seconde(4). L'intérêt de la situation est de proposer une modélisation conduisant à la résolution d'une équation du premier degré dans $\mathbf{R}_+$. Ainsi les élèves retrouvent des équations qu'ils ont vues en troisième, la résolution dans $\mathbf{R}_+$ impliquant une



Polyèdre P Cylindre C

(4) Exercice n° 55 p. 182. Déclic Seconde édition Hachette.

réflexion sur l'ensemble des solutions en lien avec la modélisation. La situation est bien adaptée au cadre fonctionnel.
Nous avons généralisé le problème posé avec l'introduction d'un paramètre pour permettre une discussion sur l'ensemble des solutions. Le paramètre n'implique pas une trop grande augmentation de la complexité algébrique dans l'écriture des fonctions. Il fait rencontrer aux élèves un troisième type de lettre différent de la variable de fonction et de l'inconnue. L'exercice du livre, sans paramètre, peut être résolu sans l'utilisation d'un logiciel. Dans le problème généralisé, la résolution des équations serait difficile à mener par des élèves de seconde sans l'apport du calcul formel. Dans les deux cas Casyopée apporte les facilités d'un logiciel mathématique.

Le problème est de savoir si deux volumes, peuvent être égaux. Les deux volumes correspondent à des solides de même hauteur, l'un est un polyèdre constitué d'un parallélépipède à base carrée de côté a et de hauteur 1 surmonté d'une pyramide de hauteur x et l'autre est un cylindre de rayon 1. Dans l'activité, les volumes sont modélisés par deux fonctions affines de variable x définies sur $\mathbf{R}_+$. Le paramètre a apparaît dans la fonction exprimant le volume du polyèdre.
Casyopée permet de définir un paramètre sur un intervalle, de le « piloter » ou de le « dépiloter ». En mode piloté, la valeur du paramètre est fixée à l'aide d'un curseur sur l'intervalle. En mode « dépiloté », il s'agit d'un paramètre formel appartenant à l'intervalle.

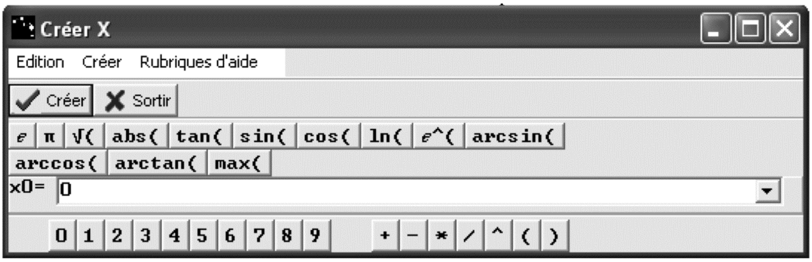
Il s'agit de faire interagir la résolution d'équations sur $\mathbf{R}_+$ et l'étude de l'intersection de demi-droites dont l'une dépend du paramètre a.
Cette activité accorde une grande importance à des phases d'exploration et met l'accent sur l'interprétation de l'ensemble des solutions.
Comme prérequis cette activité demande que la notion de fonction ait été vue (plus particulièrement les fonctions affines), et que les élèves sachent interpréter graphiquement l'équation en x, $f(x) = g(x)$. Si les élèves savent de plus utiliser les commandes d'une calculatrice graphique, ils retrouveront des commandes analogues dans le logiciel. Un travail préliminaire sans le logiciel est nécessaire pour déterminer les expressions algébriques des deux volumes.

