Quelques remarques sur les « répuns »

Richard Choulet(*)

Je lis dans l'accompagnement des programmes de S[1] en préambule à un exercice : « *Les nombres* 1, 11, 111, 1 111, *etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres* 1. *Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens* ». Ensuite on fait trouver quelques résultats plus ou moins évidents (jamais pour l'élève) en quatre questions.
Ce néologisme de rep-unit copié de l'anglais où d'ailleurs le trait d'union n'est pas écrit, n'a pas de raison d'être en français.
J'ai trouvé dans un livre le mot de « repunité » ; je ne trouve pas cela non plus des plus heureux vu la prononciation de « re » qui n'est pas « ré ». À la rigueur répunité aurait pu faire l'affaire mais en toute impunité, ce n'est pas facile à digérer.
Je propose de reprendre les choses à la base c'est-à-dire <u>rép</u>étition du « <u>un</u> » en dénommant répun un tel nombre (les esprits chagrins refuseront leur répun quotidien).

Ainsi le répun d'ordre n est le nombre $\mathrm{R}_n = \underbrace{1\cdots1}_{n}$.

Déjà à voir le nombre de sites de l'internet qui les abordent, on se doute que ces nombres ne doivent pas être si ridicules. Par ailleurs certaines propriétés (dont l'une figure – dans un cas simple – dans les commentaires évoqués) sont loin d'être évidentes en général.

Y a t-il des répuns puissances d'entiers ?

• La première constatation immédiate est : $\mathrm{R}_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

• R_n est un carré si et seulement si existe un entier c tel que : $9c^2 + 1 = 10^n$ ou encore $10^n - (3c)^2 = 1$. C'est bien sûr le cas de $\mathrm{R}_1 = 1^2$.
En examinant l'égalité modulo 8, il est clair qu'il ne peut y avoir de solution où $n > 2$ puisque $10^n \equiv 0\,[8]$ alors que $(3c)^2$ est 0, 1 ou 4. Le cas $n = 2$ n'offre pas de solution et $n = 1$ a été vu.

• Plus généralement, le problème est de démontrer que l'équation $9c^m + 1 = 10^n$ de triplet inconnu d'entiers $(c\,;\,m\,;\,n)$ n'a pour seule solution que celle donnée par $m = 1$,

(*) Lycée Fresnel Caen. richardchoulet@wanadoo.fr
(1) Collection Lycée – Série Accompagnement des programmes – Mathématiques baccalauréat séries S et ES – Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche – Direction de l'enseignement scolaire – Session 2004 – Centre national de documentation pédagogique.

$n = 1$ et $c = 1$. Dans les cas simples $n = 2$ ou même $n = 3$ ou 4, le fait qu'il n'y ait pas de solution apparaît assez rapidement. Le cas général a été démontré en 1999 par Bugeaud et Mignotte. Je ne sais quel est le principe de leur démonstration mais on peut observer ceci.
Prenons $m \geq 2$. Remarquons, raisonnant modulo 4, que $9c^m + 1$ n'est nul que lorsque c est du type $c = 4\mathrm{K} + 3$ avec m impair. Comme évidemment 10^n est nul dès que $n \geq 2$, nous cherchons dorénavant les solutions pour lesquelles $c = 4\mathrm{K} + 3$ et $m = 2k + 1$.
Autrement dit les solutions autres que celle trouvée sont données en résolvant maintenant :

$$9(4\,\mathrm{K}+3)^{2k+1} = 10^n.$$

En raisonnant alors modulo 8, K ne peut être pair puisque la seule possibilité serait avec $n = 2$ qui ne fournit rien. K est désormais impair. On arrive à :

$$9(8\,\mathrm{K}_1+7)^{2k+1}+1 = 10^n.$$

Maintenant si l'on examine le chiffre des unités des puissances impaires de $8\mathrm{K}_1 + 7$, il y a périodicité de 5 sur le K_1 et seul $\mathrm{K}_1 = 3$ donne R_1 pour chiffres des unités. Ainsi $\mathrm{K}_1 = 5\mathrm{K}_2 + 3$ qui conduit à l'équation :

