Exercices de ci, de là

Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices :

Exercice 464-1 (Georges Lion – *Wallis,* et Maurice Starck – *Nouméa*)

En le point Q milieu d'une corde [AB] d'un cercle C se coupent deux cordes [UV] et [XY] ; la droite (AB) coupe (UX) en M et (VY) en N. Montrer que Q est aussi le milieu de [MN].
On souhaite une solution sans calculs et, si possible, élémentaire.

Exercice 464-2 (Georges Lion - *Wallis*)

À tout point P intérieur à l'ensemble E délimité par le segment [AB] et deux demi-droites [Ax) et [By) à supports parallèles et de même sens on associe le point Q intérieur à E tel que les angles $\widehat{x\mathrm{AQ}}$ et $\widehat{\mathrm{BAP}}$ soient égaux de même que les angles $\widehat{y\mathrm{BQ}}$ et $\widehat{\mathrm{ABP}}$.
Trouver le lieu géométrique du milieu I de [PQ].

Exercice 464-3 (*Corol'aire* n° 54 Ex 3 : Jean-Claude Laugier – *Rochefort*)

Soit un ensemble A de nombres entiers compris entre 1 et 1 000 tel qu'aucun élément de A ne soit le double d'un élément de A. Quel est le nombre maximal d'éléments de A ?

Solutions d'exercices du bulletin n° 462

Exercice 462-1.

Résoudre dans **R** *le système de quatre équations à quatre inconnues :*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=0 \\ xyz+xyt+xzt+yzt=0 \\ xyzt=0 \end{cases}$$

(Corol'aire nº 27 – janvier 1997)

Solution de Mathilde Lahaye-Hitier *(IUFM Bretagne)* :

Commençons par résoudre le problème dans **C**. Il suffira ensuite de restreindre l'ensemble des solutions à **R**. D'après les relations entre coefficients et racines, les complexes x, y, z et t vérifient le système donné si et seulement si ce sont les racines du polynôme $x^4 = 0$. On en déduit : $x = y = z = t = 0$, et les solutions réelles du système sont : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Cette solution peut se retrouver aussi à la main de la façon suivante (on numérote les équations de (1) à (4)) :
D'après l'équation (4), ou bien x, ou bien y ou bien z ou bien t est nul. Sachant que le problème est symétrique en les variables, on peut supposer que c'est x qui est nul. Dans ce cas, le système devient :

$$y+z+t=0 \qquad (1')$$
$$yz+yt+zt=0 \qquad (2')$$
$$yzt=0. \qquad (3')$$

D'après l'équation (3′), ou bien y ou bien z ou bien t est nul. Sachant que le problème est symétrique en les variables, on peut supposer que c'est y qui est nul. Dans ce cas, le système devient

$$z+t=0 \qquad (1'')$$
$$zt=0 \qquad (2'')$$

D'après l'équation (2″), ou bien z ou bien t est nul. Sachant que le problème est symétrique en les variables, on peut supposer que c'est z qui est nul. Dans ce cas, le système devient

$$z+t=0 \qquad (1''')$$

et comme on a supposé $z = 0$, on obtient aussi $t = 0$. Finalement $x = y = z = t = 0$ est la seule solution possible.

Solutions du même type : Nicolas Patrois, Alain Corré (*Moulins*).
Autres solutions de Georges Lion (*Wallis*) et Albert Marcout (*Sainte-Savine*).

Exercice 462-2.

