Les mathématiques sont-elles utiles aux futurs citoyens?

Frédéric Laroche

Les mathématiques sont-elles utiles au citoyen? La réponse étant clairement non, dans le sens de l'utilité immédiate, l'enseignement de cette discipline devrait se voir réduit à sa plus simple expression, voire prise en charge par les autres disciplines les utilisant… À qui la faute ? À la société qui n'y comprend pas grand-chose ? Au gouvernement pour qui l'utilisation des deniers publics serait certainement plus rentable dans d'autres domaines ? Le respect accordé aux mathématiciens, jusqu'à présent laissés libres de gérer les contenus enseignés, diminue, la coupure avec la société devient de plus en plus importante. Devons-nous rester isolés dans notre tour d'ivoire ou devons-nous prendre acte d'un état d'esprit latent et d'une réalité intrinsèque ?

L'incompréhension ou la rébellion vis-à-vis de notre discipline n'est pas nouvelle, par exemple dans les années 60 certains professeurs d'université en physique aux États-Unis interdisaient à leurs étudiants de suivre les cours de mathématiques et prenaient en charge cette partie de la formation. La situation présente résulte en grande partie de la malheureuse réforme des Maths modernes : la majorité des enseignants actuels ont été formés à cette époque et l'enseignement universitaire reste profondément marqué par le formalisme bourbachique. Même si des efforts sont faits de manière individuelle, les mathématiques enseignées sont empreintes de cet arrière-plan théorique peu propice à faire comprendre les enjeux d'une bonne formation initiale aux mathématiques.

La dichotomie soulevée par Michel Fréchet(1) : « *N'y a-t-il pas deux sortes de mathématiques ?* » met en exergue cette pseudo-différence entre mathématiques spéculatives et mathématiques utiles : ce sont les idées de Platon lorsqu'il disait qu'il « *faut laisser les deux tranquilles* » ; nous sommes bien au cœur de la difficulté. Invoquer un des principaux acteurs de la Réforme, n'est d'ailleurs pas très satisfaisant : ayant eu ce dernier comme enseignant, j'ai encore le souvenir de discussions stériles autour des notions de « Grand Cosinus » et « petit cosinus » dont certains se souviendront certainement… Nous sommes malheureusement ici au niveau le plus bas de la pensée mathématique ou en tout cas de son enseignement.

Par ailleurs il ne semble pas qu'il y ait une grande hostilité des décideurs vis-à-vis des mathématiques(2), ces derniers ayant en général suivi un enseignement de bon niveau dans ce domaine, par contre la question dorénavant posée est : vous, mathématiciens, que proposez-vous pour être en phase avec la société ? En tant

(1) Cf. éditorial du Bulletin n° 451.

(2) L'exemple de C. Allègre est instructif de ce point de vue : sans les mathématiques point de géophysique, ce qui est évident, même pour lui, mais sa sortie sur les mathématiques me semble davantage un appel à la raison et un rappel que les utilisateurs doivent avoir leur mot à dire dans le choix des mathématiques enseignées (particulièrement au niveau universitaire).

qu'acteurs, en tant qu'orienteurs, en tant que citoyens, nous ne pouvons échapper à cette interrogation et il devient urgent d'y répondre. Nous avons une responsabilité devant la Nation, assumons-la, prenons en main notre destin et ne nous limitons pas à des imprécations sans grande portée.

Les sujets du bac 2003 portent d'ailleurs cette empreinte d'une profonde incompréhension : des procédures non respectées (qui sommes-nous pour ne pas nous soumettre aux règles communes ?), des concepteurs de sujets hors de la réalité des classes, et donc de leurs concitoyens, une mascarade de correction, et finalement un bac qui perd grandement sa signification… Mais si on en est arrivé là, n'est-ce pas un peu de la responsabilité de chacun : l'introduction de la modélisation dans le Secondaire présente un profond intérêt, non seulement pour les élèves mais également pour les enseignants, et le signal envoyé est intéressant ; l'intrusion du réel dans nos classes, les questions de fond posées par cette démarche sont évidemment fondamentales pour la survie de notre enseignement. Malheureusement le manque de culture, la difficulté de trouver des sources accessibles, le peu de soutien apporté par l'Institution laissent prévoir de nouvelles déconvenues dans ce domaine(3).

Pour reprendre d'ailleurs les deux exemples cités par M. Fréchet on peut voir sous-jacent le manque de maîtrise générale dans ce domaine : sur les distributions, l'ami Dirac n'était guère exigeant puisqu'il disposait depuis déjà une cinquantaine d'années du calcul symbolique d'O. Heaviside, lequel avait d'ailleurs été vilipendé par les mathématiciens pour son manque de rigueur. Mais la situation avait été nettement éclaircie par Paul Lévy (entre autres), beau-père de Laurent Schwartz. Ce dernier a réussi à mettre un outil théorique en place, mais l'utilisateur de l'époque s'en moquait bien(4)… Dans le même ordre d'idées, l'intégrale de chemins de R. Feynman, utilisée tous les jours par les physiciens des particules, attend toujours une justification théorique, mais son utilisateur (non plus que les ordinateurs) n'en a guère besoin(5).

