Jouons avec les nombres

Nous avons le plaisir de vous offrir, ci-après, quelques pages de la brochure « POUR UNE CULTURE MATHÉMATIQUE ACCESSIBLE À TOUS », rédigée et éditée par **le « CREM »** (Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) **belge**.
Co-diffusée par l'APMEP, cette brochure de 576 pages en A4 est présentée, sous le n^{o} 855, en page 31 de la plaquette « Visages … 2005-2006 ».
Nous remercions nos amis du CREM et … nous conseillons vivement à nos lecteurs de se procurer la brochure !

Henri BAREIL et Christiane ZEHREN

I. Des problèmes magiques expliqués par la numération de position et l'algèbre

De quoi s'agit-il ?

Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie. L'explication est à la fois fondée sur un passage à la formalisation et sur une bonne compréhension de la numération de position.

Enjeux

Expliquer un phénomène numérique qui peut paraître à première vue magique.
Transposer un énoncé en une suite de calculs.
Apprendre à formaliser cet énoncé et saisir par là la portée du symbolisme et du calcul algébrique.
Exprimer un nombre sous la forme d'une somme ou d'un produit de puissances de 10.

De quoi a-t-on besoin ? Prérequis

Le vocabulaire propre aux quatre opérations.
Le calcul sur les fractions.
La différence entre chiffre et nombre ainsi que l'utilisation de ces deux notions à bon escient.

1. Deviner le domino

1.1. Comment s'y prendre ?

Un ensemble de dominos est étalé sur la table. Les élèves en choisissent un que l'enseignant va deviner. Pour ce faire, il demande aux élèves d'effectuer les calculs suivants.

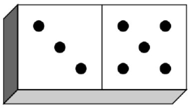
Multiplier le nombre de gauche par 5. Ajouter 7 au résultat obtenu. Multiplier le résultat par 2. Retrancher 14. Ajouter le nombre de droite du domino.

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à deux chiffres. Le chiffre des dizaines correspond au nombre de gauche du domino et le chiffre des unités au nombre de droite du domino. L'élève donne le résultat obtenu au bout de la procédure proposée par l'enseignant et ce dernier retrouve sans mal le domino choisi. Il répète l'expérience à plusieurs reprises.

L'objectif de cette activité est d'amener les élèves à expliquer le phénomène. Ils auront vite fait de remarquer que les deux chiffres du nombre qu'ils obtiennent désignent les points du domino. Il reste maintenant à comprendre pourquoi il en est ainsi.

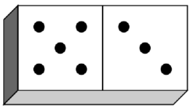
Comment expliquer qu'on obtient un nombre dont le chiffre des dizaines correspond à la valeur de gauche du domino et celui des unités à la valeur de droite ?

On commence par écrire les calculs qui ont été faits mentalement et on les présente comme ci-dessous.

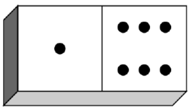


$$\boxed{3} \xrightarrow{\times 5} \boxed{15} \xrightarrow{+7} \boxed{22} \xrightarrow{\times 2} \boxed{44} \xrightarrow{-14} \boxed{30} \xrightarrow{+5} \boxed{35}$$

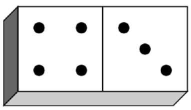
Si l'élève est de l'autre côté du domino, sa gauche et sa droite sont inversées et son résultat est 53, nombre qui désigne le même domino.



$$\boxed{5} \xrightarrow{\times 5} \boxed{25} \xrightarrow{+7} \boxed{32} \xrightarrow{\times 2} \boxed{64} \xrightarrow{-14} \boxed{50} \xrightarrow{+3} \boxed{53}$$

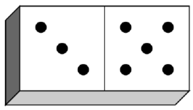


$$\boxed{1} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5} \xrightarrow{+7} \boxed{12} \xrightarrow{\times 2} \boxed{24} \xrightarrow{-14} \boxed{10} \xrightarrow{+6} \boxed{16}$$