Observation

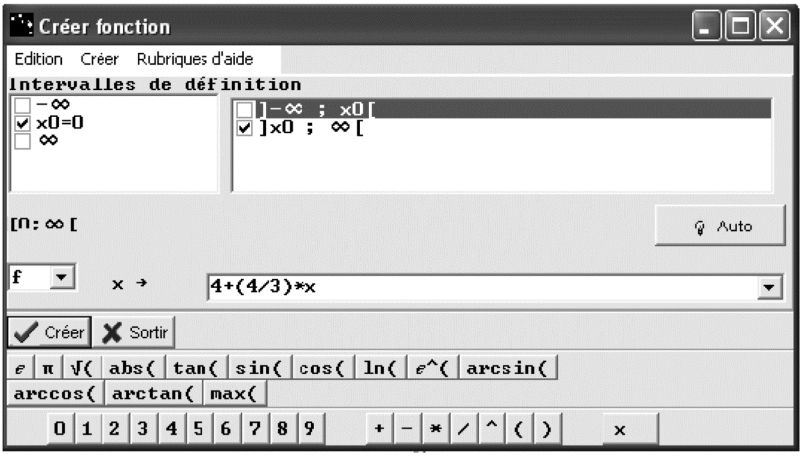
Ces commentaires tiennent compte d'observations d'une situation sur deux séances avec des élèves de seconde travaillant en salle informatique, un élève par poste. Il s'agit de la première utilisation de Casyopée. Les commentaires reprennent les différentes étapes du travail demandé aux élèves.

Première partie : découverte des fonctionnalités sur le cas « $a = 2$ »

Définition des fonctions
Le logiciel demande de préciser l'ensemble de définition de la fonction avec l'expression algébrique. Ceci amène l'élève à concevoir la notion de fonction au-delà de sa seule expression algébrique. Pour l'ensemble de définition l'élève doit d'abord créer la valeur 0 qui s'affiche dans la fenêtre des réels.



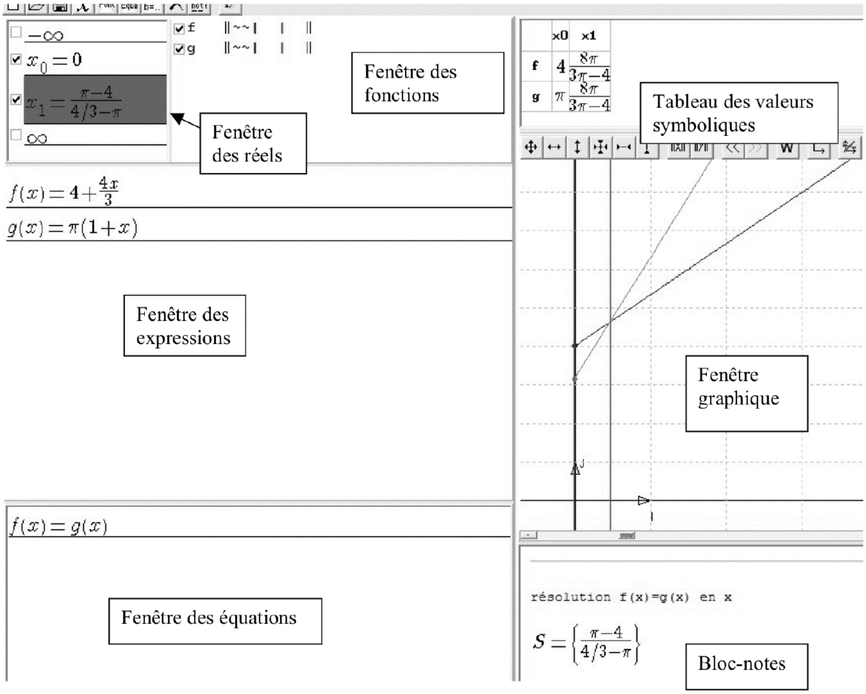
Pour créer la fonction l'élève doit préciser son ensemble de définition.



Exploitation graphique et symbolique
Comme sur les calculatrices graphiques, un menu *Window* permet de choisir les paramètres de la fenêtre pour les représentations graphiques. De même, dans le menu *Exploration* la commande *Tabuler* permet d'obtenir une table de valeurs.

Résolution algébrique de l'équation
La possibilité d'entrer l'équation sous la forme $f(x) = g(x)$ met l'accent sur le problème à résoudre.
Le logiciel donne directement l'ensemble des solutions dans le bloc-notes. Celles-ci peuvent être ajoutées dans la fenêtre des réels et ainsi apparaître dans le tableau des valeurs symboliques, permettant à l'élève de contrôler la réponse : écran suivant.