$$9(40\,\mathrm{K}_2+31)^{2k+1}+1 = 10^n.$$

Regardons modulo 100 : pour avoir une solution le nombre doit se terminer par R_2. Il y a périodicité de 5 sur K_2 et l'on ne trouve que 11 pour finale modulo 100 que dans les cas $\mathrm{K}_2 = 5\mathrm{K}_3 + r$ avec $r = 0$ et $m = 10k + 7$, $r = 1$ avec $m = 10k + 3$, $r = 2$ avec $m = 10k + 1$ et enfin $r = 4$ avec $m = 10k + 9$. L'équation s'écrit donc :

$$9(200\,\mathrm{K}_3+40r+31)^{10k+m'}+1 = 10^n.$$

L'exploration, par exemple, de la branche issue de 111 ($r = 2$) conduit aux équations :

$$9(1\,000\,\mathrm{K}_4+111)^{50k+51}+1 = 10^n,$$

$$9(1\,000\,\mathrm{K}_4+311)^{50k+31}+1 = 10^n,$$

$$9(1\,000\,\mathrm{K}_4+511)^{50k+11}+1 = 10^n,$$

$$9(1\,000\,\mathrm{K}_4+711)^{50k+41}+1 = 10^n,$$

$$9(1\,000\,\mathrm{K}_4+911)^{50k+21}+1 = 10^n.$$

Ainsi nous constituons une suite double d'équations de la forme :

$$9(a_p\,\mathrm{K}+b_{i_p})^{c_p k+d_{j_p}}+1 = 10^n$$

d'inconnues K, k et n, où $\left(a_p\right)$ et $\left(b_{i_p}\right)$ sont strictement croissantes, c_p et $\left(d_{j_p}\right)$ sont croissantes. Ceci suggère qu'il ne peut y avoir de solution puisque, pour un exposant n donné, existe un entier p tel que $b_{i_p}^{d_{j_p}} > 10^n$. C'est très rapide : pour $n = 4$, les valeurs planchers à tester ($\mathrm{K} = k = 0$) pour avoir déjà un nombre terminé par trois zéros sont 317, 7 113, 11 111 et 1 919 qui sont largement plus grands que 10^4.

Aucun répun n'est une puissance d'entier avec un exposant plus grand que un.

Quelques constatations sur la décomposition en nombres premiers

• J'ai testé que R_2, R_{19} et R_{23} sont premiers mais la littérature donne également R_{317}, $R_{1\,031}$, $R_{49\,081}$ et $R_{86\,453}$ pour les plus récents !
• Par ailleurs au cours des décompositions apparaissent les nombres premiers suivants : 9 091, 9 901, 909 091, 99 990 001, 999 999 000 001, $(90)_8 91$ (l'indice indique le nombre de répétitions), $9_8 0_7 1$, $(900)_4(990)_3 991$ (du moins jusqu'à R_{50}) ce qui suggère l'obtention, avec ces répuns, d'une mine de nombres premiers de structure très typée.
• Jusqu'à R_{50}, seuls les cas 3, 4, 5, 7, 11, 17 et 47 donnent une décomposition en deux nombres premiers.
• En ce qui concerne des relations entre répuns (des précisions sont apportées plus loin) autres que celles faisant apparaître le systématique R_2 tous les indices pairs et R_4 tous les indices multiples de 4, nous avons par exemple :

$$R_{22} = R_2^2 \times 23 \times 4\,093 \times 8\,779 \times 21\,649 \times 513\,239,$$

$$R_{38} = R_2\, R_{19} \times (90)_8\, 91,$$

$$R_{46} = R_2\, R_{23} \times 47 \times 139 \times 2\,531 \times 549\,797\,184\,491\,917.$$

Le tableau ci-dessous fournit les décompositions en nombres premiers des répuns jusqu'à l'ordre 23. Les calculs ont été faits jusqu'à 53 (avec MAPLE®) mais l'internet en offre des tonnes !