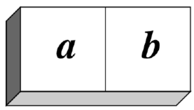
$$\boxed{4} \xrightarrow{\times 5} \boxed{20} \xrightarrow{+7} \boxed{27} \xrightarrow{\times 2} \boxed{54} \xrightarrow{-14} \boxed{40} \xrightarrow{+3} \boxed{43}$$

La deuxième étape vers la compréhension du phénomène consiste à développer quelques exemples en effectuant partiellement les calculs de manière à conserver tout au long du déroulement les deux nombres du domino. Nous présentons ci-dessous une possibilité parmi d'autres.



$$\boxed{\mathbf{3}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{\mathbf{3}\times 5} \xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{3}\times 5)+7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{(\mathbf{3}\times 10)+14} \xrightarrow{-14} \boxed{\mathbf{3}\times 10} \xrightarrow{+\mathbf{5}} \boxed{\mathbf{3}\times 10+\mathbf{5}}$$

Une difficulté apparaît lorsqu'il s'agit de multiplier par 2 une somme dont un des termes est un produit.
La dernière étape consiste à généraliser les observations faites jusqu'ici sur des exemples numériques. Pour ce faire, nous inventons un « domino algébrique ».



$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+7} \boxed{5\boldsymbol{a}+7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{10\boldsymbol{a}+14} \xrightarrow{-14} \boxed{10\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+\boldsymbol{b}} \boxed{10\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

Une fois la procédure de calcul décortiquée et formalisée, l'explication du phénomène apparaît clairement. Il reste cependant à interpréter l'écriture $10a + b$ comme l'écriture qui produit le nombre dont les chiffres sont a et b (dans cet ordre).

1.2. Prolongement possible

Le prolongement proposé est comparable à l'activité qui vient d'être exploitée, si ce n'est que l'on découvrira deux inconnues. Cette version du problème est valable pour 2003, l'enseignant devra l'adapter chaque année.

L'enseignant s'adresse à une personne et lui propose un tour qui lui permettra de trouver l'âge de n'importe qui. Il lui propose de le tester et lui dit :

> Pense un nombre compris entre 0 et 9. Multiplie-le par 50. Ajoute 6 au produit obtenu. Multiplie le résultat par 2. Ajoute 1 991 si ton anniversaire est passé et 1 990 s'il n'est pas encore passé. Enfin, retranche ton année de naissance. Avec le nombre obtenu, tu peux retrouver ton âge.

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à trois chiffres : le chiffre des centaines correspond au nombre choisi et le nombre formé des deux derniers chiffres, à son âge. Cette procédure ne nécessite pas en réalité de restreindre le choix initial aux nombres compris entre 0 et 9. Si un élève choisit un nombre composé de deux chiffres, son résultat est un nombre à quatre chiffres dans lequel les deux premiers chiffres forment le nombre initial. La limitation à un chiffre a pour seul but de simplifier l'explication.

Pour comprendre cette situation, il est indispensable de passer par la formalisation et ensuite d'analyser l'expression obtenue. Nous développerons le cas où l'anniversaire de la personne est déjà passé, l'explication étant similaire dans l'autre cas.

Soit a, le nombre choisi.

Soit b, l'année de naissance de la personne.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 50} \boxed{50\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+6} \boxed{50\boldsymbol{a}+6} \xrightarrow{\times 2} \boxed{100\boldsymbol{a}+12} \xrightarrow{+1\,991} \boxed{100\boldsymbol{a}+2\,003} \xrightarrow{-b} \boxed{100\boldsymbol{a}+2\,003\text{-}\boldsymbol{b}}$$

Pour ce qui est du chiffre des centaines, on retrouve bien le nombre choisi et l'expression algébrique $100a$ est claire. Pour ce qui est de l'âge de la personne, il reste à analyser à quoi correspond le $2\ 003 - b$.

Une fois la logique comprise, l'enseignant peut demander aux élèves d'adapter la situation pour l'année suivante. Il peut également leur demander d'inventer des variantes. La proposition suivante en est un exemple.

Choisis un nombre. Multiplie-le par 50. Ajoute 7 au produit. Multiplie le résultat obtenu par 2. Ajoute 1 989 si ton anniversaire est passé et 1 988 s'il n'est pas encore passé. Enfin, retranche ton année de naissance.

