# Développante de cercle et engrenages

**Jean Lefort**

*La développante de cercle intervient en mécanique. Je propose dans cet article une approche de niveau collège qui permet de comprendre pourquoi les dents des engrenages ont un profil en développante de cercle et pourquoi cette courbe permet de construire des engrenages paradoxaux qui engrènent en tournant dans le même sens.*

## 1. La développante de cercle

Voici une courbe très facile à tracer. Prendre une bobine de fil ; fixer à l'extrémité du fil un crayon bien taillé ; maintenir la bobine verticalement sur la feuille de papier et dérouler le fil en gardant le crayon vertical. Il apparaît une courbe en spirale. À chaque tour la courbe s'éloigne d'une longueur égale à la circonférence de la bobine. Cette courbe a un nom : c'est une développante de cercle.

Si au lieu de dérouler régulièrement le fil, on bloque son déroulement alors que le crayon continue à tourner, il est clair que l'on trace à partir de là un cercle que l'on voit se raccorder parfaitement à la développante. Cela nous permet de deviner comment construire la tangente à la développante en un point quelconque : c'est la tangente au cercle précédent, donc la perpendiculaire au rayon de ce cercle, c'est-à-dire tout simplement la perpendiculaire au fil.

Si l'on observe encore plus attentivement la manipulation, on s'aperçoit que lors de son déroulement, le fil reste tangent à la bobine. (Figure 1).

Nous venons donc de voir des propriétés élémentaires de la développante de cercle sans faire aucun calcul. Ceci prouve que l'on peut étudier cette courbe avec des collégiens. Bien sûr, au lycée, avec des notions élémentaires de trigonométrie, il est facile de trouver les coordonnées d'un point courant en fonction de l'angle de déroulement du fil. Alors on voit que pour obtenir la courbe complète il faut adjoindre au tracé précédent son symétrique par rapport à une droite bien choisie (celle passant par le centre de la bobine et le point de départ de la courbe). Nul besoin pour cela de connaître le principe d'étude d'une courbe donnée paramétriquement. À un niveau encore plus élevé, après le bac, il sera possible d'étudier la courbe avec toute la rigueur souhaitable du point de vue mathématique.

Je veux ici rester au niveau du collège. Je laisse le soin au lecteur de revenir, si bon lui semble, aux équations qui justifient tous les résultats(1).

Complétons alors cette courbe tracée avec une bobine de fil et un crayon par la courbe symétrique comme nous l'avons précisé plus haut. Ces deux parties se

(1) Les équations paramétriques de la développante de cercle sont

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos(t) + \mathrm{R}\,t\sin(t) \\ y = \mathrm{R}\sin(t) - \mathrm{R}\,t\cos(t) \end{cases}$$

où R est le rayon du cercle de base (le rayon de la bobine).

recoupent sur l’axe de symétrie. Arrêtons-nous au premier point de recoupement de façon à obtenir un morceau qui ressemble à un cœur. À l’intérieur de ce cœur, traçons le cercle correspondant à la bobine ainsi qu’une droite tangente à ce cercle qui coupe les deux parties de la courbe. Attention, il s’agit de prendre le cercle correspondant à une spire de fil et non pas celui correspondant au bord de la bobine qui a en général un diamètre plus grand. Nous appellerons ce cercle, cercle de base.
Notons T le point de contact, MN la corde, AB l’axe de symétrie, O le centre du cercle de base de rayon R. Il est clair que l’arc de cercle AT du côté de M a même longueur que le segment TM puisque c’est la longueur de fil déroulé. De même l’arc AT du côté de N a même longueur que le segment TN et par suite le segment MN a même longueur que le périmètre du cercle, soit 2πR (Figure 2).

