Achille ne rattrapera jamais la tortue !

Michel Fréchet

Lors de journées de la régionale de Haute Normandie, j'avais animé, avec un collègue philosophe, un atelier sur les paradoxes de Zénon. Nous avions débuté par la lecture des différents articles donnés en annexe (partie 3). Constatant qu'une certaine confusion régnait, nous avons ensuite exposé et tenté d'expliquer ces fameux paradoxes, qui ressortent chaque fois qu'il est question d'infini.

1. Qui était Zénon ?

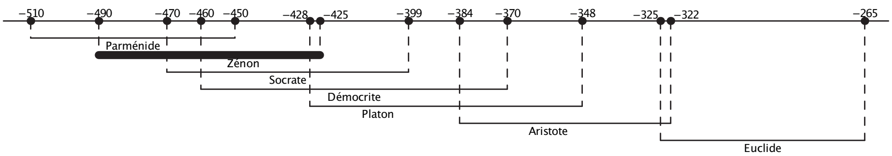
Nous ne savons rien directement de Zénon, nous le connaissons comme personnage du *Parménide* de Platon, et au travers de différents commentaires de Diogène Laërce, Plutarque et Aristote.

Zénon (–490, –425) vécut dans l'ancienne Hyélé, appelée plus tard Élée, petite colonie phocéenne.

Pour Platon, Zénon d'Élée, *élève de* Parménide, [est un] *philosophe expert en sciences naturelles et* [un] *authentique homme politique*[1].

Aristote, quant à lui, considère Zénon *comme l'inventeur de la dialectique tout comme* Empédocle *l'est de la rhétorique*[2].

Plus près de nous, Russell tient Zénon pour « *le fondateur de la philosophie de l'infini* » et estime ses arguments « *subtils et profonds au-delà de toute mesure*[3] ».



1.1. Zénon, homme politique

Zénon, ardent défenseur de la liberté, tenta de renverser le tyran Néarque. Arrêté, il supporta la douleur d'un interrogatoire musclé : « *Puissé-je être,* aurait-il dit, *aussi maître de mon corps que de ma langue* ».

Sommé de donner les noms de ses complices, il cita alors, pour se venger, les noms de tous les amis du tyran et lorsque ce dernier lui demanda s'il n'avait oublié personne, Zénon lui répondit : « *Si, toi, le fléau de l'État* ». Se tournant ensuite vers le peuple : « *Vraiment, votre lâcheté m'étonne : comment pouvez-vous, voyant ce que j'endure, supporter l'esclavage de ce tyran ?* ». Mais ce n'est que lorsqu'il trancha sa propre langue pour la cracher au visage du tyran que les citoyens se révoltèrent et lapidèrent Néarque.

(1) Platon, *L'Alcibiade*.
(2) Diogène Laërce in [1].
(3) Russell, *Mysticism and logic*.

Cette version due à Diogène Laërce et Diodore de Sicile n'est pas la seule concernant la fin héroïque et tragique de Zénon. Pour ceux que cela intéresse, il faut se reporter à [1].

1.2. Zénon, philosophe

À son sujet, Timon déclare :

La grande force inépuisable de Zénon
À la langue pendue pour le pour et le contre,
Capable de lutter contre toute doctrine, (...)

Diogène Laërce

Quant au Palamède d'Élée, ne savons-nous pas qu'il possédait une technique dialectique capable de donner à ses auditeurs l'impression que les mêmes choses étaient à la fois semblables et non semblables, unes et multiples, en repos et en mouvement ?

Platon

Zénon fut l'élève de Parménide. Ce dernier proclame que « *l'Être est et le Non Être n'est pas*(4) ». Pour Parménide, tout recours au mouvement et au changement doit être proscrit, car « *jamais* [l'Être] *n'était ni ne sera, puisqu'il est maintenant tout entier à la fois un et contigu à lui-même* ». Il est donc impossible de penser le devenir sans contradictions irréductibles.

D'après Élias, Zénon, *pour soutenir la thèse de son propre maître qui pensait que l'Être est immobile, établit au moyen de cinq arguments que l'Être est immobile. C'est alors que, dans l'incapacité de répliquer,* Antisthène le cynique *se leva et se mit à marcher, pensant que la démonstration au moyen de l'évidence sensible avait plus de force que n'importe quel argument contraire recourant à des arguments*(5). Antisthène croyait que son acte suffirait à détruire des arguments théoriques. Or, justement, c'est **cette impossibilité à penser de façon cohérente une théorie du mouvement** que Zénon voulait démontrer. Pour lui, le mouvement n'est qu'un phénomène. N'étant pas pensable, le mouvement ne peut pas appartenir à l'Être, car ce qui ne peut être pensé ne peut faire partie de l'Être.