L'autre exemple est celui d'Einstein, mais ici on rentre dans des domaines peu clairs ; rappelons les faits : en 1905 Henri Poincaré publie dans une revue italienne assez peu diffusée un article sur la relativité de l'espace-temps avec la plupart des calculs nécessaires à l'établissement de la Relativité Restreinte. Un mois plus tard, Einstein, dont le meilleur ami, Michelle Besso, est mathématicien et italien, publie son article fondateur sur l'électro-dynamique des corps en mouvement… simple coïncidence ou malhonnêteté, personne ne saura, Einstein n'ayant pratiquement jamais parlé de Poincaré et Poincaré, toujours discret, n'ayant pas souhaité polémiquer avec Einstein sur le sujet(6).

(3) Ce texte a été écrit en mai 2004, le sujet du bac 2004 a bien montré tout le ridicule de la non-maîtrise de ce genre de choses… Voir http ;//www.irem.uhp-nancy.fr/Nouv.htm, particulièrement « Le Chariot fou du Bac ».

(4) Pour un aperçu rapide sur la question, voir le début de N. Boccara, Distributions, Ellipses, 1997.

(5) Voir le Hors-Série de Pour La Science sur Feynman, mai 2004.

(6) Ceci ne signifie pas qu'Einstein n'était pas un grand savant : c'était certainement un grand physicien, avec une vision acérée des problèmes physiques, mais ce n'était certainement pas un grand mathématicien (voir les commentaires de H. Minkovski à son sujet). Une référence intéressante à lire est J.-P. Auffray, Einstein et Poincaré, Le Pommier, 1999.

En 1916 D. Hilbert publie Die Grundlagen der Physik où il vient (grâce en grande partie à Emmy Noether) de trouver la solution mathématique du problème de la Relativité Généralisée. Quinze jours plus tard, après un travail acharné, Einstein qui s'était fourvoyé pendant dix ans sur des chemins sans issue, publie son article sur la Relativité Généralisée. Là encore les noms d'Hilbert et de Noether ne seront jamais cités(7)…

Ce qui mérite d'être relevé, c'est que le travail de ces derniers était directement orienté vers la recherche d'une solution mathématique et que les notions mises en jeu n'étaient pas choisies gratuitement. On ne peut pas considérer qu'il existe des mathématiques immanentes, vivant dans un monde merveilleux, et que, par l'opération du Saint-Esprit, elles s'appliqueraient justement à un problème précis(8). La preuve en est que les difficultés de modélisation, voire de théorisation dans certains cas, sont légion et que les mathématiques nécessaires n'existent probablement pas encore.

Je voudrais citer un autre exemple qui montre bien la difficulté : ayant participé au débat sur l'École via Internet, je m'interrogeais publiquement sur le fait que les probabilités étaient absentes des nouveaux programmes de MPSI. Une des réponses fut qu'il était impossible d'enseigner les probabilités sans disposer de la théorie de la mesure et donc que nos décideurs n'avaient pu mettre cette discipline dans les programmes. Laplace, Gauss, Quételet et tous les autres ont dû se retourner dans leur tombe… Il est probable que mon interlocuteur était frais émoulu de l'Université et manquait du recul nécessaire(9), mais cette réponse appelle une remarque importante : il y a une perte de sens lorsqu'on assimile les probabilités à la théorie de la mesure ; les probabilités permettent d'éclairer certaines situations sous un angle différent, la théorie n'autorise pas cet éclairage, en tout cas pas au niveau de l'étudiant(10).

En un certain sens la problématique est la même dans les classes : je fais apprendre telle ou telle notion, en général avec un cours, je fais faire des exercices techniques ou plus élaborés en espérant que la motivation sera suffisante, enfin j'espère faire réinvestir ce travail dans un domaine plus vaste. Il est évidemment peu raisonnable de baser un enseignement sur une succession d'espoirs (souvent déçus d'ailleurs…) et l'échec ici est patent : où est le sens, où est l'appropriation de la notion, où est le plaisir(11) ?

Parce que finalement les mathématiques n'ont vraiment de sens qu'à travers leur utilisation dans les autres activités humaines : ceci ne veut pas dire que la recherche fondamentale est inutile, mais oublier la destination finale de cette dernière

(7) Et ne le sont toujours pas...

(8) Lire à ce propos A. Connes, A. Lichnerowicz, M.P. Schutzenberger, Triangle de Pensées, Odile Jacob, 2000.

(9) En tout cas je l'espère…

(10) Par exemple en théorie des Nombres l'appel aux probabilités est devenu une nécessité, voir le Que Sais-Je ? sur les Nombres Premiers de G. Tennenbaum et M. Mendès-France.

(11) À lire (ou à relire) : B. Chariot, R. Bkouche, N. Rouche, Faire des mathématiques : le plaisir du sens, Armand Colin, 1991.

n'amènera que déconvenues, rejets et autres polémiques[12]… Dans nos classes la situation est identique, voire pire dans le sens où le chercheur peut se fixer un but et essayer de l'atteindre, mais qu'en est-il du but de l'élève : s'il ose poser la question du « à quoi ça sert » la réponse est en général « tu verras plus tard » et il repart insatisfait dans sa quête du sens.