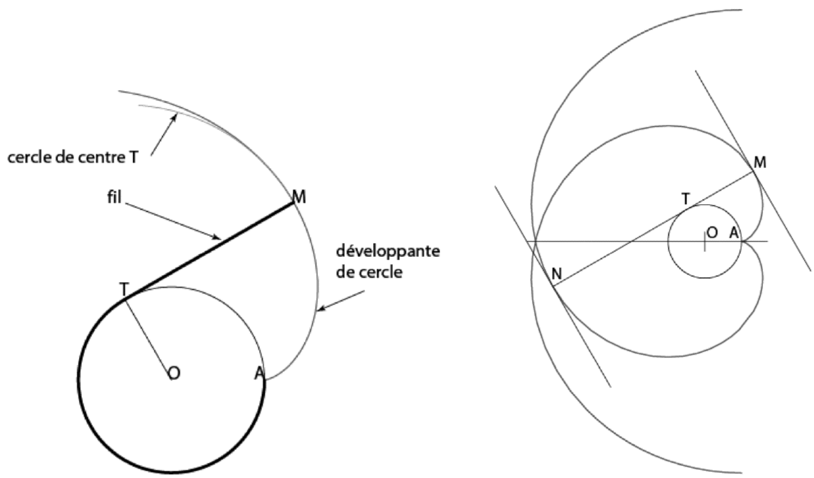


*Figure 1* *Figure 2*

Il faut enfin remarquer que la tangente en T coupe les deux parties de la courbe si et seulement si le point T se trouve assez loin de A. Il est facile de mesurer avec un rapporteur cette position limite et on trouve environ 103°, ce qui prouve que T peut se situer sur un arc de cercle de 360 − 2 × 103 = 154°, soit un peu plus d’un tiers de tour(2).

Nous allons utiliser la propriété d’avoir, dans certaines conditions, une corde de longueur constante pour mettre en contact deux développantes de cercle de même dimension. Nous notons comme précédemment la première développante et avec des lettres primées la seconde. Soit P le point de contact des deux développantes. Ce point P correspond à N sur la première développante et à M′ sur la deuxième. Il est donc clair que $TP + PT' = TN + T'M' = 2\pi R$ .
Comme les tangentes en M, M′ N et N′ sont parallèles, la droite TT′ est tangente commune aux deux cercles de base.

(2) En fait, on démontre que le point B a pour paramètre $t_0 = 4{,}493\ 409\ 458$ radians. On peut obtenir cette valeur en exprimant que l’ordonnée s'annule et donc résoudre l'équation
$$\tan(t_0) = t_0.$$

Or au cours de la manipulation, et en tenant compte des symétries de la développante de cercle, il y a deux façons de placer en contact ces deux développantes. Dans l'un des cas la tangente commune TT′ est tangente intérieure aux deux cercles de base, dans l'autre cas, c'est une tangente extérieure. Chacun de ces cas a une application en mécanique, application que nous allons décrire ci-après.

## 2. Un engrenage hélicoïdal.

Considérons d'abord le cas de la tangente intérieure. Pour simplifier le vocabulaire, appelons dent le morceau de développante de cercle en forme de cœur. Nous avons la situation de la figure 3. Si, en partant de la situation représentée, nous faisons tourner la dent de gauche dans le sens positif (sens contraire des aiguilles d'une montre) autour du centre de son cercle de base, nous voyons que la longueur TP va se mettre à croître obligeant ainsi le segment T′P à décroître donc la dent de droite à tourner dans le sens négatif (c'est-à-dire le sens des aiguilles d'une montre). Mais il est clair que quand le point P arrive au sommet pointu de la dent, le contact se rompt et qu'il n'y a plus entraînement de la dent de droite par sa voisine de gauche.

