À propos d'un exercice en classe de Troisième

Frédérique Fournier

Le point de départ

Une classe de troisième studieuse.

Un élève qui regarde fixement le terme « *boîte cubique* », évoquée dans l'énoncé et qui finit par marmonner timidement :
– C'est quoi un cube déjà ?

L'interrogation, d'abord muette, du prof vers la classe :
– Quelqu'un peut l'aider ?

Silence…

Puis, la révélation ! En toute franchise un de ses camarades s'exclame :
– Tu sais bien, ça a quatre carrés et c'est en relief.

Soupir de soulagement de tous, petit brouhaha d'approbation général : « ça » était bien un cube ; d'ailleurs notre élève, ainsi parfaitement renseigné, se replonge, avec succès, dans l'exercice… (qui, soit dit en passant, se résumait à une recherche de PGCD).

Je n'intervins pas plus ce jour-là, sauf (réflexe de prof peut-être) par un interrogatif « quatre carrés en relief ? », qui fut immédiatement corrigé par l'un des « bons » en : *un solide à six faces carrées bien sûr !* … sous le regard bien vague de certains…

Pourtant ces cubes, il les ont manipulés, reconnus, empilés, décrits à l'école élémentaire et en Sixième où ils en ont découvert et fabriqué des patrons : il les ont retrouvés en Quatrième agrémentés du théorème de Pythagore, et tout cela pour en arriver, en Troisième, « à quatre carrés en relief » !

Par suite, il devenait impératif, avant de plonger vers « les sections de parallélépipède et de cubes par des plans parallèles aux arêtes ou au faces » du programme de Troisième, de prendre du recul sur leur préhension de l'espace en les mettant en situation !

Au hasard de mes lectures, le fascicule « Les Narrations de Recherche de l'école primaire au lycée » (co-édition IREM de Montpellier – APMEP 2002) m'offre le texte suivant :

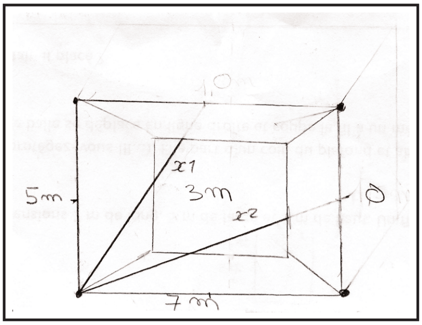
> *Une salle de classe a pour dimensions 7 m de long, 5 m de large, et 3 m de haut.*
> *Un fil est tendu verticalement du plafond au sol.*
> *Une balle de revolver traverse la salle (protégez-vous !!!…). Elle part d'un des*

coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1 m au-dessus du sol.
À quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

Quelle belle occasion de s'immerger dans un solide…

Premières réactions, premières interrogations, premières avancées

Tout d'abord il faut surmonter la lecture de l'énoncé (coin, fil tendu du sol au plafond, base d'un mur en son milieu, …) et la perception de ce qui se passe (traverse, trajectoire), puis en tenter la représentation par un schéma :



Une ébauche de représentation en perspective avec ligne de fuite ouvre le ban, mais le problème de segments perçus comme coplanaires surgit très vite dans l'identification de la trajectoire. D'où émergence de diverses possibilités selon le « mur d'impact » ou « le coin de départ » retenu et premières « vraies » interrogations :

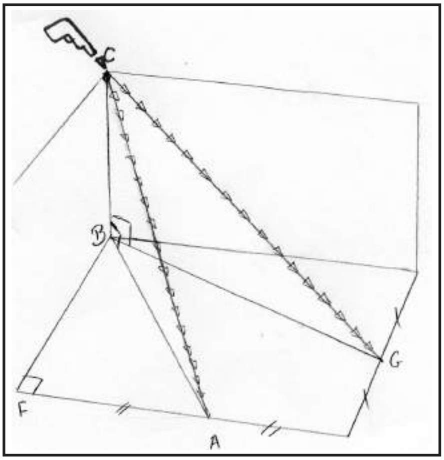
– Combien de trajectoires possibles ?
– Contre un mur, c'est bien à éliminer ?
– La longueur de ces trajectoires est-elle la même ?
– Quelle preuve apporter ?