Quatre arguments de Zénon nous sont parvenus : la **dichotomie**, l'**Achille**, la **flèche** et le **stade**.

2. Les quatre paradoxes de Zénon

2.1. Nature de l'espace et du temps

Avant d'exposer ses quatre paradoxes, un problème ontologique se pose :
Le temps et l'espace, sont-ils continus ou composés d'atomes ?

Hypothèse continuiste

Si l'espace est continu, on peut diviser chaque grandeur en deux, indéfiniment. C'est la notion d'*illimité selon la puissance* d'Aristote, par opposition à l'*illimité*

(4) Parménide, *De la nature*.
(5) Élias, *Commentaires sur les catégories d'Aristote*, 109, 6 *in* [1].

selon la quantité ou le nombre (qui suppose l'absence de limite extérieure). ZÉNON énonce, dans un premier temps, deux paradoxes où l'espace et le temps sont continus : la **dichotomie** et l'**Achille**.

Cependant, pour les Éléates, une chose n'existe que si elle est *un existant selon les trois dimensions*. Voici un extrait de la *Métaphysique* d'ARISTOTE :

> [...] ZÉNON *déclare que ce qui, par son addition ou par sa soustraction, ne rend pas une chose plus grande ou plus petite, n'est pas quelque chose d'existant, étant donné qu'évidemment l'existant qui existe est une grandeur. En outre, s'il est une grandeur, il est corporel, car le corporel est un existant selon les trois dimensions. Au contraire, les autres « objets mathématiques » produiront par addition un objet plus grand, s'ils sont ajoutés d'une certaine façon. Mais, ajoutés d'une autre façon, ils ne produiront aucun accroissement : tel est le cas du plan et de la ligne. Et pour ce qui est du point et de l'unité, en aucune façon, leur addition ne produit un accroissement*(6).

Le point n'a donc aucune existence, puisqu'il ne rend ni plus grand, ni plus petit par addition ou soustraction, toute grandeur donnée.

De plus, la **dichotomie** et l'**Achille** *montrent, outre l'impossibilité de penser le mouvement qu'il est nécessaire qu'il existe une grandeur non partageable, puisqu'il est impossible de toucher dans un temps limité un nombre illimité de parties, en les touchant chacune l'une après l'autre, et qu'il faut nécessairement que le mobile commence par effectuer un demi-parcours. Ce qui est non partageable admet donc une première moitié*(7).

Hypothèse atomiste

Puisque la thèse continuiste pose le problème de l'existence des points et du mouvement, nous sommes dans **l'espace composé de *grandeurs indivisibles*** (que, plus tard, DÉMOCRITE, élève de ZÉNON, nommera *atomes*) et dans **le temps composé d'*instants***.

Cependant, les deux arguments, la **flèche** et le **stade**, y seront tout aussi paradoxaux.

Il y a aussi une autre façon de regrouper les quatre arguments. Dans deux arguments, la **dichotomie** et la **flèche**, il ne peut y avoir de mouvement, il y a immobilité. Dans les deux autres, le mouvement existe.

Ainsi, nous pouvons schématiser cela dans le tableau suivant :

	Continuisme	Atomisme
Immobilité	Dichotomie	Flèche
Mouvement	Achille	Stade

2.2. Exposition des quatre paradoxes

ARISTOTE nous rapporte les quatre arguments de ZÉNON dans la Physique.

Les arguments de Zénon contre le mouvement sont au nombre de quatre ; ils causent beaucoup de soucis à ceux qui veulent les résoudre(8).

(6) ARISTOTE, *Métaphysique*, B, IV, 1001 b 7.
(7) PSEUDO-ARISTOTE, *Des lignes insécables in* [1.]
(8) ARISTOTE, *Physique*, VI, IX, 239, b 9.

ARISTOTE, lorsqu'il cite ces arguments, a l'intention de les réfuter, aussi ne sont-ils peut-être pas donnés dans l'intention même que ZÉNON leur prêtait. L'interprétation de ces arguments est donc hypothétique.

2.2.1. La dichotomie

Le **premier argument** *porte sur l'inexistence du « se mouvoir », compte tenu du fait que le mobile doit d'abord parvenir à la moitié avant d'atteindre le terme de son trajet, argument que nous avons déjà discuté auparavant*[9].