Pour quelles valeurs de k le coefficient du binôme de Newton $\begin{pmatrix} 2k-1 \\ k \end{pmatrix}$ *est-il impair ?*
(Claude Marcy (*Chatellerault*) – *Corol'aire* nº 59 – décembre 2004)

Solution de René Manzoni *(Le Havre)* :

Les lettres utilisées ci-après désignent des entiers naturels. En particulier, les lettres q, q' et q'' désignent des entiers naturels IMPAIRS. Sachant que

$$\begin{aligned}(2k-1)! &= 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-4)\cdot(2k-2)\\ &= 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k-1}\cdot(k-1)!,\end{aligned}$$

il vient

$$c=\binom{2k-1}{k}=\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k-1}}{k!}.$$

Après avoir constaté que l'entier c est impair pour $k = 2^0$ ou $k = 2^1$ ou $k = 2^2$, tandis qu'il est pair pour $k = 3$, on est amené à raisonner par récurrence.
Si l'on suppose $k! = 2^{k-1}\cdot q$, alors on a $(2k)! = 2^{2k-1}\cdot q'$. En effet,

$$\begin{aligned}(2k)! &= 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k}\cdot(k)!\\ &= 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{2k-1}\cdot q = 2^{2k-1}\cdot q'.\end{aligned}$$

Donc, pour tout k tel que $k = 2^a$, $k! = 2^{k-1}\cdot q$ et l'entier c est impair.
Par ailleurs, si l'on suppose que $k! = 2^x\cdot q$, avec $x < k - 1$, pour tout k tel que $2^a < k < 2^{a+1}$, on a alors $(2k)! = 2^y\cdot q'$ et $(2k + 1)! = 2^y\cdot q''$ avec $y < 2k - 1$, pour tout k tel que $2^{a+1} < 2k < 2^{a+2}$. En effet

$$(2k)! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k+x}\cdot q = 2^{k+x}\cdot q' = 2^y\cdot q'$$

et $y = k + x < 2k - 1$. De plus on vérifie que le cas de $(2^{a+1} + 1)$! ne fait pas exception.
Donc pour tout k tel que $2^a < k < 2^{a+1}$, l'entier c est pair.

Une solution d'Alain Corré *(Moulins)* qui nous renvoie à l'article de Vincent Lefevre sur le triangle de Pascal dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et qui nous précise : De plus ce cas est abordé dans le livre de Ian Stewart « L'univers des nombres » (Éditions Belin – Pour la science). Il donne comme contrôle de la parité de $\binom{m}{n}$, l'utilisation d'un théorème de Lucas. Considérons l'écriture en base 2 de m et n : $m=\sum_{i=0}^{+\infty} m_i 2^i$ et $n=\sum_{i=0}^{+\infty} n_i 2^i$, les n_i et les m_i prenant leurs valeurs dans $\{0 ; 1\}$. On définit l'implication bit à bit de ces deux nombres et on obtient : $(n \Rightarrow m)=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i 2^i$ où $a_i = 1$ sauf si $n_i = 0$ et $m_i = 1$, auquel cas $a_i = 0$.

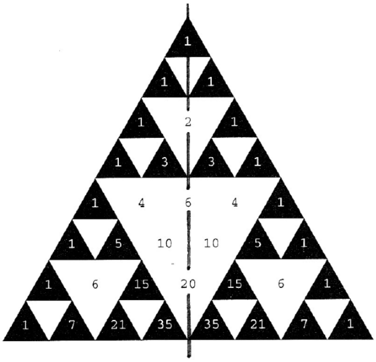
Si $(n \Rightarrow m)$ ne comporte que des 1 (dans ce cas, toutes les implications sont vraies), alors $\binom{m}{n}$ est un nombre impair, sinon, dès qu'il existe un $a_i = 0$, $(n \Rightarrow m)$ est fausse et $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ est un nombre pair. Cette méthode est utilisable avec Derive qui utilise une logique bit à bit pour les entiers.

Pour le problème posé :

VECTOR(IF((k 2.k – 1) = -1, 1, 0), k, 1, 50)
[1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
En Derive, la représentation binaire ne comportant que des 1 est l'entier −1. Les 1 représentant les nombres impairs se trouvent aux positions 1, 2, 4, 8, 16 et 32 correspondant aux k égaux à des puissances de 2.