Répun d'ordre	Décomposition en nombres premiers
2	11
3	3×37
4	11×101
5	41×271
6	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
7	$239 \times 4\,649$
8	$11 \times 73 \times 101 \times 137$
9	$3^2 \times 37 \times 333\,667$
10	$11 \times 41 \times 271 \times 9\,091$
11	$21\,649 \times 513\,239$
12	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9\,901$
13	$53 \times 79 \times 265\,371\,653$
14	$11 \times 239 \times 4\,649 \times 909\,091$
15	$3 \times 31 \times 37 \times 41 \times 271 \times 2\,906\,161$
16	$11 \times 17 \times 73 \times 101 \times 137 \times 5\,882\,353$
17	$2\,071\,723 \times 5\,363\,222\,357$

18	$3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times 52\,579 \times 333\,667$
19	1 111 111 111 111 111 111
20	$11 \times 41 \times 101 \times 271 \times 3\,541 \times 9\,091 \times 27\,961$
21	$3 \times 37 \times 43 \times 239 \times 1\,933 \times 4\,649 \times 10\,838\,689$
22	$11^2 \times 23 \times 4\,093 \times 8\,779 \times 21\,649 \times 513\,239$
23	11 111 111 111 111 111 111 111

Quelques relations entre répuns

• Remarquons qu'on a toujours la relation :

$$R_{m+n} = 10^m R_n + R_m = 9R_m R_n + R_m + R_n.$$

• Un résultat sympathique sur le PGCD : $R_m \wedge R_n = R_{m\wedge n}$, mais en général $R_m \vee R_n \neq R_{m\vee n}$ (mieux : toujours dès que m ou n n'est pas un).
En effet, on sait que $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m\wedge n} - 1$ pour tout entier $a \geq 2$ (c'est vrai d'ailleurs avec $a = \mathrm{X}$ et les polynômes de **R**[X] correspondants).
• Dès que $m \wedge n = 1$, R_{mn} est multiple de $R_m \times R_n$ et plus généralement R_{mn} est multiple de $R_{m\vee n}$.
C'est évident. Par

$$R_{mn} = \frac{10^{mn}-1}{9} = \frac{\left(10^m\right)^n - 1}{10^m - 1} \times \frac{10^m - 1}{9} = \frac{\left(10^n\right)^m - 1}{10^n - 1} \times \frac{10^n - 1}{9},$$

il est clair que R_m et R_n divisent R_{mn} en étant premiers entre eux.
Pour l'autre résultat, c'est la même idée en écrivant d'abord que $m = \delta m'$ et $n = \delta n'$ avec $m' \wedge n' = 1$. Puis de $mn = (\delta m'n') \times mn$ vient

$$R_{mn} = \frac{\left(10^{\delta m'n'}\right)^{\delta} - 1}{10^{\delta m'n'} - 1} \times \frac{10^{\delta m'n'} - 1}{9}.$$

Où j'élève les répuns au carré et j'arrive à démontrer(2)

Dans un article précédent (« Étude de motifs »), j'envisageais les carrés de nombres à motifs. Le cas le plus simple est effectivement celui de R_n où l'on répète le 1 à satiété. Examinons les carrés de ces nombres du point de vue du « cœur ». La suite des cœurs est périodique de période 9. J'établis que la suite des cœurs est donnée par

$$C_n = \mathrm{E}\left(\frac{R_n^2}{10^{n-1}}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{R_n^2}{10^{n+1}}\right) \times 100 = \mathrm{E}\left(\frac{10^{n+1}}{81}\right) - 100 \times \mathrm{E}\left(\frac{10^{n-1}}{81}\right).$$

La période 9 qui est annoncée n'est pas autre chose que celle de $\frac{1}{81}$ dans son développement décimal illimité.

(2) Voir BV numéro 457.

Répuns, relation fonctionnelle et structure

Nous avons vu plus haut que pour tous m et n entiers (convention $R_0 = 0$) :

$$R_{m+n} = 10^m R_n + R_m = 9R_m R_n + R_m + R_n.$$

Plusieurs pistes sont exploitables :

1. Quelles sont toutes les suites (u_m) qui vérifient :

$$u_{m+n} = \alpha u_m u_n + u_m + u_n \qquad (1)$$

($\alpha \in \mathbf{C}^*$, ici $\alpha = 9$) ?

2. Quelles sont toutes les suites (v_m) qui vérifient :

$$v_{m+n} = \beta^m v_n + v_m \qquad (2)$$

($\beta \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$, ici $\beta = 10$) ?