Il fallait donc mieux voir ! Le secours vint de … la salle dans laquelle se déroule la leçon : c'est bien une salle de classe, comme dans l'énoncé, avec un « coin, base du mur, … » ; mais quid des trajectoires ? Les élèves lèvent les yeux, regardent, identifient et finissent par se déplacer dans la classe :

Le point de départ ? Là en haut, enfin tu vois bien ?
L'arrivée, là en bas !, cartable à l'appui, les bras écartés pour symboliser le trajectoire…

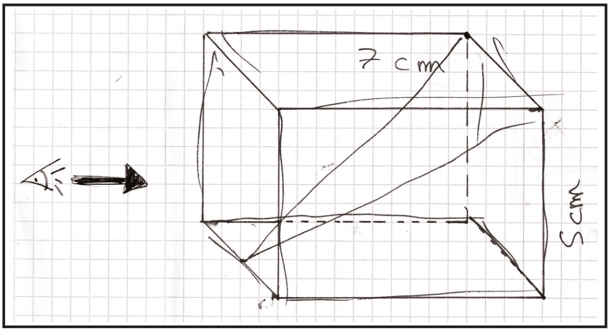
La trajectoire « contre le mur » est rapidement écartée, puisque la balle ne traverse pas la pièce mais longe l'un de ses côtés.

De fait, la première « vraie » étude présentée consiste en la donnée « d'un coin de départ avec deux trajectoires possibles » appuyée sur une ébauche en perspective :



Ébauche sur laquelle il apparaît, (aux yeux de leurs concepteurs), que l'une des deux trajectoires était plus courte, mais le recours à la visualisation dans la classe leur est nécessaire pour emporter l'adhésion de tous.

Deuxième étude présentée : « deux coins de départ pour un même point d'arrivée »



Au fait, la longueur des trajets est-elle, ici aussi, identique ?

Dans ce cas, la représentation (on s'approche doucement de la perspective cavalière) conduit le groupe à s'interroger en ces termes : *« si on imagine une vue de gauche de la pièce, les deux côtés sont symétriques par rapport à un plan qui couperait la pièce en longueur en deux pièces identiques, donc les trajectoires sont symétriques et ont bien la même longueur ».*
Même longueur dans la réalité donc, mais pas sur le dessin : l'un des aspects de la représentation en perspective était alors mis en relief.

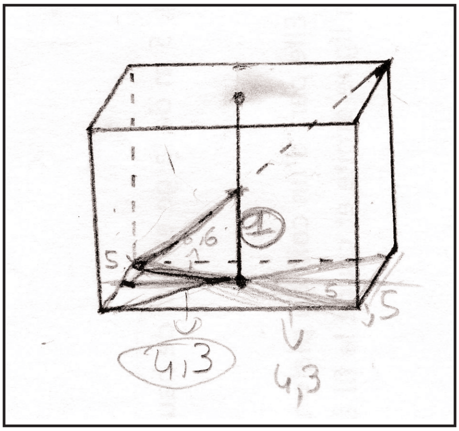
Le cas de la trajectoire réglé, reste à s'intéresser au positionnement du fil :

Le positionnement *a priori* :

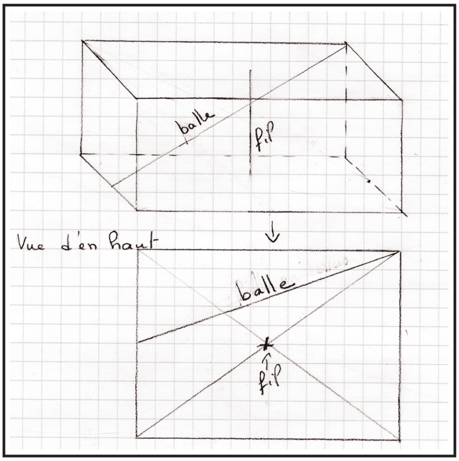
➔ spontanément le fil fut placé au centre de la salle sur les dessins.

Ce qui pouvait donner :

…



Mais la réaction immédiate de certains : la balle le coupait-elle vraiment ?



À nouveau, la confrontation dans la classe permet de répondre : si on place le fil au centre, il n'est pas coupé par la balle !

Un groupe proposa une vue de dessus : non, décidément, ça ne se coupait pas.

Nouvelle découverte sur la perspective : « les segments qui apparaissent sécants sur un dessin en perspective ne le sont peut-être pas dans la réalité ».

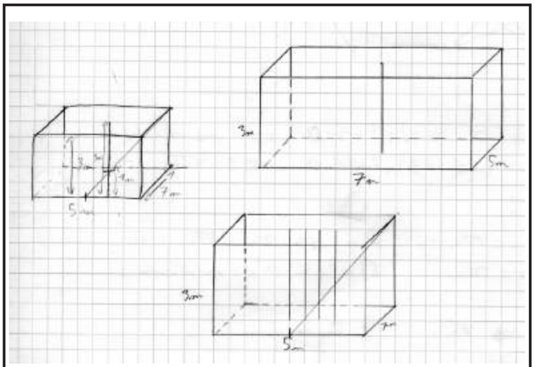
Mais le problème du placement de la ficelle n'est toujours pas résolu ! D'où leurs interrogations :

– Comment placer le fil sur le dessin ?
– Où commence-t-il sur le sol ? Où l'arrêter sur le plafond ?