Le travail de l'élève consiste alors à interpréter cette réponse. En « papier/crayon », la présence du nombre π rendrait le travail assez délicat : beaucoup d'élèves perdraient le fil de la démarche, noyés par des difficultés algébriques. Casyopée (ou plutôt le noyau de calcul formel) permet à la fois de donner la réponse exacte mais aussi avec le tableau des valeurs symboliques de vérifier la cohérence de cette réponse. L'élève dépasse la simple interprétation graphique « les deux courbes se croisent » pour obtenir une réponse précise sur l'existence de solution.



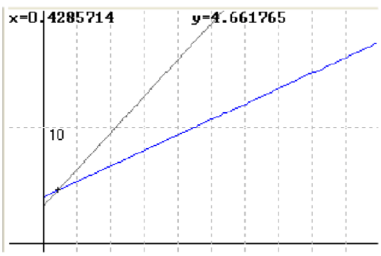
Deuxième partie : exploration du cas général (pilotage)

Dans cette partie les élèves doivent d'abord créer un paramètre (ils peuvent choisir les bornes ainsi que le pas) et redéfinir la fonction f : $f(x) = a^2 + \frac{a^2 x}{3}$.

Ils vont découvrir en pilotant a que le problème peut admettre zéro ou une solution selon la valeur de ce paramètre. Cette partie laisse une grande place à des phases d'exploration graphique et algébrique. La recherche de la plus petite (respectivement la plus grande) valeur de a pour que le problème admette des solutions peut être présentée comme un challenge entre les élèves.

Ils peuvent utiliser deux démarches :

– *l'une graphique* :
Dans la fenêtre graphique ils peuvent zoomer et conjecturer l'intersection des demi-droites.



– *l'autre algébrique* :
Ils peuvent créer une nouvelle fonction f_0 avec la commande « substituer paramètre » qui remplace a par sa valeur affichée (ici $a = 3$).

Ils demandent au logiciel d'afficher l'ensemble des solutions de l'équation $f_0(x) = g(x)$ dans le bloc-notes, qui peut être vide ou avoir un seul élément.

Nouvelle Fonction définie sur $[0;\infty[$
$f0\ x \to 3x + 9$

Créer Equation f0(x)=g(x)

résolution f0(x)=g(x) en x

$$S = \left\{ \frac{\pi - 9}{3 - \pi} \right\}$$

La démarche algébrique permet de vérifier le nombre de solutions conjecturé graphiquement. Les résultats obtenus étant écrits au tableau, le professeur peut demander aux élèves s'ils les valident ou pas. Cette phase d'exploration permet aux élèves d'utiliser une méthode (diminution du pas du paramètre) pour déterminer des valeurs de a avec de plus en plus de décimales.
Après ce travail d'exploration, les élèves dépilotent le paramètre. Il s'agit alors d'un paramètre formel : la demi-droite représentative de f ne s'affiche plus. Les élèves demandent alors au logiciel de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Il affiche l'ensemble des solutions de sous la forme suivante :

résolution f(x)=g(x) en x

si $\sqrt{\pi} \leq a$ et $a < \sqrt{(3\pi)}$

$$\text{alors } S = \left\{ \frac{\pi - a^2}{\frac{a^2}{3} - \pi} \right\}$$

sinon $S = \varnothing$

Le calcul formel donne les conditions d'existence de la solution ainsi que la solution.

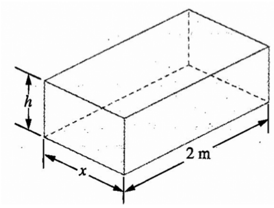
Bilan

Le pilotage du paramètre permet d'explorer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles une solution existe et aide ainsi à la dévolution du problème. Il facilite aussi la compréhension de la réponse donnée par le logiciel après dépilotage.
Le logiciel aide à faire le lien entre l'intervalle trouvé par exploration et la condition sur a ($\sqrt{\pi} \leq a < \sqrt{3\pi}$) pour que le problème ait une solution et par conséquent aide à comprendre cette solution.