La plupart des commentateurs, qu'ils soient anciens ou modernes, ont interprété ce texte comme par exemple Morris KLINE :
Le premier paradoxe de Zénon établit qu'un coureur ne pourrait jamais parvenir au terme d'une course parce qu'il doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance qui reste, puis la moitié de la distance qui reste encore, etc.

C'est pourquoi le coureur doit courir : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ *Zénon argumentait alors de la façon suivante : le temps requis pour couvrir un nombre infini de distances doit être infini.*

Je ne pense pas qu'il faille comprendre ce premier argument de cette manière. ARISTOTE dit que *le mobile doit d'abord parvenir à la moitié avant d'atteindre le terme de son trajet*. Si l'on réitère le procédé, on obtient : *le mobile doit d'abord parvenir à la moitié de la moitié avant d'atteindre le milieu du trajet* et ainsi de suite. Ce qui donne le schéma suivant :

Nous ne sommes plus en présence de la somme $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$, mais de la somme $\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$, ce qui change tout. **Le mouvement ne peut commencer**, ou comme le dit ARISTOTE, le « se mouvoir » n'existe pas, car il n'y a pas de point de départ, puisque nous sommes dans le cadre d'un espace et d'un temps continus. *Or, il faut nécessairement que le mobile commence par effectuer un demi-parcours*, si l'on veut qu'il y ait mouvement.

Dire, en plus que ZÉNON ne saisit pas le sens d'une somme infinie de termes est pour le moins présomptueux et me semble cacher l'embarras dans lequel on se trouve devant cet argument.

Le mouvement ne peut donc commencer. Cependant, ZÉNON, qui n'a jamais nié le mouvement comme phénomène, va ensuite examiner ce qui se passe lorsque l'on essaye de penser ce phénomène.

(9) ARISTOTE, *Physique*, VI, IX, 239, b 9.

2.2.2. L'Achille

Le **second argument** *est celui que l'on appelle l'Achille. Il consiste à dire que le plus lent à la course ne peut pas être rattrapé par le plus rapide, étant donné que le poursuivant doit nécessairement atteindre le point d'où le poursuivi est parti, de telle sorte que le plus lent doit sans cesse avoir une certaine avance*(10).
Souvent confondu avec la dichotomie, cet argument suppose donc l'existence du « se mouvoir ».

Achille, nous dit ZÉNON, ne pourra pas rattraper la tortue, car elle aura toujours une longueur d'avance

$$\ell_n = T_n - T_{n-1} = A_{n+1} - A_n$$

aussi petite soit-elle, ce qui est contraire à l'opinion commune, d'où paradoxe.

Ici encore, il ne sert à rien d'affirmer que la somme $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ldots$ cette fois-ci dans le bon sens, possède une limite finie. Le problème ne se situe pas là : à chaque étape, la tortue aura toujours une longueur d'avance et ne sera pas rattrapée !

Puisque la thèse continuiste ne permet pas de penser le mouvement, considérons l'espace comme composé d'**atomes** et le temps d'**instants consécutifs indivisibles**. Nous allons voir que les deux arguments employés dans la flèche et le stade sont tout aussi paradoxaux.

2.2.3. La flèche

Le point de vue atomiste consiste à voir l'axe du temps comme constitué d'instants indivisibles, à l'image d'un collier de perles excessivement fines et insécables.

Le **troisième argument** *est celui dont nous venons de parler, à savoir que la flèche qui se déplace est immobile. C'est ce qui résulte du fait que l'on admet que le temps est composé d'instants. Que l'on refuse cette prémisse et le raisonnement s'écroulera.*

Zénon propose un paradoxe trompeur : si un objet quelconque est en repos, lorsqu'il ne s'est pas déplacé du lieu qui est égal à ses propres dimensions, et si d'autre part cet objet qui se meut est sans cesse dans ce lieu qu'il occupe présentement, la flèche qui se déplace est immobile(11).

À chaque instant, indivisible de temps, et en particulier l'instant du départ, la flèche se trouve en un lieu égal à elle-même, immobile. Si elle était mobile, à l'instant suivant, elle se trouverait aussi dans un autre lieu, immobile. Mais comme le temps est composé d'instants, il n'y a pas de temps entre deux instants consécutifs.

(10) ARISTOTE, *Physique*, VI, IX, 239, b 14.
(11) ARISTOTE, *Physique*, VI, IX, 239, b 30.