Une variante consiste à expliquer un tour dans lequel trois inconnues interviennent. Chaque élève doit disposer d'une calculatrice et effectuer les opérations qui lui sont dictées. En fin de parcours, sa date de naissance apparaîtra sur l'écran de la calculatrice.

Encode le jour de ta naissance. Multiplie ce nombre par 20. Ajoute 3. Multiplie le résultat obtenu par 5. Ajoute le mois de ta naissance. Multiplie le nombre obtenu par 20. Ajoute 3. Multiplie le résultat obtenu par 5. Ajoute les deux derniers chiffres de ton année de naissance. Ôte 1 515, date de la bataille de Marignan. Que reconnais-tu sur l'écran ?

Si on pose que x est le jour de naissance, y le mois de naissance et z le nombre formé des deux derniers chiffres de l'année de naissance, on obtiendra 10 000x + 100y + z.

2. Toujours 222

2.1. Comment s'y prendre ?

Le professeur demande à chacun de réaliser les étapes suivantes.

Choisis trois chiffres différents (en évitant le 0). Additionne-les. Écris tous les nombres que l'on peut former à l'aide de ces trois chiffres. Additionne ces six nombres. Divise cette dernière somme par la première. Je peux affirmer, sans aucun doute, que vous avez tous obtenu 222.

L'enseignant sonde la classe en demandant à l'un ou l'autre élève le nombre qu'il a obtenu.

Après avoir montré qu'ils ont tous le même résultat, l'enseignant leur demande :

Vous obtenez tous 222. Pourquoi ?

Première étape : développer la procédure pour un exemple numérique proposé par un élève.

Soit 2, 5 et 8, les trois chiffres choisis.

Leur somme vaut

$$2 + 5 + 8 = 15.$$

Les six nombres formés à l'aide de ces chiffres sont

258 ; 285 ; 528 ; 582 ; 825 ; 852.

La somme de ces nombres est

$$258 + 285 + 528 + 582 + 825 + 852 = 3\,330.$$

Le quotient de la deuxième somme par la première vaut

$$\frac{330}{15} = 222.$$

Dans ce cas, les exemples numériques n'illustrent pas vraiment le phénomène.

Deuxième étape : éclairer la situation en formalisant.

Soit a, b et c, les trois chiffres choisis.

Leur somme est

$$a + b + c.$$

Les six nombres formés à l'aide de ces chiffres s'écrivent

$$100a + 10b + c \ ;\ 100a + 10c + b \ ;\ 100b + 10a + c \ ;$$
$$100b + 10c + a \ ;\ 100c + 10a + b \ ;\ 100c + 10b + a.$$

La somme de ces nombres s'écrit

$$\begin{aligned} &100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c \\ &+ 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a \\ &= 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c). \end{aligned}$$

Le quotient vaut

$$\frac{222(a+b+c)}{(a+b+c)} = 222.$$

Après cette démonstration algébrique, le phénomène, apparaissant à première vue comme un « tour de magie », est mis à nu.

II. À propos de carrés

1. Des calculs surprenants

Comment s'y prendre ?

La procédure que décrit l'énoncé ci-dessous permet de calculer le carré d'un nombre dont la partie décimale est cinq dixièmes. À condition que la partie entière ne soit pas trop grande, on peut faire ce calcul mentalement. Il va de soi que cet énoncé ne doit pas être mémorisé par les élèves. L'intérêt de l'exercice réside principalement dans l'exploration numérique et dans le travail de symbolisation algébrique qui conduit à expliquer ce phénomène.

> Pour élever 7,5 au carré, je fais 7×8 et j'écris 56 qui est la partie entière du résultat. La partie décimale étant 25 centièmes. Le résultat est ainsi 56,25.
> De même, pour élever 9,5 au carré, je fais $9 \times 10 = 90$, puis j'écris 25 centièmes à la droite de 90.
> Utiliser cette méthode pour calculer d'autres carrés. Vérifier les résultats et expliquer.

Les différents tests (qui doivent comporter des exemples et des contre-exemples), conduisent les élèves à conjecturer que la méthode fonctionne uniquement pour des nombres dont la partie décimale est cinq dixièmes.