Construction d'une cuve sans couvercle (en Première STI) : une progression sur deux séances.

Les activités de recherche d'un extremum se rencontrent dès la classe de seconde. Si dans cette classe l'outil de la factorisation est souvent utilisé, en classe de première l'outil de la dérivation peut s'avérer performant. Les calculs algébriques pourront être effectués avec les outils de calcul formel, permettant ainsi à l'élève de se concentrer sur la compréhension du problème et les méthodes pour le résoudre. En plus du calcul formel, le logiciel Casyopée est conçu pour aider les élèves à rédiger une preuve. En effet, un menu *Justifier* est disponible et grâce à des boîtes de dialogue aide l'élève à construire une preuve. Il pourra ensuite utiliser le *bloc-notes* et rédiger cette preuve en utilisant les éléments donnés par Casyopée.

L'objectif de ces deux séances est de justifier, aux yeux des élèves, l'emploi des outils algébriques pour résoudre des problèmes d'optimisation et de valoriser la construction d'une preuve algébrique. Il ne s'agit pas d'une séance isolée en salle informatique, mais de deux séances articulant activités de recherche en classe, synthèse collective et travail en groupes sur ordinateur.



On se propose de construire un réservoir en tôle, sans couvercle, en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur est donné. ***On cherche à utiliser le moins de tôle possible***.

Un premier énoncé est donné extrait du manuel(5) (séance 1). Il est ensuite généralisé pour un volume quelconque, ce qui nécessite d'introduire un paramètre (séance 2). La maîtrise des différents statuts des lettres est en effet une compétence qu'il est utile de développer en lien avec les matières techniques en section STI (en particulier ici en option électronique). Dans les problèmes d'optimisation, la présence d'un paramètre rend non pertinente une validation empirique par lecture d'un graphique ou d'une table et favorise donc l'approche algébrique.

Séance 1

Le problème posé

Le volume intérieur étant fixé à 4 m^3, il s'agit d'exprimer la somme des aires des faces intérieures en fonction de x, puis de déterminer les valeurs de x et h correspondant à une aire minimale.

Place de la séance dans la progression

Les élèves ont déjà étudié des problèmes d'optimisation et connaissent des techniques de recherche d'optimum. Le problème posé n'est donc pas complètement nouveau pour eux. Il doit les amener à étudier une fonction rationnelle. Cependant, la situation est nouvelle car deux variables liées sont introduites et l'étude du signe de la dérivée ne renvoie pas directement à une étude standard reconnue par les élèves (affine, second degré).

Déroulement

Dans un premier temps, les élèves cherchent en groupes à résoudre le problème (en papier/crayon) et rédigent leur solution. Le logiciel Casyopée est utilisé en vidéo projection lors la synthèse collective et permet de mettre l'accent sur des points délicats (fonctions, variables, calculs), sur des méthodes de preuve et sur les étapes de la preuve. Les élèves rédigent ensuite individuellement leur solution au problème posé.

(5) d'après Mathématiques Dimathème, 1res STI-STL, édition Didier, 1998.

Analyse

L’expression algébrique de la somme des aires est facilement trouvée.
Dans leurs recherches, la plupart des groupes calcule une dérivée sans toutefois définir clairement la fonction (nom de la fonction, nom de la variable, ensemble de définition, expression algébrique). Ils bloquent ensuite, ne savent pas comment exploiter cette dérivée, tâtonnent, se lancent souvent dans des voies infructueuses.
Leur rédaction-explication est plus que succincte, se limitant à la formule de l’aire, un calcul de dérivée, et la valeur de x solution.

