Variations d'une fonction composée

L'étude des variations d'une fonction composée de deux fonctions monotones figure au programme de Première S.
L'opération EVAPM conduite en 2005 par l'équipe EVAPM-Lycée montre bien la difficulté rencontrée par les élèves dans cet apprentissage.
Boris Véron, après avoir essuyé quelques échecs dans l'enseignement de cette partie du programme, a modifié son cours et nous propose sa progression, en mettant l'accent sur la nécessité de faire réfléchir....

Fiche EVAPM

On donne ci dessous le tableau de variation de deux fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$.
En déduire, en justifiant la réponse, le tableau de variation de la fonction $f \circ g$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Item	Identification	Conditions d'attributions du code 1
01	RE	Tableau de variation de $f \circ g$ correct (avec ou sans justification)
02	Justification	Comme g croît sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et prend sur cet intervalle des valeurs négatives et que f décroît sur $]-\infty, 0]$, $f \circ g$ décroît sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$
03	Justification	Comme g croît sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et prend sur cet intervalle des valeurs positives et que f croît sur $[0, +\infty[$, $f \circ g$ croît sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
04	Erreur	L'élève donne le même tableau que celui de f (mêmes intervalles)
05	Erreur	L'élève a traité $g \circ f$

Analyse de la tâche et remarques

Étudier les variations d'une fonction composée sans l'aide d'une calculatrice. Ce qui oblige l'élève à une compréhension de la notion de variations et de ses conséquences sur l'ordre. L'élève peut reconnaître ici une situation classique pour laquelle il dispose d'un théorème :

Soit une fonction f définie et monotone sur un intervalle I et une fonction g définie et monotone sur un intervalle J contenant l'image de I par f.
Si f et g varient dans le même sens, respectivement sur I et sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

Si f et g varient en sens contraires, respectivement sur I et sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Il peut alors appliquer facilement ce théorème en constatant qu'il s'applique directement à chacun des intervalles I suivants : $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$ et $\left[0\,;+\infty\right[$.

Cette démarche est la procédure experte attendue, mais l'élève peut aussi procéder d'une façon à la fois plus progressive et plus intuitive. Il peut par exemple « voir » qu'il lui faut étudier $g \circ f$ sur chacun des trois intervalles définis ci dessus. Mais il sait aussi (plus ou moins confusément – théorème en acte) que le tableau de variation s'en déduira à partir des valeurs de $g \circ f$ aux bornes de ces intervalles.
Dans ce cas (qui encore une fois ne correspond pas à ce qui est attendu), il ne faut pas espérer des justifications correctes, mais le tableau de variation, lui, sera correct, et montrera au moins une bonne compréhension de la situation.
La justification peut aussi utiliser les définitions de la monotonie et de la composée.

La difficulté étant dans la détermination de l'intervalle intermédiaire $[g(a)\,;g(b)]$.

Quelles réponses aurait-on en remplaçant 0 par –3 pour $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et le maximum de f ?

Passation 2005

Effectif pris en compte : 2 079.

Item	**Identification**	**Condition d'attribution du code 1**	Ensemble
A		L'élève a abordé la question	62 %
01	RE	Tableau de variation de $f \circ g$ correct (avec ou sans justification)	12 %
02	Justification	Comme g croît sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ et prend sur cet intervalle des valeurs négatives et que f décroît sur $]-\infty,0]$, $f\circ g$ décroît sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$	7 %
03	Justification	Comme g croît sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et prend sur cet intervalle des valeurs positives et que f croît sur $[0,+\infty[$, $f\circ g$ croît sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$	7 %
04	Erreur	L'élève donne le même tableau que celui de f (mêmes intervalles)	21 %
05	Erreur	L'élève a traité $g\circ f$	8 %
06		Question exclue	6 %
07		Question non abordée	27 %

Analyse des résultats

On constate que si 94% des élèves sont censés pouvoir résoudre cet exercice (les professeurs pouvaient exclure les questions portant sur des sujets qu’ils n’avaient pas encore traités), seulement 62% l’ont abordé. Un petit pourcentage seulement (12%) réussit à donner un tableau correct et la moitié d’entre eux à le justifier ; un quart donne un tableau avec les mêmes variations que pour f mais sans modifier les intervalles. Ils ont retenu que la composition par une fonction croissante ne modifie pas le sens de variation, sans porter attention aux intervalles de départ et d’arrivée. Enfin, une très faible proportion intervertit l’ordre de f et g dans la lecture de $g \circ f$.
Théorème en acte : une règle similaire à la règle des signes pour les sens de variations est appliquée au produit et non à la composée. Un bon nombre d’élèves fait cette confusion.
Parmi un échantillon de cinquante copies, on ne trouve qu’une fois une expérimentation avec la calculatrice. Dans 20 % des copies $-$ et 0 apparaissent dans les deux lignes du tableau : l’élève a compris que ces valeurs avaient un rôle à jouer, mais il ne sait pas trop lequel !
Il est frappant qu’aucun élève, dans les essais de justification, n’ait recours à la définition du sens de variation.
Le faible taux de réussite n’est pas surprenant, la forme de l’exercice n’est pas classique : il est vraisemblable que les élèves aient travaillé seulement sur un petit nombre d’exemples de composées, et à partir de fonctions explicites et non sur des tableaux de variations.
Les déclarations des professeurs montrent qu’ils n’apprécient généralement pas ce sujet : la question des variations d’une fonction composée est parmi celles qui sont les plus souvent citées comme pouvant être supprimées du programme, car elle est jugée difficile et superflue.
L’expérience montre qu’elle n’est acquise que par très peu d’élèves, au moins lorsqu’il ne s’agit pas que de fonctions monotones. Peut-être serait-il plus réaliste en classe de première de restreindre l’utilisation de ce théorème à des fonctions monotones.