Elle ne peut passer du lieu A de l'instant t_1 au lieu B de l'instant suivant t_2. Elle ne peut donc que rester immobile en A.

2.2.4. Le stade

Voici le quatrième argument tel que l'énonce ARISTOTE :

Le **quatrième argument** *est celui qui fait appel à deux trains*[12] *formés d'une succession de masses égales et qui se croisent sur un stade, en passant, l'un comme l'autre, devant un train immobile. La queue du premier train (*Γ*) est située à l'une des extrémités du stade ; la tête de l'autre train (*B*) est située au milieu ; les deux trains vont à vitesse égale. Pour Zénon, la conséquence est que la moitié est égale au double*[13].

Cet argument, *le plus instructif* selon BERGSON[14], est, de loin, celui que tout le monde dédaigne. Est-ce parce qu'on le trouve trop simpliste ou parce qu'on ne le comprend pas, ce qui revient peut-être au même?

Ici, il y a mouvement, mais le penser va conduire, là encore, à une contradiction.

Le stade est une métaphore. Imaginons que les masses représentent trois par trois des indivisibles consécutifs de l'espace : Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont trois indivisibles consécutifs ainsi que les trois piquets carrés et B_1, B_2 et B_3.

On compte les instants par rapport aux piquets carrés.

La Figure 1a. représente un instant, 1b. l'instant suivant.

Or, **si l'on ne tient pas compte des piquets carrés**, une question se pose : en quel instant, les points Γ_i et B_i se sont-ils croisées (Figure 2b.) ?

Cela doit avoir été dans l'intervalle des deux instants que nous imaginons consécutifs[15], il y a donc un autre instant entre deux instants consécutifs, ce qui est contradictoire.

Ce que ZÉNON traduit par « *La moitié est égale au double* ».

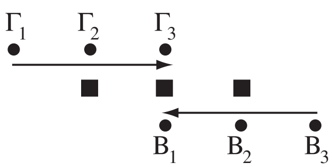


Fig. 1a. Instant 1.

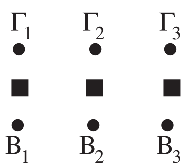


Fig. 1b. Instant 2.

---

(12) C'est comme cela qu'est traduit ce terme dans l'édition, établie par J.-P. DUMONT, du livre *Les écoles présocratiques*. Là encore, l'image du collier de perles serait beaucoup plus appropriée.

(13) ARISTOTE, *Physique*, VI, IX, 239, b 33.

(14) BERGSON, *Matière et Mémoire*.

(15) RUSSELL, *La méthode scientifique en philosophie*.

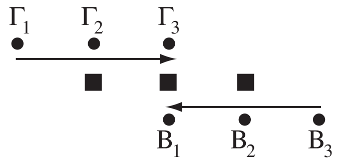


Fig. 2a. Instant 1.

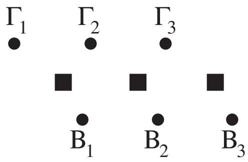


Fig. 2b. Instant ?

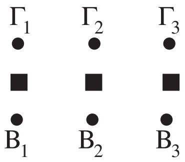


Fig. 2b. Instant 2.

Bergson trouve *instructif* ce dernier paradoxe, car on y voit clairement que le temps est assimilé à de l'espace, ce qu'il considère comme la source de tous les problèmes que l'on peut rencontrer lorsque l'on travaille avec le temps.

2.3. Quelques remarques

Zénon nous montre qu'*espace* et *temps*, qu'ils soient divisibles à l'infini (continus) ou composés d'indivisibles, d'*atomes*, ne peuvent pas nous permettre de penser logiquement le mouvement, phénomène que tout un chacun peut constater. Ce n'est donc, pour lui, qu'une illusion.

Parménide et son disciple Zénon, sont les premiers à séparer sensible et intelligible. Zénon nous apprend à nous méfier des apparences et nous fait réfléchir sur la notion de théorie. Une théorie peut-elle tout expliquer ? Est-elle pertinente pour rendre compte des faits que nous observons ? N'y a-t-il qu'une seule théorie possible ? *L'influence de* Zénon *sur l'évolution ultérieure de la pensée scientifique,* nous dit Taton, *a été immense, non seulement dans le domaine des mathématiques, mais dans celui de la physique*(16).