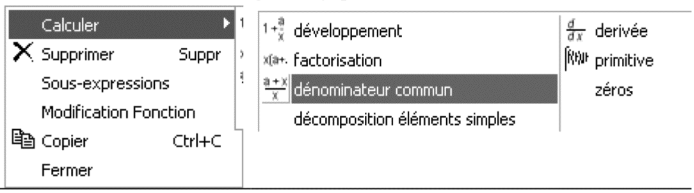
La synthèse dirigée par le professeur à l’aide de Casyopée reprend le travail et recadre les étapes de la résolution :

- définition de la fonction : les « contraintes » de l’environnement conduisent à définir précisément la fonction à étudier,
- calcul de la dérivée et étude de son signe : l’environnement aide à recentrer la résolution du problème sur cette étude. Il facilite le questionnement et la rédaction.
  - ➢ Quelle expression de la dérivée permet d’étudier son signe ? (voir écran1)
  - ➢ Quelle est la nature de la fonction $x \to 2x^2 - 8$?
  - ➢ Quelle propriété permet d’étudier le signe de $2x^2 - 8$?
  - ➢ Quelles sont les conditions d’application du théorème du signe d’une fonction du second degré ? (voir écran 2)

Le professeur présente le fonctionnement du menu *Justifier* : choix de l’entrée de menu en fonction d’un type d’expression ou d’un théorème à appliquer, entrée de données dans une boîte de dialogue, puis évaluation par Casyopée et enfin validation de la propriété prouvée.

Écran 1 : Expression de la dérivée mise au même dénominateur

Boites de dialogue Casyopée



Contenu du bloc-notes

Fonction définie sur]0 ; + ∞ [

$$s(x) = 2x + \frac{8}{x} + 2$$

dérivée de s(x)

$$s\prime(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

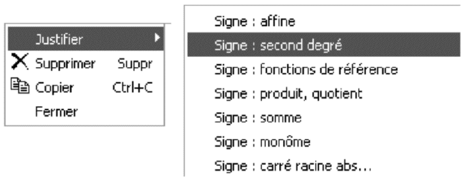
dénominateur commun de s’(x)

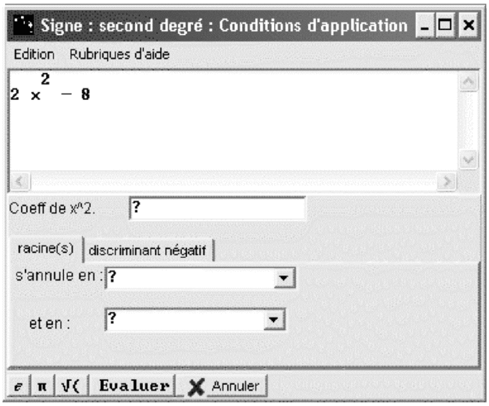
$$s\prime(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

On demande au logiciel de créer les sous expressions $s_0'(x)$ et $s_1'(x)$ qui sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la forme obtenue après mise au même dénominateur de l'expression de la dérivée.

Écran 2 : Étude du signe de $2x^2 - 8$

Boites de dialogue Casyopée





La boîte de dialogue ci-dessus étant complétée correctement, on donne le signe de l'expression $(2x^2 - 8)$ sur les intervalles cités, valide, et le logiciel indique si les réponses sont exactes.

Signe de la dérivée et variation de la fonction

Dans le bloc-notes le logiciel affiche les résultats des justifications :

- le signe de $s_1'(x)$ qui est positif (soit le résultat d'une justification, soit directement le signe + mis par le logiciel, cela dépend du paramétrage choisi) ;
- le signe étudié (voir écran 2) de $s_0'(x)$;
- le signe de $s'(x)$, on utilise la justification « Signe : produit, quotient » (le logiciel applique la règle des signes) ;
- le sens de variation de la fonction s, on utilise la justification « Variations : signe Dér. Connue » (le logiciel applique le théorème liant le signe de la dérivée et le sens de variation).

On peut enfin modifier ou compléter le contenu du bloc-notes de façon à rédiger une réponse au problème posé.