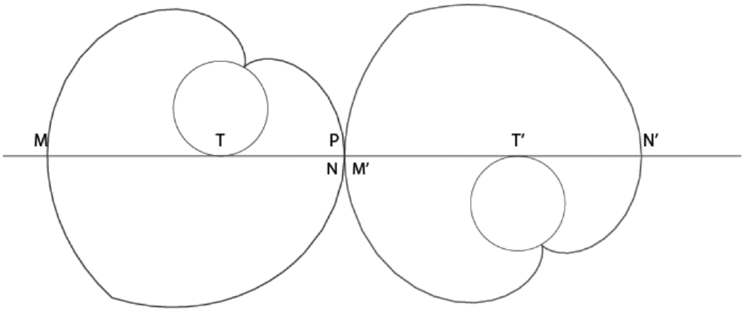



*Figure 3*

Ce résultat, tout à fait attendu d'après ce que nous avons vu pour que les cordes MN ou M′N′ restent de longueur constante, montre que si la dent de gauche est motrice alors elle ne peut entraîner la dent de droite que sur un peu plus d'un tiers de tour. L'idée est alors de fabriquer une roue à trois dents superposées, chacune étant décalée d'un tiers de tour par rapport à la précédente. Ainsi, quand une dent a fini d'engrener c'est une autre qui aura pris le relais. C'est ce qu'illustre la figure 4[(3)].

Sur cette figure, il est clair qu'au cours du mouvement le point de contact se déplace sur la tangente intérieure commune aux deux cercles de base. Mécaniquement cela correspond à la situation de deux poulies entraînées par une courroie croisée. Cette courroie longe les tangentes intérieures aux deux poulies et les entraîne en sens inverse.

(3) En fait ceci est l'amorce d'un engrenage hélicoïdal qui est obtenu en passant à la limite en prenant, non plus 3, mais $n$ dents décalées chacune de la suivante d'$1/n$ tour. Ce passage à la limite est sans doute hors de portée du collégien moyen, mais il explique le titre du paragraphe.

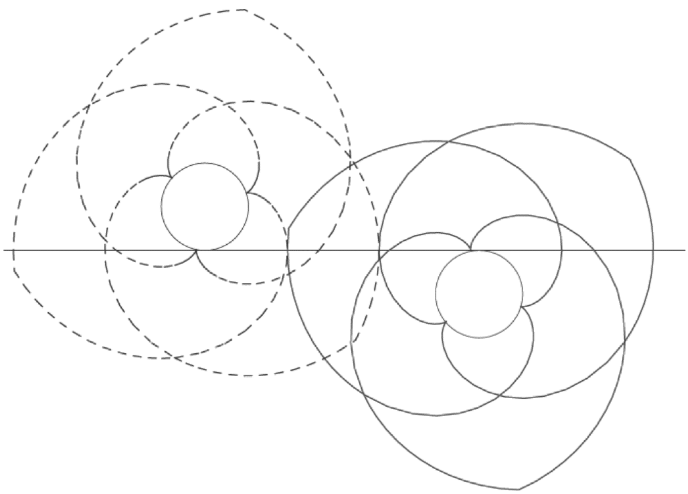


*Figure 4*

## 3. Les engrenages paradoxaux

Considérons ensuite le cas de la tangente extérieure. Nous avons la situation de la figure 5.

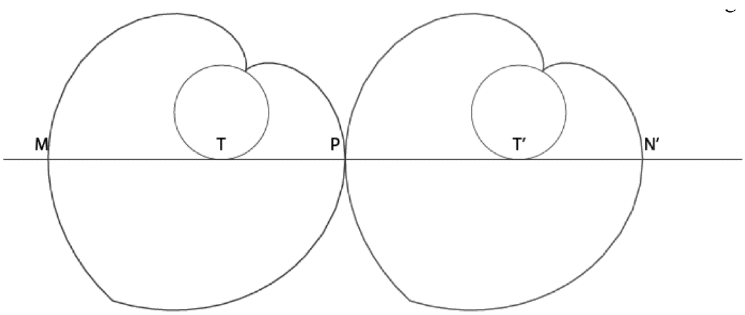



*Figure 5*

Si, en partant de la situation représentée, nous faisons tourner la dent de gauche dans le sens positif (sens contraire des aiguilles d'une montre) autour du centre de son cercle de base, nous voyons que la longueur du TP va se mettre à croître obligeant ainsi le segment T′P à décroître, donc la dent de droite à tourner également dans le sens positif. Mais il est clair que quand le point P arrive au sommet pointu de la dent, le contact se rompt et qu'il n'y a plus entraînement de la dent de droite par sa voisine de gauche. Nous obtenons ainsi l'amorce de ce qu'on appelle un engrenage paradoxal puisque les deux dents tournent dans le même sens.
Nous résolvons cette difficulté de la même façon en plaçant trois dents les unes au dessus des autres pour obtenir la situation de la figure 6 qui correspond à l'engrenage

paradoxal[4].