3. Peut-on structurer l'ensemble $\{R_m, m \in \mathbf{N}\}$?

Partie 1

On peut considérer $\alpha \in \mathbf{C}^*$; l'itération de la relation (1) conduit par récurrence à :

$u_{km} = \dfrac{(1+\alpha u_m)^k - 1}{\alpha}$ pour tous k et m, ce qui fournit donc $u_m = \dfrac{(1+\alpha u_1)^m - 1}{\alpha}$.

La relation (1), satisfaite pour $m = n = 0$, donne donc $u_0 = 0$ ou $u_0 = \dfrac{1}{\alpha}$ (auquel cas la suite est constante).

Conclusion : *Dans le cas* $\alpha = 9$, (R_m) *est la seule suite non constante vérifiant* (1) *pour laquelle* $R_1 = 1$.

Il sera intéressant de regarder ce qui se passe si l'on prend pour R_1 un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ et en particulier d'examiner quand R_m et R_n sont premiers entre eux, quel est leur PGCD…

Partie 2

L'itération de (2) donne $v_m = \dfrac{\beta^m - 1}{\beta - 1} v_1$. Donc on voit que (2), pour $\beta = 10$, caractérise en fait les répautres (rep-digits en anglais) obtenus avec $v_1 \in [2\,;9]$.

Par ailleurs les suites obtenues par (1) ou (2) ne coïncident que si et seulement si : $\beta - 1 = \alpha v_1$, ce qui est la moindre des choses pour notre application numérique de départ !

Partie 3

En préambule, on peut remarquer que la loi $*$ définie sur $\mathbf{C} \setminus \left\{-\dfrac{1}{\alpha}\right\}$ par :

$$z * z' = \alpha z z' + z + z'$$

munit cet ensemble d'une structure de groupe abélien dans lequel l'itéré d'ordre m d'un élément z est : $z^{(m)} = \dfrac{(1+\alpha z)^m - 1}{\alpha}$ avec $m \in \mathbf{Z}$.

Cette remarque montre donc qu'il est plus intéressant de définir $\mathcal{R} = \{R_m, m \in \mathbf{Z}\}$ où on aura pris pour $m < 0$: $\mathrm{R}_m = \dfrac{\mathrm{R}_{-m}}{10^m}$. De la sorte ($\mathbf{Z}$; +) est isomorphe à ($\mathcal{R}$; $*$) par $\varphi : m \mapsto \mathrm{R}_m$. Il en est clairement de même avec toute valeur de α en adaptant pour $m < 0$: $u_m = -\dfrac{R_{-m}}{(1+\alpha u_1)^m}$; dans le cas où u_m est entier pour $m \in \mathbf{N}$, une remarque déjà faite montre que $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$. C'est le cas avec, par exemple, $u_1 = 1$ et $\alpha = 7$, qui donnent $u_m = \dfrac{8^m - 1}{7}$.

Fonctions génératrices de répuns

Rappelons que la fonction génératrice ordinaire (f.g.o) d'une suite (u_m) est la fonction F définie sur $\mathbf{C}$ par $\mathrm{F}(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n$; la fonction génératrice exponentielle (f.g.e) quant à elle, est G définie par $\mathrm{G}(z) = \sum_{n \geq 0} u_n \dfrac{z^n}{n!}$. En posant $\mathrm{R}_0 = 0$, la fonction génératrice ordinaire de (R_m) est Θ telle que :

$$\Theta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n - 1}{9} z^n = \frac{z}{(1-10z)(1-z)}.$$

Pour rire voici la fonction génératrice ordinaire φ de (R_n^2) :

$$\varphi(z) = \frac{1}{81(1-100z)} - \frac{2}{81(1-10z)} + \frac{1}{81(1-z)}.$$

Les f.g.e respectives sont : $\Phi(z) = \dfrac{1}{9}\left(\mathrm{e}^{10z} - \mathrm{e}^{z}\right)$ et $\Psi(z) = \dfrac{1}{81}\left(\mathrm{e}^{100z} - 2\,\mathrm{e}^{10z} + \mathrm{e}^{z}\right)$.

Conclusion

Ils paraissaient bien inoffensifs ces répuns, bataillons de clones de UN alignés comme des petits soldats sans armes ! Mais quels ravages ils font dans les neurones quand on se met à penser à eux : on ne les oublie jamais.