Article de Boris Véron

Les textes officiels précisent qu’en Première S, l’étude des variations de la fonction $v \circ b$ sera faite dans le seul cas où v et b sont des fonctions monotones.
En évitant soigneusement la difficulté des ensembles de définition, on limite la réflexion et on crée un obstacle didactique pour l’étude complète.
Comment alors enseigner cette partie ? Après quelques échecs j’ai modifié mon cours et je traite désormais cette partie de la manière ci-dessous.
Je me suis largement inspiré de l’exercice 6, p. 20 de la brochure APMEP nº 154 : Pour un enseignement problématisé T. 2.

1. Séance nº 1, je distribue la fiche suivante :

Variations d'une fonction composée

On connaît les renseignements suivants à propos des fonctions g et h.

- g est définie sur $[-10 ; 14]$. Elle est croissante sur $[-10 ; -4]$ et sur $[6 ; 14]$, décroissante entre -4 et 6.
- $g(-10) = -7$, $g(-5) = g(0) = g(7) = 0$, $g(-4) = 3$, $g(6) = -1$, $g(10) = 5$, $g(14) = 13$.
- h est définie sur $[-20 ; 15]$. Elle est décroissante sur $[-20 ; 5]$ et croissante sur $[5 ; 15]$.
- $h(-20) = 12$, $h(0) = h(8) = 0$, $h(5) = -3$, $h(15) = 11$.

On appelle f la composée $h \circ g$.

1. Construire les tableaux de variations de g et de h.
2. Déterminer le meilleur encadrement possible des nombres suivants :
$$f(-10), f(-4), f(6) \text{ et } f(14).$$
3. Déterminer le meilleur encadrement possible des nombres suivants :
$$f(-8), f(-2), f(2) \text{ et } f(10).$$
4. Dans chaque cas déterminer lequel des deux nombres est le plus grand
$$f(-8) \text{ ou } f(-6) ;$$
$$f(-2) \text{ ou } f(2) ;$$
$$f(7) \text{ ou } f(8) ;$$
$$f(9) \text{ ou } f(11) ;$$
$$f(12) \text{ ou } f(13).$$
5. Construire le tableau de variations de f.

La composée de deux fonctions est déjà connue. Le travail se passe en autonomie presque totale. Je passe dans les rangs après 10 minutes, je n'interviens que très peu. Une séance ne suffit pas à tous pour finir les cinq questions, le travail est à terminer pour la séance suivante.

2. Séance nº 2 :

Bien entendu, on commence par faire un bilan. On pointe notamment l'impossibilité de répondre au quatrième point du nº 4.
Ensuite, on peut au choix :

- Demander de supprimer toutes les informations inutiles dans un exercice similaire.
- Redonner un exercice similaire (une des fonctions peut être donnée par sa représentation graphique) en supprimant des informations dont certaines essentielles. Les élèves devront alors se rendre compte qu'ils ne peuvent pas répondre et qu'ils doivent demander exactement ce dont ils ont besoin.

3. Dernière partie :

Enfin, il faut passer au cas où les fonctions sont données par des expressions algébriques.

Par exemple f avec $f(x) = \left(x^2 - 16\right)^2$. Les élèves en très grande majorité sont revenus aux tableaux de variations et se sont rendus compte qu’il fallait y insérer les racines de $X^2 - 16$.

Les théorèmes peuvent maintenant être écrits, les élèves sont avertis qu’ils ne sont pas d’utilisation simple, on les illustre sur deux ou trois exemples du type :

h est (dé)croissante sur I à valeurs dans I′,
g est (dé)croissante sur I′,
donc $g \circ h$ est (dé)croissante sur I.

4. Bilan et évaluation

Évidemment en évaluation, j’ai donné des exercices similaires (voir exemple en annexe), ils ont été réussis par une très grande majorité de mes élèves.

Plusieurs points sont certains :

- Le théorème est mieux compris qu’avec les méthodes plus classiques.
  Les années précédentes, j’enseignais ce théorème avec des fonctions données par des expressions algébriques. La possibilité d’avoir des valeurs exactes ne contraint pas les élèves à comparer les « parcours » des valeurs numériques à travers les fonctions.
- L’activité fait réfléchir.

Il faudrait évaluer les compétences acquises à long terme.

5. Annexes : Deux exemples d’exercices donnés en évaluation

Variations de la fonction $g \circ f$

Les variations des fonctions f et g sont représentées par les tableaux ci-dessous.

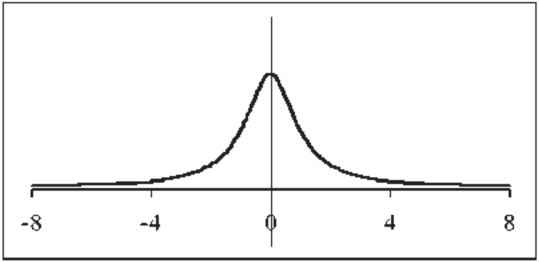
x	$-\infty$		-10		0		10
f	0	↗	20	↘	0	↘	-5

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
g	0	↗	10	↘	0	↘	-10

Construire et justifier le tableau de variations de $g \circ f$.

Variations d'une fonction composée

f est une fonction définie sur $\mathbf{R}$, g est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^2 - 1$.
On donne ci-dessous l'allure de la représentation graphique de f :



Étudier le sens de variation de $f \circ g$ sur $\mathbf{R}$

Une question (sans rapport avec les variations) que j'aime bien proposer aux élèves est :

On sait maintenant que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

f est la composée $h \circ g$ de g et d'une fonction h. Retrouver une expression de h.