L'application logistique : une suite au comportement chaotique

Emmanuel Moreau

Seconde partie : compléments(*)

2.1. Retour sur les « valeurs particulières »

Toutes les valeurs de u_0 donnant une suite périodique à partir d'un certain rang sont (cf. 1.4.) du type $u_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi z)$, où z est un rationnel compris entre 0 et 1. Nous allons montrer que la réciproque est vraie. On écrit le développement de z en base 2 (développement dyadique), où chaque c_m vaut 0 ou 1 :

$$z = 0,c_1c_2\ldots c_m\ldots = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_m}{2^m} + \ldots$$

D'après un théorème classique, z étant rationnel, ce développement est périodique à partir d'un certain rang ; il existe donc s et p tels que pour tout $n \geq s$, on ait $c_{n+p} = c_n$. Si, pour tout nombre positif x, on note frac(x) la différence entre x et sa partie entière, on a :

$$\cos(2^n \cdot 2\pi z) = \cos(2\pi \cdot \mathrm{frac}(2^n z)).$$

De la périodicité des c_n à partir du rang s, il résulte que

$$\mathrm{frac}(2^s z) = \mathrm{frac}(2^{s+p} z),$$

donc que $u_s = u_{s+p}$, ce qui prouve la périodicité de la suite au moins à partir du rang s.

Ainsi, la suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si

$$u_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi z),$$

où z est rationnel.

L'ensemble des rationnels étant dense sur [0 ; 1], son image par la fonction continue $z \mapsto \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi z)$ est dense dans le segment image, c'est-à-dire [0 ; 1] lui-même.

Dans tout sous-intervalle de [0 ; 1], il y a donc une infinité de « valeurs particulières ».

(*) La première partie est parue dans le Bulletin 460, p. 693-699.

2.2. Analyse statistique

Un moyen bien connu d'étudier un phénomène apparemment désordonné est de faire des statistiques (je conseille ici au lecteur d'observer par lui-même le comportement « désordonné » de notre suite à l'aide d'un petit programme). Effectuons donc une étude statistique de la première décimale des termes successifs pour différentes valeurs de u_0. Cette étude porte sur les 1 000 premiers termes.

Nous avons vu au § 1.5. que, pour être sûr de connaître les termes de la suite jusqu'à u_{1000} avec une précision de l'ordre du centième, on doit effectuer les calculs avec 304 décimales au moins, ce qu'un logiciel comme *Maple* ou *Derive* fait sans aucun problème.

Le tableau des résultats obtenus est à lire comme suit : dans la ligne 0.65 et la colonne 4, le nombre 0.088 donne pour $u_0 = 0{,}65$ la proportion de termes parmi u_1, u_2, …, u_{1000} dont la première décimale est un 4.

prem. déc.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_0 = 0{,}5$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_0 = 0{,}55$	0,203	0,080	0,079	0,077	0,045	0,080	0,059	0,076	0,094	0,207
$u_0 = 0{,}6$	0,211	0,096	0,070	0,069	0,065	0,063	0,066	0,069	0,087	0,204
$u_0 = 0{,}65$	0,200	0,091	0,072	0,068	0,088	0,060	0,059	0,063	0,094	0,205
$u_0 = 0{,}7$	0,198	0,091	0,069	0,080	0,064	0,064	0,060	0,076	0,090	0,208
$u_0 = 0{,}75$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$u_0 = 0{,}8$	0,193	0,097	0,076	0,064	0,060	0,064	0,073	0,078	0,089	0,207
$u_0 = 0{,}85$	0,183	0,088	0,078	0,076	0,064	0,063	0,070	0,062	0,099	0,216
$u_0 = 0{,}9$	0,193	0,097	0,076	0,065	0,060	0,064	0,072	0,078	0,089	0,207

Le tableau correspondant aux valeurs de u_0 comprises entre 0,1 et 0,45, le pas restant de 0,05, s'obtiendrait par une exacte symétrie puisque $f(x) = f(1 - x)$.

Si l'on excepte les deux lignes particulières $u_0 = 0{,}5$ et $u_0 = 0{,}75$ (qui correspondent à des suites constantes à partir des rangs 2 et 0 respectivement), on constate une chose assez surprenante : *la relative stabilité des fréquences observées*. Le paragraphe suivant est consacré à ce phénomène.

2.3. La distribution des valeurs de la suite est-elle indépendante de u_0 ?

L'étude statistique de la partie 2.3 et des observations numériques supplémentaires suggèrent (une fois mises à part les valeurs que nous avons appelées *valeurs particulières*) une certaine indépendance de la distribution des termes de la suite par rapport à la valeur de u_0.

Néanmoins, comme nous allons le voir, ce point est lié à des problèmes qui restent ouverts.