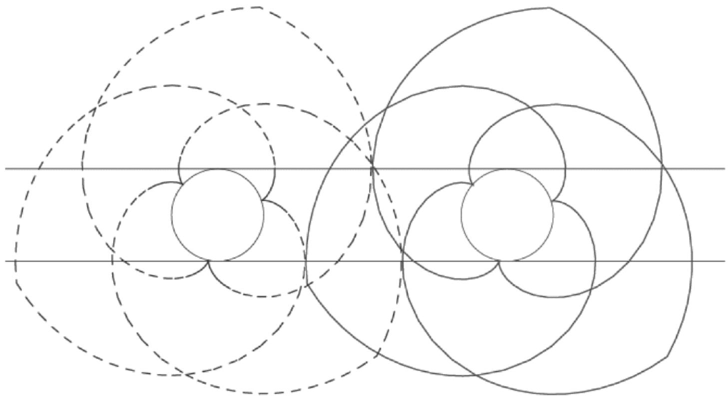


*Figure 6*

Sur cette figure, il est clair qu'au cours du mouvement les points de contact se déplacent sur les tangentes extérieures communes aux deux cercles de base. Mécaniquement cela correspond à la situation de deux poulies entraînées par une courroie non croisée. Cette courroie longe les tangentes extérieures aux deux poulies et les entraîne dans le même sens. Remarquons toutefois que si c'est la roue de gauche qui est motrice et qui tourne dans le sens positif le point de contact utile qui entraîne la roue de droite est le ou les points qui se trouvent sur la tangente inférieure.

## 4. Compléments pour le professeur

### 4.1. Réflexion générale

Il n'est pas très difficile de voir que dans le premier cas, il y a roulement sans glissement des deux développantes l'une sur l'autre. Il suffit de vérifier que lors d'un déplacement élémentaire la longueur parcourue sur une dent par le point de contact est égal et de sens opposé à la longueur parcourue par ce point de contact sur l'autre dent. C'est ce qui minimise les frottements et fait que les dents des rouages classiques ont un profil en développante de cercle. Dans un engrenage classique, le point de contact des dents se déplace selon une droite appelée droite d'action et qui fait un angle de 20° (en général pour la norme européenne) avec la perpendiculaire à la droite des centres (voir le point suivant).

Dans le deuxième cas, celui de l'engrenage paradoxal, il y a cette fois-ci glissement sans roulement car les déplacements élémentaires sont égaux et de même sens. Cela veut dire que les frottements sont importants. En fait les engrenages paradoxaux ont été inventés en 1988 par Mercier, ingénieur chez Renault, et ont fait l'objet d'un brevet. Pour l'application qu'il avait en vue, le frottement est un avantage. Il s'agissait d'améliorer le principe du différentiel qui permet aux roues droites et gauches d'un véhicule de ne pas tourner à la même vitesse dans un virage, par

(4) On aura compris qu'il est possible d'avoir un engrenage hélicoïdal comme dans le cas du paragraphe précédent.

exemple, bien qu'entraînées par le même moteur. On sait par expérience que, s'il y a perte d'adhérence pour une roue (glace, boue, …), celle-ci se met à tourner très rapidement tandis que la roue opposée s'immobilise entraînant par la même occasion l'immobilisation du véhicule. Il est donc nécessaire de transférer une partie du couple de la première roue à la deuxième. Différents systèmes ont été proposés dans ce but, par exemple le différentiel Torsen dont le principe est assez complexe. Le principe du différentiel inventé par Mercier est très simple puisque le transfert s'obtient par frottement. Cependant le frottement conduit à une usure très rapide des éléments en contact. Un tel différentiel ne doit donc fonctionner qu'en cas d'absolue nécessité.
Si le différentiel Mercier-Renault a effectivement été utilisé sur un prototype (la Racoon), cette invention est arrivée trop tard pour être généralisée. À partir des années 90, l'électronique a envahi les voitures permettant de trouver des solutions non mécaniques au problème du patinage. Il reste une belle idée.