Une première idée : un groupe explique que *« puisque le fil mesure 1 m et la salle 3 m de haut, 1, c'est le tiers de 3 donc le fil est au tiers de la trajectoire en partant de l'impact »*.
Mais la méfiance induite par les illusions de la perspective conduit l'un d'eux à se rassurer en interrogeant : *« Et sur mon dessin, je peux bien le placer au tiers ? »*, prudence oblige !

Mais le fil n'est toujours pas placé !

L'un des groupes explique qu'après divers essais, il avait dû chercher « l'ombre de la trajectoire sur le sol » et qu'ainsi le fil pouvait se déplacer le long de cette ombre, il serait toujours coupé par la balle.



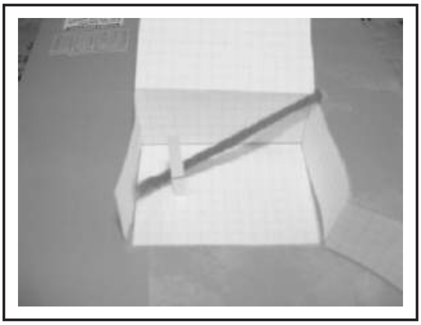
Les premières manipulations (enfin !)

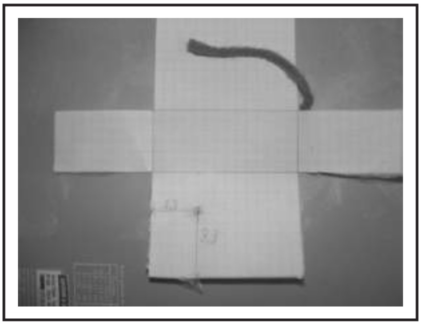
Mis à part le groupe qui a évoqué « l’ombre de la trajectoire sur le sol », les autres n’avancent guère avant d’observer discrètement divers objets négligemment mis à leur disposition : solides creux, boîte à chaussures sans couvercles, boîte de craies vide, … Il s’agissait maintenant de passer à un objet de plus petite dimension pour manipuler et visualiser ce qui se passait…

Le problème était quasi-terminé : ils avaient « vu » LE triangle rectangle qui leur manquait tant pour aller de l’avant…

Les premiers exposés :

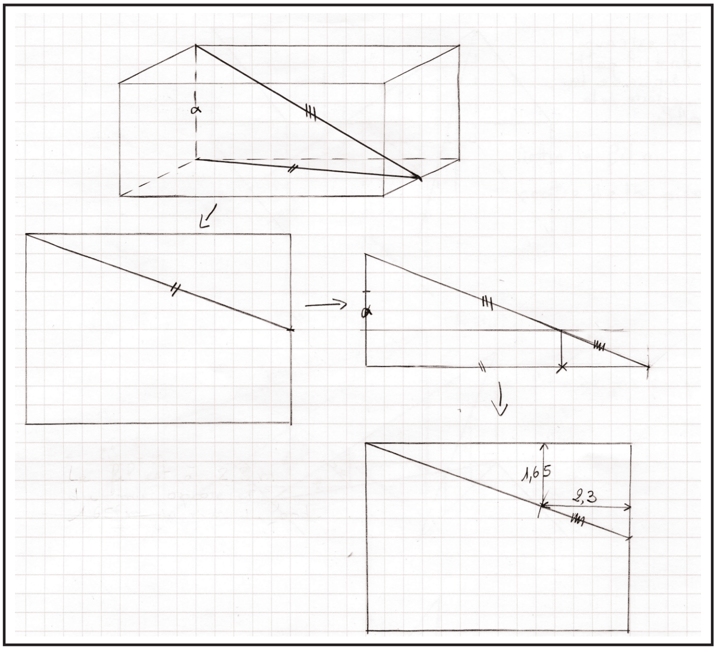
Tandis que certains s’échinent encore à « voir » ce qui se passait pour calculer, rédiger, …, un groupe se lance très vite dans la réalisation d’une maquette à l’échelle 1/100 :



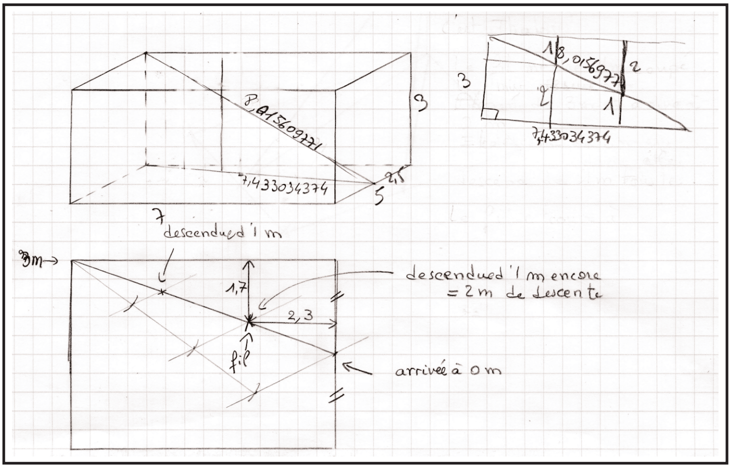


Apportant la première réponse chiffrée : 2,3 cm et 3,3 cm !