Notion de suite équirépartie

Une suite (w_n) d'éléments de [0 ; 1] est dite équirépartie sur [0 ; 1] lorsque, parmi les termes de la suite de rang ≤ N, la proportion de ceux qui appartiennent à un sous-intervalle J de [0 ; 1] tend vers la longueur de J lorsque N tend vers l'infini.

Ainsi la proportion de termes w_n, n variant de 0 à N, ayant une première décimale donnée tend vers $\frac{1}{10}$ quand N tend vers l'infini. La proportion de termes dont le développement décimal commence par 0,34 (ce qui revient à dire qu'ils appartiennent à [0,34 ; 0,35]) tend vers $\frac{1}{100}$, etc.

Un théorème (T)

La suite qui à n associe $\mathrm{frac}(z \cdot 2^n)$, *où z est un nombre positif donné, est équirépartie sur* [0 ; 1] *pour presque tout z, c'est-à-dire sauf pour un ensemble* S *de valeurs de z qui est de mesure nulle.*

Ceci est un résultat que l'on doit à Émile Borel .

Considérons un nombre réel et son développement décimal en base 10 par exemple, ce qui nous est plus familier. Ce nombre sera dit *normal en base* 10 si, dans ce développement, les 10 chiffres apparaissent en proportion équilibrée (10 pour cent de chaque) ; les 100 paires possibles de chiffres (00 ; 01 ; 02 … 99) apparaissent aussi en proportion équilibrée (chacune apparaît avec la fréquence de un pour cent) ; les 1000 chiffres possibles…, etc.

En 1909 Émile Borel a prouvé que l'ensemble des nombres non normaux en base 10 est négligeable. Il a également prouvé que ce résultat reste vrai en toute base, et il est aisé de voir que l'énoncé de ce théorème en base 2 prouve notre théorème (T).

La recherche de critères permettant d'affirmer qu'une valeur z donnée appartient ou non à S est un problème ouvert. Ce problème est lié, en base 10, à celui de la répartition des décimales dans le développement décimal de z ; en base 2, il est lié à celui de la répartition des « décimales » dans le développement dyadique de z.

Répartition des termes de la suite (u_n)

• Si nous utilisons la formule explicite

$$u_n = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2^n\alpha)\right)$$

avec $\alpha = \arccos(1-2u_0)$, nous voyons qu'étudier la répartition des termes u_n sur [0 ; 1] revient à étudier la répartition de la suite $2^n\alpha$ modulo 2π dans [0 ; 2π] ou mieux celle de la suite $2^n \dfrac{\alpha}{2\pi}$ modulo 1 dans [0 ; 1], c'est-à-dire la suite $n \mapsto \mathrm{frac}\left(2^n \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)$.

• On a déjà vu que si α est commensurable à 2π, c'est-à-dire si $z = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ est rationnel, alors la suite $n \mapsto \mathrm{frac}\left(2^n \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)$ et donc aussi la suite (u_n) sont périodiques à partir d'un certain rang et prennent par suite un nombre fini de valeurs.

• Supposons désormais que u_0 soit choisi de telle sorte que $z = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ n'appartienne pas à l'ensemble de mesure nulle S mentionné dans l'énoncé du théorème (T). Alors la suite $n \mapsto \mathrm{frac}(2^n z)$ est équirépartie sur [0 ; 1]. Appelons ρ_n le terme général de cette suite.

Fixons-nous alors un nombre x tel que $0 \leq x \leq 1$; désignons par $\mathrm{P_N}(x)$ la proportion de termes de la suite finie $(u_n)_{n \leq \mathrm{N}}$ tels que $0 \leq u_n \leq 1$.

Cette dernière inégalité équivaut à $1 - 2x \leq 1 - 2u_n \leq 1$, elle-même équivalente à

$$\arccos(1-2u_n) \leq \arccos(1-2x). \qquad \text{(C)}$$

De la formule

$$u_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos\big(2\pi \cdot \mathrm{frac}(2^n z)\big)\Big) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\pi\rho_n)\big),$$

on tire, compte tenu de $0 \leq \rho_n \leq 1$,

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi}\arccos(1-2u_n)$$

ou

$$\rho_n = 1 - \frac{1}{2\pi}\arccos(1-2u_n).$$

La condition (C) devient :

$$0 \leq \rho_n \leq \frac{1}{2\pi}\arccos(1-2x)$$

ou

$$1 - \frac{1}{2\pi}\arccos(1-2x) \leq \rho_n \leq 1.$$

Désignons par A_N le nombre de valeurs telles que

$$\rho_n \in \left[0\,;\frac{1}{2\pi}\arccos(1-2x)\right]$$

et par B_N le nombre de valeurs telles que

$$\rho_n \in \left[1-\frac{1}{2\pi}\arccos(1-2x)\,;1\right].$$

On a donc :

