Exercices de ci, de là

Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :
APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices :

Exercice 1 (Marie-Laure Chaillout - *Épinay/Orge*)
Soit a un paramètre entier naturel. Résoudre dans $\mathbf{N}^2$ l'équation :

$$2^x - \left(2^{2^a}+1\right)^y = 2^{2^a}-1.$$

Exercice 2 (463 Georges Lion - *Wallis*)
Sur C cercle circonscrit à un triangle ABC construire le point M dont la droite de Simson est parallèle à une droite donnée.

Exercice 3 (transmis par Pascale Pombourcq - *Montvalen*)
Construire un triangle isocèle ABC connaissant la base BC et la longueur de la bissectrice des angles de la base.

Solutions d'exercices du bulletin n° 461

Exercice 2.
« La somme des volumes des pyramides ayant pour bases les faces latérales d'un prisme et pour sommet commun un point quelconque intérieur au prisme, est constante. Dans quel rapport est-elle avec le volume du prisme ? »
(Jacques Hadamard – Leçons de géométrie élémentaires – Armand Colin 1901)

Solution de Raymond Raynaud (*Digne*) :

Soit a la longueur des arêtes latérales du prisme, V son volume, $f_1, f_2, \dots, f_n$ ses faces latérales, $l_1, l_2, \dots, l_n$ leurs largeurs, S un point intérieur au prisme, $H_1, H_2, \dots, H_n$ ses projections sur $f_1, f_2, \dots, f_n$, $V_1, V_2, \dots, V_n$ les volumes des pyramides de sommet S dont les bases sont $f_1, f_2, \dots, f_n$. $V_i = \frac{1}{3} a l_i \, SH_i$; $\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{3} a \sum_{i=1}^{n} l_i \, SH_i$.

Les points S, H_1, H_2, …, H_n appartiennent à une section droite de la surface prismatique. $\sum_{i=1}^{n} l_i\,\mathrm{SH}_i$ est le double de l'aire de cette section droite. Donc $a\sum_{i=1}^{n} l_i\,\mathrm{SH}_i = 2\mathrm{V}$ et $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}_i = \frac{2\mathrm{V}}{3}$.

Autre solution de Georges Lion (Wallis).

Exercice 1.

Trouver les valeurs entières de x et de y qui satisfont aux deux équations :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 468 \\ x^5 + y^5 = 19\,932 \end{cases}.$$

(Charles de Comberousse 1923)

Solution de Georges Lion (*Wallis*) :

L'inventeur de cet exercice a sans doute en vue une solution différente de celle que je propose. En dressant la liste des cubes des entiers allant de 0 à 7, on trouve immédiatement le couple (5, 7) qui vérifie les deux conditions. On va maintenant prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions de l'équation. On a $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ et $4(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2 > 0$; sachant $x^3 + y^3 = 468$, on en déduit $x + y > 0$.

Si x et y étaient pairs, $x^3 + y^3$ serait multiple de 8, ce qui est faux pour 468 ; si x et y étaient de parités différentes, $x^3 + y^3$ serait impair, ce qui est faux pour 468. Donc x et y sont impairs, $x^2 - xy + y^2$ est impair, et sachant $468 = 4 \times 117$, $x^2 - xy + y^2$ divise 117 (Gauss).
À ce stade, on peut écrire : $x^2 - xy + y^2 \in \{1, 3, 9, 13{,}39{,}117\}$.
Or modulo 4, $x + y = 0$; donc $x \neq y$ et $x^2 - xy + y^2 = 1 - 3 + 1 = 3$.
Deux cas seuls restent à étudier : $x^2 - xy + y^2 = 3$ ou 39, c'est-à-dire $x + y = 156$ ou 12.
Si $x + y = 156$, alors $3xy = 1\,562 - 3$, $xy = 8111$, $(x + y)^2 - 4xy < 0$, impossible.
Si $x + y = 12$ alors $3xy = 144 - 39$, $xy = 35$. La solution (5, 7) trouvée a priori est la seule.
Autres solutions (à partir des mêmes idées) : Catherine Grimaud (*Paris*), Michel Hébraud (*Toulouse*). Raymond Raynaud (*Digne*) généralise le problème dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$: les seules solutions restent (5, 7) et (7, 5).

Exercice 4.

Beaucoup de réponses ont été envoyées. François Colmez a fait une animation à partir de la solution de Mireille Bournaud, Bruno Alaplantive a fait, lui aussi, une animation de sa propre solution. Les solutions et les renseignements seront donnés dans le prochain Bulletin. Les animations seront accessibles sur le site de l'APMEP.
Miguel Amengual Covas et Michel Hébraud nous ont signalé que l'exercice a été donné aux Olympiades de mathématiques à Cuba en 1987.