Séance 2

Présentation

Les élèves doivent généraliser l'étude précédente, dans le cas où le volume intérieur v n'est pas fixé. La présence d'un paramètre impose une étude algébrique. Ils doivent déterminer au papier/crayon une expression de la somme des aires des faces en fonction de x et v, puis utiliser les fonctionnalités de Casyopée présentées par le professeur à la séance précédente. Cela doit les conduire à définir la fonction de façon mathématique, faciliter les calculs algébriques et les aider dans leur démarche de preuve.
La séance se déroule en demi-classe en salle informatique. Les élèves travaillent en binômes sur ordinateur. Ils doivent d'abord définir les « objets » relatifs à l'étude :

- le paramètre v défini positif,
- la valeur $x_0 = 0$ permettant de définir l'intervalle d'étude,
- la fonction S, définie sur $]x_0\ ;+\infty[$ par $S(x) = 2x + v + \dfrac{2v}{x}$.

Ils doivent ensuite étudier les variations de la fonction à l'aide de Casyopée :

- menu *Calculer* pour la dérivée,
- menu *Justifier* pour le signe de la dérivée et les variations de la fonction,
- bloc-notes pour la rédaction d'une preuve.

Analyse

Création de la fonction

Le respect de l'ordre de création des objets nécessaires à la définition de la fonction n'est pas immédiat. Mais les messages renvoyés par Casyopée conduisent à respecter cet ordre de création : paramètre v, valeur $x_0 = 0$, définition de S et à donner ainsi un statut clair aux lettres. La saisie de l'expression algébrique de $S(x)$ sans avoir créé le paramètre v renvoie un message « v inconnu ».

Étude de la fonction avec Casyopée

Si le calcul de la dérivée est tout de suite demandé $\left(S'(x) = 2 - \dfrac{2v}{x^2}\right)$, la factorisation de l'expression ou la mise au même dénominateur $\left(S'(x) = \dfrac{2x^2 - 2v}{x^2}\right)$ en vue de l'étude du signe de la dérivée n'est pas spontanée. Certains binômes s'engagent dans la justification du signe de $\dfrac{2v}{x^2}$ pour réaliser ensuite qu'on ne peut en déduire le signe de $S'(x)$.
L'étude du signe de $2x^2 - 2v$ avec Casyopée s'avère intéressante : pour le justifier, les élèves doivent reconnaître une fonction du second degré, et ses éléments caractéristiques. Le calcul des zéros sur l'intervalle de définition ne renvoie que la

racine $\sqrt{v}$. Les élèves doivent interpréter le résultat obtenu pour déduire l'autre racine $-\sqrt{v}$.

Bilan

L'observation de cette séance permet de faire quelques remarques sur l'environnement logiciel :

- ➢ Du côté de l'élève le travail reste centré sur l'activité mathématique. L'environnement favorise les échanges dans les binômes. La plupart des groupes réalise effectivement l'étude demandée, avec ou sans l'aide du professeur.
- ➢ Casyopée apporte une aide à la construction de la preuve et aussi à sa rédaction. Les élèves utilisent les indications données par le logiciel dans le bloc-notes lors des justifications pour élaborer leur propre rédaction en traitement de texte. Cette aide à la rédaction est particulièrement appréciée des élèves qui, souvent, sont rebutés par cette partie du travail.
- ➢ L'environnement ne dispense pas l'enseignant d'intervenir auprès des élèves. Il est au contraire très sollicité par eux. Ses interventions sont de plusieurs ordres :
  - mettre en relation les méthodes avec les « gestes machine » correspondant, par exemple Créer *une sous expression* pour étudier le signe du numérateur et du dénominateur d'un quotient.
  - lire, analyser, interpréter les réponses renvoyées par le logiciel, faire le lien avec le cours de mathématiques, notamment lors des justifications de signe et de variation.
  - directement centrées sur des questions mathématiques (comment étudier le signe d'un quotient, ou le signe d'une fonction du second degré ?…).

Perspectives

Les activités présentées ici visent à montrer comment Casyopée peut soutenir le travail algébrique et l'esprit d'initiative des élèves de lycée dans des situations variées, ainsi que la rédaction des preuves. Nous nous sommes particulièrement intéressés à des activités où les fonctions modélisent des situations. L'activité algébrique avec le logiciel prend alors sens par référence à la situation modélisée. Une des limitations de Casyopée est cependant qu'il n'intervient qu'après l'étape de modélisation.