P.S. Une image simple :

Dans le triangle de Pascal, si l'on colorie en noir les coefficients binomiaux impairs et en blanc les coefficients binomiaux pairs, on obtient le crible de Sierpinski ci-contre qui est une figure fractale :
Autour de la médiatrice du triangle, seuls les nombres de la forme $\begin{pmatrix} 2^{p+1}-1 \\ 2^p-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^{p+1}-1 \\ 2^p \end{pmatrix}$ pour $p = 0, 1, \ldots$ sont impairs.
Donc $k = 2^p$ avec $p = 0, 1, \ldots$ est la réponse au problème.



On peut naturellement justifier tout ceci par le calcul.

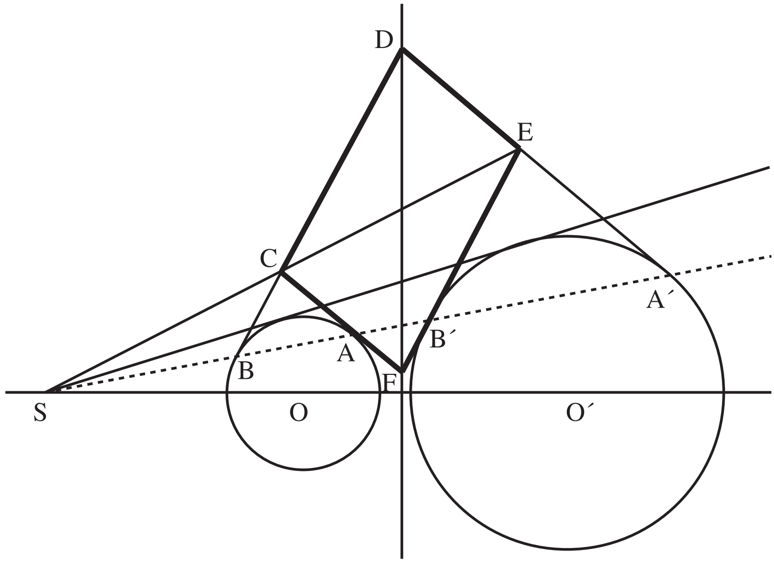
Serge Parpay (*Niort*)

Autres solutions de Georges Lion (*Wallis*) et Richard Beczkowski (*Dijon*).

Exercice 462-3.

Soit S *le point d'intersection des tangentes extérieures à deux cercles extérieurs. Par* S *on trace une droite qui coupe les deux cercles en quatre points. Les tangentes en ces quatre points forment un quadrilatère.*
Montrer que :
1. ce quadrilatère est un parallélogramme,
2. une de ses diagonales passe par S,
3. l'autre diagonale est l'axe radical des deux cercles.

Solution de Richard Beczkowski *(Dijon)* :



Le point S s'il existe [cercles (C) et (C′) de rayons différents] est le centre d'homothétie positive de ces deux cercles.

1) La sécante menée par S coupe (C) en A et B et (C′) en ses images A′ et B′. Les tangentes en A′ et B′ à (C′) sont les images des tangentes à (C) en A et B. Nous avons donc deux couples de droites parallèles qui *forment un parallélogramme* CDEF à condition que la sécante ne soit pas (SOO′).
2) Les tangentes en A et B se coupent en C et les tangentes en A′ et B′ en E. Les points C et E sont homologues dans l'homothétie et donc *alignés avec son centre* S.
3) Les triangles BAC et BA′D ayant leurs côtés deux à deux parallèles ou confondus sont homothétiques. Le premier étant isocèle, car CA = CB, le deuxième l'est aussi. Or DA′ = DB suffit à prouver que D a même puissance par rapport au deux cercles. À l'aide des triangles B′AF et B′A′E, on procède de même pour prouver que F a même puissance par rapport aux deux cercles. *La droite* (DF) *est axe radical des deux cercles.*

Autres solutions de : Annette Molard (*Strasbourg*), Marie-Laure Chaillou (*Épinay*), Georges Lion (*Wallis*), Alain Corré (*Moulins*), Albert Marcout (*Sainte-Savine*), Raymond Raynaud (*Digne*).