$$P_N(x)=\frac{A_N+B_N}{N}$$

mais puisque la suite (ρ_n) est équirépartie sur [0 ; 1], $\frac{A_N}{N}$ et $\frac{B_N}{N}$ tendent vers les longueurs des deux segments correspondants. D'où la formule :

$$\lim_{N\to\infty} P_N(x)=\frac{1}{\pi}\arccos(1-2x).$$

Nous avons choisi la notation $P_N(x)$ parce qu'elle suggère une probabilité : $P\big((u_n)\in[0\,;x]\big)$ représente en effet la proportion des termes de la suite (u_n) qui sont dans [0 ; x]. Nous soulignons ici que u_n est fixé et doit vérifier la condition d'équirépartition précisée plus haut. Par abus de langage, on pourrait dire que, pour N assez grand, la probabilité pour que, n étant pris au hasard dans [0 ; N], u_n appartienne à [0 ; x] est approchée par la fonction

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\arccos(1-2x).$$

Mettons en évidence le résultat obtenu :

> Pour toute valeur de u_0 excepté un ensemble de mesure nulle, la proportion des termes de la suite appartenant à [0 ; x] est asymptotiquement égale à
>
> $$F(x)=\frac{1}{\pi}\arccos(1-2x).$$

En utilisant cette fonction nous pouvons calculer les probabilités associées aux différentes premières décimales :

Première décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité associée	0.205	0.090	0.074	0.067	0.064	0.064	0.067	0.074	0.090	0.205

On retrouve des fréquences voisines de celles observées dans le § 2.2, ce qui laisse à penser que les valeurs figurant dans le tableau du § 2.2 (sauf 0,5 et 0,75) satisfont à la conjecture d'équirépartition que nous avons mentionnée.

2.4. L'exposant de Liapounov (ou Lyapunov)

Définition

Rappelons ce que nous avons observé dans le paragraphe 1.2 : un écart même très petit entre deux valeurs de u_0 peut s'amplifier de manière très rapide quand n augmente.

L'exposant de Liapounov est un nombre λ qui mesure la rapidité avec laquelle s'amplifie, en moyenne, un écart donné ; c'est donc une manière de *quantifier la sensibilité aux conditions initiales*. Il est défini par :

$$\text{écart au rang } n \approx \text{écart initial} \times \mathrm{e}^{\lambda n}.$$

Il nous sera plus facile de calculer le facteur multiplicatif moyen entre deux écarts successifs, que nous noterons Λ. Nous aurons alors :

$$\text{écart au rang } n \approx \text{écart initial} \times \Lambda^n.$$

Λ est donc lié à l'exposant de Liapounov par l'égalité :

$$\Lambda = \mathrm{e}^{\lambda}.$$

Cas de la suite (u_n)

• Le coefficient de Liapounov (ou, ce qui revient au même, le coefficient Λ ci-dessus) est en général difficile à estimer, mais dans le cas de notre suite

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1], \\ u_{n+1} = 4u_n(1-u_n), \end{cases}$$

sa détermination est assez aisée si l'on se sert de l'expression explicite trouvée au § 1.3.

On a déjà prouvé au § 1.5. que $\Lambda \leq 2$.

• Reprenons les notations de § 1.5. et la formule (F1)

$$\delta u_n = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2^n\alpha\right) - \cos\left(2^n(\alpha+\delta\alpha)\right)\right) = \sin\left(2^{n-1}\delta\alpha\right)\sin\left(2^n\left(\alpha+\frac{\delta\alpha}{2}\right)\right).$$

• Si δu_0 a été choisi de telle sorte que

$$\alpha + \frac{\delta\alpha}{2} = \frac{k\pi}{2^m},$$

le facteur $\sin\left(2^n\left(\alpha+\dfrac{\delta\alpha}{2}\right)\right)$ est nul pour tout $n \geq m$. Ainsi, on peut trouver des valeurs δu_0 aussi petites que l'on veut et telles qu'à partir d'un certain rang $\delta u_n = 0$. La croissance des écarts en fonction de n n'est donc pas une règle absolue, mais un phénomène « statistique », valable sauf pour des couples exceptionnels (mais en nombre infini) de valeurs initiales.