Il serait souhaitable de permettre à l'élève des allers-retours entre modélisation et travail algébrique. Par exemple, dans l'activité 2 ci-dessus, le logiciel pourrait aider les élèves à explorer la dépendance entre x, le côté variable de la cuve et la quantité de métal nécessaire sans l'exprimer algébriquement. À l'aide de formules et théorèmes proposés par le logiciel, l'élève pourrait ensuite tenter de construire une fonction modélisant cette dépendance. En comparant les propriétés de la fonction à celles trouvées par exploration à la première phase, il pourrait exercer son esprit critique sur sa modélisation. Si, par exemple, il a défini une *fonction polynôme*, il pourra détecter une incohérence avec le fait, observé par exploration, que pour x voisin de zéro, la quantité de métal devient très grande. Nous allons faire évoluer

Casyopée de façon à permettre cette activité de modélisation.

Postface

Nous sommes conscients que l'utilisation d'outils de calcul formel pose des problèmes d'enseignement. Pour alimenter un débat à partir de notre expérience de Casyopée, nous indiquons quelques pistes de réflexion :

- « *Les élèves ne savent plus calculer* » est une remarque souvent entendue. On accuse les calculatrices et parfois les logiciels de calcul formel. L'utilisation de logiciels de calcul formel n'interdit pas cependant l'apprentissage raisonné de calculs « faits à la main ». Il existe deux dimensions de l'activité algébrique, l'une où il s'agit de résoudre des problèmes et donc de piloter des calculs sans se perdre dans les manipulations, et l'autre où il s'agit de découvrir et de s'approprier des propriétés algébriques. Aucune de ces deux dimensions ne peut prendre un sens seule. Casyopée aide dans la première dimension. Nous pensons absolument nécessaire que les activités intègrent la seconde comme dans l'exemple de la cuve où Casyopée aide à faire la synthèse et à généraliser après une résolution « papier-crayon ».
- « *L'élève ne pourrait accéder à des problèmes plus complexes qu'en sachant calculer* » est une autre remarque souvent entendue. Ces problèmes qui peuvent motiver les élèves ne seraient-ils réservés qu'à une élite qui aurait les performances suffisantes en calcul pour mener à bien la résolution ? Notre expérience avec Casyopée nous montre que des élèves peuvent comprendre des problèmes et prendre des initiatives dans la résolution en déléguant les calculs au logiciel.
- « *La prise en compte [des logiciels de calcul formel] par les enseignants devient nécessaire à court terme.* » écrit l'Inspection Générale (voir note 1). Casyopée constitue pour nous un moyen de cette prise en compte. En existe-t-il d'autres ? Pourrait-on échanger à ce sujet ?
- « Les logiciels de calcul formel sont puissants, mais sophistiqués. Les élèves ne peuvent les dominer suffisamment pour que leur usage les fasse progresser en mathématiques ». C'est ainsi que nous comprenons certaines interrogations du « chapeau » que nous partageons. Notre but est de développer Casyopée autour de fonctionnalités simples, facilement identifiables par l'élève et le professeur. Les expérimentations et les suggestions de collègues nous permettent de faire évoluer le logiciel en ce sens. Nous sommes donc ouverts à toute proposition.

Informations pratiques

Il est possible de télécharger Casyopée et des documents de prise en main et d'activités sur le site de l'IREM de Rennes :
http://www.irem.univ-rennes1.fr/recherches/groupes/groupe_aide_logiciel/
L'utilisation nécessite l'installation de Mupad version 2.0. Cette version n'est plus disponible sur le site de Mupad. Les personnes intéressées pour expérimenter le logiciel Casyopée peuvent contacter Xavier Meyrier : Xavier.MEYRIER@ac-rennes.fr

Pour réagir à l'article vous pouvez envoyer vos remarques à Bernard Le Feuvre :
le-feuvre.bernard@wanadoo.fr

Avant Casyopée nous avons développé des activités avec la TI 92 et Derive. Nous avons aussi testé Mupad.
Derive : http://www.calibration.fr/derive.htm
Mupad : http://research.mupad.de/

Bibliographie

Lagrange J.-B. (2005). Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions. International Journal for Computer in Mathematics Learning, 10 : 143–189 Kluwer.