Les difficultés commencent quand il faut expliquer pourquoi la méthode fonctionne à tous les coups pour de tels nombres !

En un premier temps, on peut demander aux élèves d'écrire les calculs qui traduisent le procédé, sans les effectuer et ensuite de les comparer au développement du carré d'une somme.

Pour le premier exemple cela donne, en appliquant le procédé,

$$7{,}5^2 = (7 \times 8) + 0{,}5^2.$$

Par ailleurs, en utilisant l'égalité remarquable on a

$$7{,}5^2 = (7 + 0{,}5)^2 = 7^2 + (2 \times 7 \times 0{,}5) + 0{,}5^2.$$

L'idée qu'il faut avoir ici, c'est bien sûr de mettre 7 en évidence sur les deux premiers termes. On trouve alors

$$7{,}5^2 = 7(7 + 1) + 0{,}5^2.$$

Et tout s'éclaire !

Deuxième étape : utiliser des lettres. Cette forme d'expression permet en effet de généraliser et de découvrir par là comment l'application de la procédure correspond au développement du carré d'une somme. Pour ce faire, il faut décomposer le nombre donné pour qu'apparaissent la partie entière (a) et la partie décimale (0,5). La démonstration (car il s'agit bien de cela) tient en une seule ligne.

$$(a + 0{,}5)^2 = a^2 + 2 \times \mathrm{a} \times 0{,}5 + 0{,}5^2 = a(a + 1) + 0{,}5^2.$$

Cette dernière expression algébrique traduit exactement la procédure.

Les deux questions qui terminent l'activité requièrent d'utiliser conjointement le produit remarquable comme méthode de démonstration et l'écriture d'un nombre dans le système décimal.

> Vrai ou faux ?
> Si un nombre se termine par 5, son carré se termine par 25.

Après avoir procédé à des essais numériques, les élèves sont amenés, dans une démarche analogue à celle que nous venons de détailler, à écrire la démonstration suivante.

Le nombre dont on parle est de la forme $(10d + 5)$, la lettre d représentant le nombre de dizaines contenu dans ce nombre. On écrit donc

$$(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d + 1) + 25.$$

Le premier terme $100d(d + 1)$ est un multiple de 100, il se termine donc par deux zéros. Lorsqu'on lui ajoute 25, on trouve bien un nombre qui se termine par 25.

2. La calculatrice est dépassée !

Dans la foulée des calculs surprenants, voici un procédé décrit par Ibn al-Banna(1) (vers 1256 – vers 1321).

> Vrai ou faux ?
> Pour élever 999 999 au carré, je multiplie 999 998 par 1 000 000 puis j'ajoute 1. Je trouve le résultat en moins de temps qu'il n'en faut pour sortir ma calculatrice… C'est 999 998 000 001.

La multiplication écrite est assez fastidieuse et les calculatrices qui n'affichent que 8 ou 10 chiffres ne permettent pas de vérifier ce calcul. Par contre, le produit remarquable conduit assez rapidement tout à la fois à valider et à expliquer le procédé.

$$(1\,000\,000 - 1)^2 = 1\,000\,000^2 - 2 \times 1\,000\,000 + 1.$$
$$(1\,000\,000 - 1)^2 = 1\,000\,000\,(1\,000\,000 - 2) + 1.$$

Et la question rebondit : voici une méthode qui permet de calculer un carré que la calculatrice ne peut afficher. Y en a-t-il d'autres ?

Le procédé s'applique évidemment aux carrés de nombres dont tous les chiffres sont des 9. Après quelques vérifications analogues à celles que nous venons de montrer, on peut passer (si les élèves sont rompus au calcul avec des exposants littéraux) à une généralisation.

$$(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \times 10^n + 1.$$
$$(10^n - 1)^2 = 10^n\,(10^n - 2) + 1.$$

Bibliographie

D. Souder. Vive l'école des mathémagiciens. *Bulletin de l'APMEP* n° 459, p. 513-522.

D. Souder. *Magie et maths*. ACL éditions.

(1) Mathématicien originaire de Marrakech.