### 4.2. Le cas de la denture droite

Une remarque qui vient immédiatement à l'esprit pour l'engrenage classique que nous avons construit un peu plus haut, c'est que les roues dentées ordinaires n'ont pas du tout cette forme. Il est alors important d'expliquer comment sont normalisées les roues dentées et pourquoi il faut faire comme cela. Nous nous contenterons ici de parler des dentures droites ce qui correspond au cas le plus courant.
Pour que deux roues engrènent l'une sur l'autre, il faut que les dents aient les mêmes dimensions pour que les dents de l'une s'inscrivent dans les creux de l'autre. On définit donc le pas d'une denture comme étant la distance d'une dent à la suivante, distance exprimée en millimètres. Deux roues ne peuvent engrener que si elles ont le même pas. Il est clair que si la roue de pas $p$ possède Z dents, sa circonférence est $p$Z et son diamètre $\dfrac{pZ}{\pi}$. Par convention on appelle module $m$ la quantité $p/\pi$ . C'est la quantité $m$ qui est normalisée. Voici quelques unes des valeurs possibles pour $m$(5) :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,25 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 16 | 20 | 25 | 32 | 40 | 50 | 60 | |

On objectera que la mesure de la distance entre deux dents dépend de l'endroit où s'effectue cette mesure. La distance est évidemment plus longue au sommet des dents qu'à leur pied. En fait la distance se mesure sur ce qu'on appelle par convention le cercle (ou le cylindre) primitif, la dent ayant une hauteur de 2,25 fois le module, une fois le module au dehors du cercle primitif pour atteindre le cercle de tête et 1,25 fois le module au-dedans du cercle primitif pour atteindre le cercle de pied. (Figure 7).
On a donc $d = m$Z. Et si deux roues engrènent l'une sur l'autre, le rapport de leurs nombres de dents est égal au rapport de leurs diamètres primitifs. D'un point de vue théorique, il reviendrait au même de faire rouler l'une sur l'autre deux roues lisses ayant comme diamètre les diamètres primitifs $d_1$ et $d_2$ ou deux roues dentées ayant

(5) On remarquera qu'il s'agit, à des arrondis près, d'une suite géométrique, ce qui est habituel dans ce genre de norme (multiplication par 2 tous les trois termes).

$Z_1$ et $Z_2$ dents respectivement. Lors de l'engrènement de ces deux roues, les cercles primitifs sont tangents.

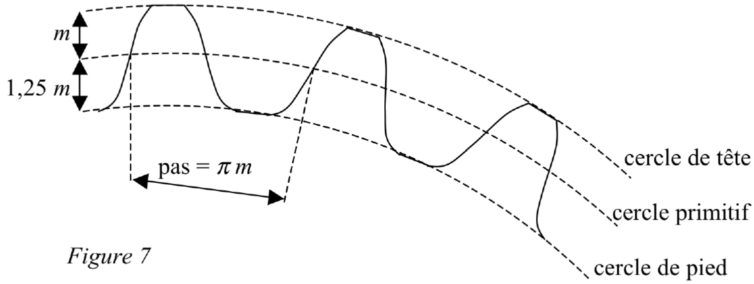
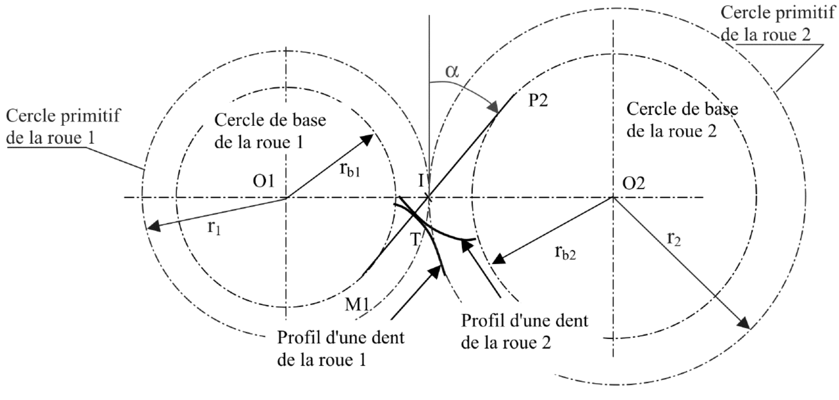