• Revenons au cas général ; le terme $\sin\left(2^n\left(\alpha+\dfrac{\delta\alpha}{2}\right)\right)$ oscille entre 0 et 1. On suppose désormais que u_0 et δu_0 sont tels que

$$\zeta = \frac{1}{\pi}\left(\alpha+\frac{\delta\alpha}{2}\right) \notin \mathrm{S},$$

où S est l'ensemble défini dans l'énoncé du théorème (T) du § 2.3. Alors la suite $n \mapsto \operatorname{frac}(2^n\zeta)$ est équirépartie sur [0 ; 1]. On a :

$$\left|\sin\left(2^n\left(\alpha+\frac{\delta\alpha}{2}\right)\right)\right| = \left|\sin\left(\pi\cdot 2^n\zeta\right)\right| = \left|\sin\left(\pi\cdot\operatorname{frac}(2^n\zeta)\right)\right|.$$

Étant donné ε positif « petit », l'inégalité

$$\sin\left(\pi\cdot\operatorname{frac}(2^n\zeta)\right) \geq \varepsilon$$

est assurée si et seulement si

$$\arcsin\varepsilon \leq \pi\cdot\operatorname{frac}(2^n\zeta) \leq \pi - \arcsin\varepsilon,$$

ce qui revient à imposer à $\operatorname{frac}(2^n\zeta)$ d'appartenir au segment

$$\left[\frac{1}{\pi}\arcsin\varepsilon\,; 1-\frac{1}{\pi}\arcsin\varepsilon\right]$$

de longueur

$$1-\frac{2}{\pi}\arcsin\varepsilon \approx 1-\frac{2}{\pi}\varepsilon.$$

Pour n allant de 0 à N, où N est « assez grand », la proportion de valeurs n telles que

$$\left|\sin\left(2^n\left(\alpha+\frac{\delta\alpha}{2}\right)\right)\right| \geq \varepsilon$$

est donc proche de 1, si nous prenons ε suffisamment petit. Alors, pour « la plupart » des valeurs de N, on aura

$$\left|\delta u_n\right| \geq \varepsilon\left|\sin(2^{n-1}\delta\alpha)\right|.$$

De plus, tant que

$$2^{n-1}\left|\delta\alpha\right| \leq \frac{\pi}{2},$$

en appliquant l'inégalité

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x,$$

on voit que

$$\left|\sin(2^{n-1}\delta\alpha)\right| \geq \frac{1}{\pi} \times 2^n\left|\delta\alpha\right|.$$

Finalement

$$\left|\delta u_n\right| \geq \varepsilon \times \frac{2^n}{\pi}\left|\delta\alpha\right|,$$

avec

$$\delta\alpha \approx \frac{\delta u_0}{\sqrt{u_0(1-u_0)}}.$$

Au total, nous avons, pour $\dfrac{\left|\delta u_n\right|}{\left|\delta u_0\right|}$ une minoration du type $\mathrm{A} \times 2^n$, valable pour « la plupart » des valeurs de n. De cette minoration et de la majoration trouvée précédemment, on peut conclure que le coefficient Λ associé à la suite (u_n) est 2 et que donc le coefficient de Liapounov de cette suite est ln 2.

Conclusion

Le calcul des termes successifs de notre suite est parfaitement déterminé mathématiquement, et par une relation très simple qui est $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$.

Mais la sensibilité aux conditions initiales complique singulièrement les choses :

Supposons que cette suite modélise l'évolution d'une grandeur physique pour laquelle la précision des mesures est limitée par nature à p_m, ou bien gardons au problème sa nature mathématique et supposons que notre mode de calcul est limité à une précision p_m, ce qui revient au même.

Nous souhaitons maintenant observer la suite des résultats avec une précision souhaitée p_m.

Les considérations qui précèdent montrent que ceci n'est possible que tant que n vérifie :

$$p_m \times \delta^n < p_{rs},$$

c’est-à-dire si

$$n < \frac{\ln(p_{rs}) - \ln(p_m)}{\ln \delta}.$$

Ainsi, même si l’évolution de notre grandeur est déterminée mathématiquement, elle ne sera bien déterminée numériquement que jusqu’à un certain rang, c’est-à-dire sur une certaine échelle de temps.

Bibliographie

mathworld.wolfram.com. L’un des tous meilleurs sites pour passionnés de mathématiques.

I. Ekeland : *Le calcul, l’imprévu*. (Seuil)

Je dois à ce livre ma première rencontre avec les applications logistiques. C’est un bon ouvrage de vulgarisation destiné à tout public, dans lequel il est fait aussi une place à l’histoire des sciences.

F. Lurçat : *Le chaos*. (Que sais-je ?)

Encore un ouvrage tout public, où l’auteur parvient magistralement à rendre simples des notions réputées complexes. J’y ai appris par exemple qu’il n’y aurait pas de météorites s’il n’y avait pas de chaos dans le système solaire.

D’autre part, tous les ouvrages portant sur le chaos consacrent à juste titre un chapitre au déterminisme : sur ce sujet je n’ai rien trouvé de plus clair que le dernier chapitre de ce livre.

Bergé, Pomeau, Vidal : *L’ordre dans le chaos*. (Hermann)

Un ouvrage universitaire inaccessible aux élèves, mais qui permet d’en savoir plus. Écrit par des physiciens, il est intéressant à la fois sur le plan mathématique et sur le plan physique.

Pour me contacter : zim.moreau.mann@wanadoo.fr