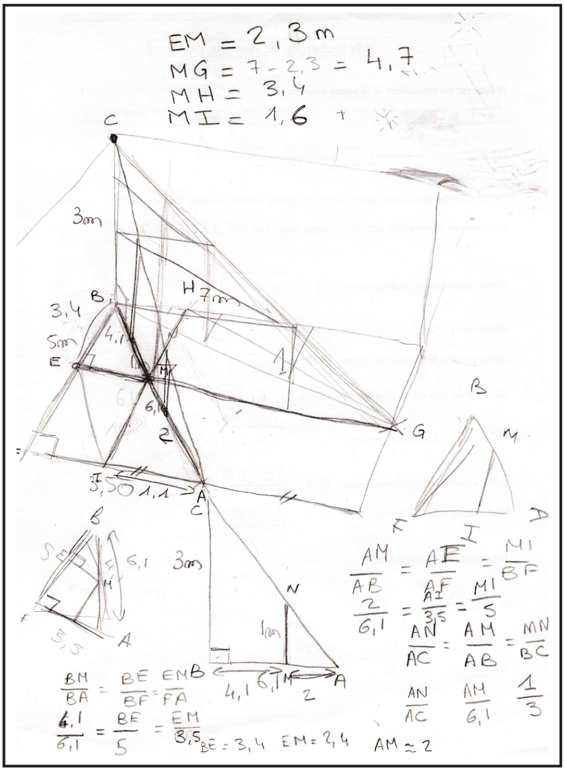
D’autres, toujours sans aucun calculs, mais avec des reports de longueurs, produisirent cette histoire sans parole :



On entend aussi « c’est Thalès ! », et triomphants :



Mais on trouve aussi des calculs …



Tous les groupes obtiennent un résultat, mais très peu s'interrogent sur la nécessité ou non de déterminer les « vraies » longueurs de la trajectoire et de son ombre…..

Bref, deux heures pour

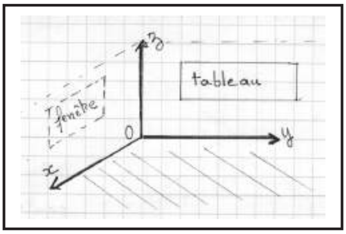
Un sourire,

La rencontre de quelques naïvetés rafraîchissantes :

- En mesurant la classe peut-être y a-t-il un coefficient de proportionnalité avec celle de la classe de l'énoncé ?
- En utilisant une structure cubique assortie d'un *« imagine ce côté plus long… »* qui débloque une situation délicate.

Mais aussi pour quel profit !

- Apprendre à éviter les pièges de la représentation lorsqu'elle est utilisée dans la résolution de problèmes « ça se coupe parce que … ».
- Comprendre et apprendre à résoudre un problème grâce à des dessins en vraie grandeur, mais se rendre compte que seule la mathématisation du problème permet de valider la solution.
- Apprendre à tirer parti de la salle de classe en la reconnaissant comme un modèle de « pavé droit » pour s'y situer et l'employer dans différents exercices de géométrie dans l'espace de Troisième et à venir…
- Et peut-être qu'au détour de leur rencontre avec les repères orthonormés directs de l'espace, visualiser plus facilement ces fameux repères comme les trois arêtes là, dans le coin gauche de la salle…



Et surtout, que tous, sans exception, avaient dû fournir un vrai travail de réflexion, des meilleurs aux moins bons en passant par ceux qui « moi de toutes façons j'y vois rien dans l'espace ».

Des questions

Que ce soient les groupes qui ont travaillé sur des dessins, ou ceux qui ont choisi d'opérer sur une maquette ou triangles, toutes leurs représentations étaient à l'échelle 1/100. Le résultat lu sur la règle a donc été considéré comme vrai et précis. Les autres, utilisant le calcul, pensaient qu'afficher tous les chiffres donnés par la calculatrice donnait le résultat exact : on était loin du 5/6 ou 7/3 pourtant téléguidés par la référence au théorème de Thalès (et espérés par le professeur…).
Au fait, a-t-on le droit de refuser à nos élèves la (recherche et la) validation d'une solution par la simple observation d'une maquette, ce qui, pourtant, est la pratique quotidienne de nos meilleurs ingénieurs (en dynamique des fluides par exemple), doit-on systématiquement leur reprocher toute troncature, alors que je suis incapable de leur « montrer » le nombre π…