*Figure 7*

Comme dans le paragraphe 2, on veut que le point de contact des dents se déplace sur une droite. Par convention, il a été décidé (en Europe) que cette droite fait un angle $\alpha$ de 20° avec la tangente commune aux cercles primitifs. Cette droite reçoit le nom de droite d'action et elle est tangente à ce qu'on appelle les cercles de base des roues, cercles qui ont un rayon $r_b$ égal à cos($\alpha$) fois le rayon du cercle primitif. Pour la norme européenne cela fait environ $r_b = 0{,}94\ r$.
Le profil de chaque dent est alors une développante de cercle dont le cercle de base est justement le cercle de base de la roue (figure 8). Ces profils sont limités aux cercles de pied et de tête de chaque roue.




Le point de contact T entre les deux dents décrit la ligne d'action $M_1P_2$ jusqu'au moment où le contact n'a plus lieu, mais il y a souvent deux dents en contact ce qui permet d'avoir un mouvement régulier sans à-coup, ce qui est le but recherché comme on le voit sur la figure 9.

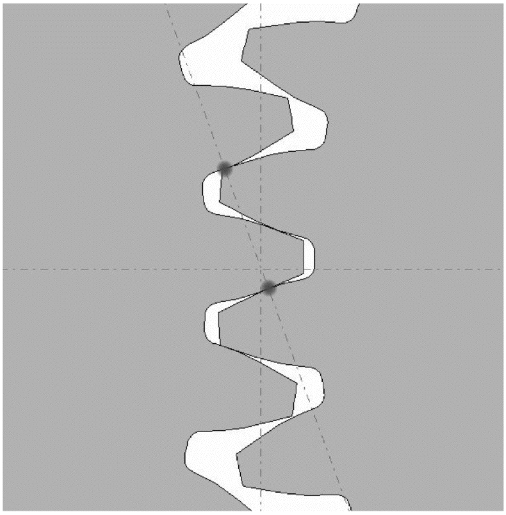


*Figure 9*

Le cercle de base de la roue ayant un rayon proportionnel à celui du cercle primitif tandis que les rayons des cercles de tête et de pied étant définis par une somme et une différence, pour que la construction soit possible il faut que le cercle primitif soit suffisamment grand. D'autres considérations mécaniques interviennent. Pratiquement on est sûr que l'engrènement se fera sans difficultés s'il y a plus de 17 dents.

### 4.3. Quelques références

Pour voir tourner un engrenage paradoxal : École Nationale d'Ingénieurs de Brest : http://www.enib.fr/mecatro

Pour connaître les normes sur les engrenages : http://www.ac-bordeaux.fr/Etablissement/LpDuperier/pedagogi/cours/maint/techno/techno.html

Pour voir quelques animations :
Sur le site IREM2 de l'IREM de Strasbourg on retrouve le texte précédent avec des animations à la place de certains dessins : http://irem2.u-strasbg.fr/spip/plan.php3

Pour plus de renseignements sur les engrenages paradoxaux :
Jacques Maurel, *Grincements de dents, Voyage mécanique autour du profil en développante de cercle*, in « Technologies & Formations », n° 105, p. 10-15, 2002. Article téléchargeable sur le site de l'auteur : http://maurel.meca.free.fr

Jean Lefort, *Les engrenages paradoxaux*, in « Pour la Science », novembre 2005, p. 64-68.