Je prendrai un exemple vécu récemment : géométrie dans l'espace, classe de Seconde, on cherche la longueur de la grande diagonale d'un cube ; en passant en coordonnées c'est très facile ; un élève remarque alors que dans le plan c'est… Je saute sur l'occasion et demande comment faire en dimension supérieure où on obtient encore facilement… Évidemment la question ne tarde pas sur l'utilité des espaces de dimension supérieure à 3 ce qui m'amène à parler de l'espace-temps, de la notion de temps puis d'une manière plus générale à parler de l'espace des phases fort utile aux physiciens (et aux mathématiciens…). Je ne sais pas si j'ai vraiment répondu à la demande, toujours est-il que ces élèves, lorsqu'ils entendront de nouveau parler d'espaces de grande dimension pourront fixer leur esprit sur un objet réel et imaginer une réalité sous-jacente dans leurs calculs. Pour compléter là-dessus, discutant peu après avec un stagiaire, je lui raconte l'anecdote qui ne rencontre que peu de succès : il n'a jamais rencontré l'espace des phases dans ses études[13].

Nous sommes là encore en présence d'une difficulté majeure : le cloisonnement des disciplines à tous les niveaux fait que la solution la plus simple reste quand même de se limiter à son propre champ de connaissances et qu'aller voir ailleurs comment ça se passe reste une démarche difficile et malheureusement peu fréquente[14].

Arrivés à ce stade de notre réflexion nous pouvons nous demander quelles solutions mettre en œuvre : la formation initiale joue évidemment un grand rôle pour la suite des événements[15] et le rôle des IUFM pourrait être important dans ce

---

(12) L'honneur de l'esprit humain est certainement d'aider l'humanité et particulièrement les élèves dans notre cas à progresser vers un monde meilleur et certainement pas de s'enfermer dans une tour d'ivoire accessible seulement à une élite (quelles que soient les qualités de J. Dieudonné, son rôle dans la Réforme a été particulièrement important et il est dommage qu'il ait dépensé tant d'énergie pour une aussi mauvaise cause).

(13) Rappel : une particule peut être entièrement caractérisée à un moment donné par sa position x et sa vitesse v (ou sa quantité de mouvement $p = mv$) ; dans l'espace à trois dimensions, les vecteurs x et v nécessitent 3 nombres chacun, n particules identiques (ou non) en nécessiteront $6n$; l'étude de leur mouvement se fera alors dans un espace des phases à $6n$ dimensions ; par exemple pour une mole de gaz, il faudra un espace de dimension 6NA (NA est le nombre d'Avogadro), soit environ 1 025 dimensions. L'espace des phases est en général couplé aux questions d'énergie à travers l'hamiltonien. On pourra lire avec profit les deux ouvrages suivants :
H. Dang-Vû, C. Delcarte, Bifurcations et chaos, Ellipse, 2000, pour des utilisations mathématiques de l'espace des phases ainsi que I. Prigogine, D, Kondepudi, Thermodynamique, Odile Jacob, 1999 pour des manipulations plus physiques.

(14) D'autant plus que l'on ne voit pas à quelle occasion un étudiant aurait pu se former dans des domaines connexes… Déjà on peut très bien obtenir une Maîtrise sans avoir vu un gramme de probas-stats, alors le reste…

(15) Voir l'article de G. Kuntz dans le numéro 451 du Bulletin Vert : existe-t-il encore une licence de mathématiques appliquées ?

domaine. Déjà semble nécessaire une formation obligatoire aux mathématiques appliquées (peut-être dans le sens « noble » du terme : quel rôle jouent les mathématiques dans la structuration et le développement des autres disciplines, quels sont les outils et les méthodes utilisés) ; par ailleurs le mémoire actuellement centré sur des questions de didactique (malheureusement mal maîtrisées par les étudiants, ce qui, somme toute, est assez normal) pourrait être orienté vers des questions plus terre-à-terre. On pourrait d'ailleurs demander à travers ce mémoire la réalisation d'un tableau avec un tableur en utilisant la récursivité ou d'une figure dynamique avec un logiciel de géométrie ou encore un programme sous Maple ou Dérive ; ces travaux mis sous une forme standard pouvant même être inclus dans une base de données disponible sur internet… (le rêve éveillé continue…).

Il me semble qu'à travers ce type de projets pourrait (ré)apparaître la question du sens et du plaisir(16), attributs dont les mathématiques semblent actuellement fort dépourvues du point de vue de la société dans son ensemble.

(16) Une question me taraude depuis longtemps : les jeux (mathématiques s'entend) sont-ils vraiment intéressants dans la formation ou ne font-ils pas croire davantage à l'inutilité et à la gratuité des mathématiques ? Je n'ai jamais réussi à répondre à cette question, ni à travers mes lectures, ni dans ma pratique.