Lagrange J.-B. (2000) Mathématiques, calcul formel, programmation. Un point de vue didactique. Bulletin de l'APMEP. nº 429. p. 474-481.

Lagrange, Heilbronner (2003) Adapter un logiciel de calcul formel pour l'utiliser avec des élèves de lycée. Bulletin de l'APMEP. nº 445. p. 225-232.

Le Feuvre, B., Meyrier, X., Heilbronner, L., Lagrange J.-B. (2004), Casyopée : un logiciel pour l'analyse en lycée. In Lagrange J.-B. & al. (éds) Actes en ligne du colloque International ITEM, Reims, Juin 2003.
http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/edutice-00001341

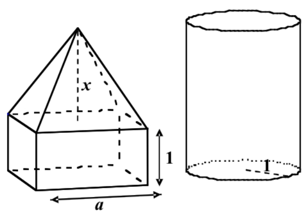
Annexe 1

Texte de l'activité 1

Seconde
Nom et prénom :

Un problème de Volumes

On considère deux objets :
un polyèdre P composé d'un parallélépipède à base carré de côté a ($a > 0$) , de hauteur 1, surmonté d'une pyramide de hauteur variable x ($x > 0$) ;
un cylindre C de même hauteur que le polyèdre P et de rayon égal à 1.



Polyèdre P Cylindre C

Le but du problème est de déterminer des valeurs de a pour lesquelles les volumes des deux objets sont égaux.

Première partie :

On appelle f, la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ qui à x associe le volume du polyèdre P et par g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ qui à x associe le volume du cylindre C.

1° Cas où $a = 2$

a) Donne une expression algébrique de $f(x)$ et de $g(x)$.

…………………………………………………………………………………………

Utilise le logiciel pour représenter graphiquement les fonctions f et g.

b) Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

…………………………………………………………………………………………

Utilise le logiciel pour obtenir la valeur exacte de la solution de l'équation ci-dessus.

…………………………………………………………………………………………

c) Bilan de la question 1° : quand $a = 2$, que peux-tu dire des volumes du polyèdre P et du cylindre C ?

…………………………………………………………………………………………

2° Cas où $a = 4$

Réponds aux questions a), b), c), d) et e) du cas précédent.

…………………………………………………………………………………………

Deuxième partie : *a* est un nombre réel positif quelconque.

On cherche à *situer* les valeurs de a pour lesquelles les volumes du cylindre C et du polyèdre P peuvent être égaux.

a) On rappelle que $f(x) =$ ……………….…et $g(x) =$ ……………..

b) Complète le tableau de valeurs :

Valeurs de a	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
Nombre de solutions de $f(x) = g(x)$										

D'après le tableau quelle est la plus petite valeur de a et la plus grande valeur de a pour lesquelles l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution.

…………………………………………………………………………………………

c) On cherche à déterminer la plus petite valeur possible de a et la plus grande valeur possible de a pour lesquelles l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution.
Comment peux-tu procéder ?

…………………………………………………………………………………………

Donne les valeurs successives trouvées pour a.

…………………………………………………………………………………………

d) Résous, en utilisant le logiciel, l'équation $f(x) = g(x)$.
Interprète la réponse donnée par le logiciel.

…………………………………………………………………………………………

Que penses-tu des valeurs trouvées pour a à la question c) ?

…………………………………………………………………………………………

Écris une conclusion au problème posé.

…………………………………………………………………………………………

Annexe 2

Énoncé de l'activité 2 donné aux élèves :

On se propose de construire un réservoir (sans couvercle) en tôle en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur est 4 m^3. On cherche à utiliser le moins de tôle possible.

1. De combien de variables dépend le problème ?
2. Quelle relation lie h et x ?
3. Exprimer la somme des aires des faces intérieures en fonction de x.
4. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une aire minimale.