Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes… Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
72 quai de la Loire,
75019 Paris.

(Attention au changement d'adresse)

Indications sur des énoncés déjà publiés

Énoncé 312 *(*AB = CD, M *et* N *les milieux de* AD *et* BC*) :*

Peut-on faire apparaître un parallélogramme ?

Énoncé 313 *(cercles tangents à deux côtés de* $A_1A_2A_3$, $\sum \frac{r_i}{r_i + GO_i} = 2$ *) :*

Il existe un lien entre ces trois rapports $\frac{r_i}{r_i + GO_i}$ et le cercle inscrit dans $A_1A_2A_3$.

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 314 (Pierre JULLIEN, 13-Meyreuil)

On considère trois cercles de même rayon R, ayant un point commun. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle formé par les autres points d'intersection des cercles deux à deux a pour rayon R.

ÉNONCÉ n° 315 (J.-C. Carréga, 69-Lyon)

Dans le plan euclidien, soient A, B, C, D quatre points alignés dans cet ordre sur une droite (Δ). Déterminer l'ensemble des points M du plan d'où l'on voit les segments [AB] et [CD] sous le même angle.

Solutions

Énoncé nº 304 (Pierre SAMUEL, 92-Bourg-la-Reine)

Dans le cas particulier où $n - 2$ est un nombre premier impair p, montrer que l'équation diophantienne $2x^2 + 1 = y^n$ ($n > 2$) n'admet, hormis la solution triviale $x = 0$, $y = 1$, que la solution $n = 5$, $x = 11$ et $y = 3$.

SOLUTION

Cette équation a été résolue même sans l'hypothèse $n - 2$ premier, par exemple par W. Ljunggren. Mais le présent cas particulier est plus accessible que le cas général, quoique difficile : seuls s'y sont attaqués François Bastien (78-Chatou), Marie-Laure Chaillout (91-Épinay-sur-Orge), René Manzoni (76-Le Havre) et Pierre Renfer (67-Ostwald).

L'idée essentielle est que l'anneau $\mathbf{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{2}\right]$ des nombres de la forme $\left(a+b\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$, avec a et b entiers, est un anneau euclidien : comme dans $\mathbf{Z}$ lui-même, tout élément s'y décompose de manière unique (aux unités près) en un produit de nombres premiers. Peu d'anneaux de ce type sont euclidiens : par exemple, $\mathbf{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{5}\right]$ ne l'est pas car $6 = 2\times 3 = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{5}\right)$ n'admet pas de décomposition unique en nombres premiers ; mais on démontre classiquement que $\mathbf{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{2}\right]$, lui, est euclidien.

Dès lors, si $2x^2+1=\left(1+x\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(1-x\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=y^n$ et si $\left(1+x\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$ et $\left(1-x\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$ sont premiers entre eux – ce qui est le cas car leur PGCD divise leur somme 2, or les diviseurs de 2, ±2 et $\pm\mathrm{i}\sqrt{2}$, ne divisent pas $1+\mathrm{i}x\sqrt{2}$ –, chacun d'eux est, à une unité près, une puissance n-ième, ce qui peut s'écrire : $1+\mathrm{i}x\sqrt{2}=\pm\left(a+b\,\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^n$. Donc d'après le binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{C}_n^{2k}\, a^{n-2k}\left(-2b^2\right)^k = \varepsilon \tag{1}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.. Comme n est impair, la somme est divisible par a, ce qui prouve que $a = \pm 1$.

Or selon que $a = \pm\varepsilon$, Pierre Samuel fait appel à deux arguments distincts.

Si $a = -\varepsilon$, après transposition du premier terme $a^n = -\varepsilon$, l'équation (1) devient :

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{C}_n^{2k}(-\varepsilon)\left(-2b^2\right)^k = 2\varepsilon,$$

ce qui nécessite tout d'abord que $b^2 = 1$ (car $2b^2$ divise le premier membre) ; ensuite, comme seuls les deux premiers termes de la somme sont non multiples de 8, on doit avoir : $\mathrm{C}_n^2 - 2\,\mathrm{C}_n^4 \equiv 1 \pmod 4$. Or ce n'est pas possible pour n impair, car :

si $n \equiv 1 \pmod 4$, C_n^2 est pair ;

si $n \equiv 3 \pmod 8$, C_n^4 est pair et $\mathrm{C}_n^2 \equiv 3 \pmod 4$;

et si $n \equiv 7 \pmod 8$, C_n^4 est impair et $\mathrm{C}_n^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Si maintenant $a = \varepsilon$, on se sert de l'hypothèse : $n - 2 = p$ premier. Car après simplification par $\left(-2b^2\right)\varepsilon$, l'équation (1) se ramène alors à :

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{C}_n^{2k}\left(-2b^2\right)^{k-1} = 0 \tag{2}$$

Or tous les coefficients de cette somme sont divisibles par p hormis le premier $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{(p+2)(p+1)}{2} \equiv 1 \pmod p$ et le dernier $\mathrm{C}_n^{n-1} = (p+2) \equiv 2 \pmod p$. On doit donc avoir :

$$1 + 2\left(-2b^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod p.$$

Ceci ne peut être vérifié que si $-2b^2$ est premier avec p, auquel cas $\left(-2b^2\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc $\left(-2b^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p$. Il est donc nécessaire que $1 \pm 2 \equiv 0 \pmod p$: seul $p = 3$, soit $n = 5$, vérifie une telle condition. Et pour $n = 5$, l'équation (2) s'écrit :

$$10 - 10b^2 = 0,$$

ce qui nécessite : $b^2 = 1$, $y = a^2 + 2b^2 = 3$, $y^n = 243 = 2x^2 + 1$ soit en définitive $x = 11$.

François Bastien signale d'autres équations diophantiennes voisines, comme $3y^n = x^2 + x + 1$, trouvées dans le livre de Nagell.