A-t-on résolu les problèmes soulevés par ces paradoxes ? Je ne le pense pas. Mais est-ce si grave que cela ? Toute théorie est un modèle parmi d'autres de la réalité, un filet plaqué sur elle ; comme le filet, elle comporte des trous, des zones non expliquées. Depuis Gödel, nous savons que nous ne pourrons jamais tout démontrer, tout expliquer, que le filet ne peut être une bâche.

En ce qui concerne l'**hypothèse continuiste**, j'avoue n'avoir toujours pas compris en quoi le fait, supposé ignoré des anciens, qu'une somme infinie de termes puisse être finie, permette de résoudre ces paradoxes. Qui n'a jamais eu à répondre à la question suivante : lorsque l'on enlève le point A au segment [AB], pourquoi n'y a-t-il plus de point qui ferme le segment ? C'est en fait la même chose que la dichotomie, quel est le premier point que va toucher le mobile après son départ ? Il est donné par la limite de la somme $1-\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots\right)$, c'est le point de départ, le mobile restera donc immobile ! Zénon ne dit pas autre chose, sous une autre forme évidemment.

Quant à Achille, il ne rattrapera jamais la tortue. Elle aura toujours une longueur d'avance. Pour le sceptiques, montrons-le par récurrence :

• Au départ, l'avance de la tortue est A_0A_1.

(16) Taton, *La science antique et médiévale des origines à 1450.*

• Supposons qu'à la n-ème étape, lorsqu'Achille est en A_n, la tortue ait une avance de A_nA_{n+1} ; lorsqu'Achille sera en A_{n+1}, la tortue sera en $A_{n+2} \neq A_{n+1}$, son avance sera donc $A_{n+1}A_{n+2} \neq 0$.
La tortue aura toujours une avance sur Achille !

L'**hypothèse atomiste** est tout aussi problématique. Que se passe-t-il entre deux instants consécutifs ? Qu'y a-t-il entre deux indivisibles consécutifs ? Comment un mobile fait-il pour sauter d'un atome à l'autre ? Quelle est la nature de ces indivisibles ?

Pour les Éléates, comme nous l'avons vu plus haut, une chose, pour exister, doit être une grandeur. Les *atomes* et *instants*, si l'on veut les penser, doivent être des grandeurs.

Voici quelques lignes que certains(17) considèrent comme parmi les seules citations textuelles de ZÉNON ; elles sont rapportées par SIMPLICIUS :

> *En effet, il a commencé par démontrer que : Si l'existant n'avait pas de grandeur, il n'existerait pas. Il poursuit : S'il existe, il est nécessaire que chaque existant ait une certaine grandeur, une certaine épaisseur et qu'il y ait une certaine distance de l'un par rapport à l'autre. Et le même argument vaut pour celui qui est devant lui. Car celui-ci aussi aura une grandeur, et un certain existant se trouvera devant lui. Or le dire une fois revient à le dire sans cesse. Car aucun existant n'occupera le dernier rang, et il n'est aucun existant qui n'existe pas en relation avec un autre.*

Or, il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'indivisibles dans un segment fini, car, nous dit ARISTOTE : … *chaque fois que nous prélevons la même grandeur, nous viendrons à bout de la grandeur limitée, étant donné que toute grandeur limitée peut se trouver épuisée par la soustraction d'une quelconque grandeur finie*. C'est ce que nous appelons actuellement l'axiome d'ARCHIMÈDE.

ZÉNON ne peut nous dire ce qu'il y a entre deux *existants*, puisque c'est du *non-existant*. Il faut d'ailleurs plutôt voir cela comme une relation entre deux existants qu'une chose en soi.

Ces arguments peuvent nous paraître simplistes tant nous sommes habitués, en mathématiques, à considérer l'espace continu. Cependant, depuis Max PLANCK, les physiciens pensent que la plus petite mesure de temps à laquelle nous puissions avoir accès est de 10^{-43} seconde : au-delà de cette limite les lois physiques cessent d'être valides. La longueur de PLANCK, 10^{-33} centimètre, serait la plus petite mesure d'espace, une frontière entre notre monde et le domaine quantique. *À des échelles aussi petites, l'espace devient une sorte de bouillonnement quantique dans lequel des particules virtuelles peuvent surgir du vide pour se désintégrer aussitôt*(18).

(17) DUMONT, [5].
(18) Donald NADON, http : //ww. futura-sciences. com/comprendre/d/dossier 188-3 . php

3. Annexe : quelques articles sur Zénon

1. Les paradoxes sont au nombre de quatre. Le paradoxe de la course à pied : Achille couvre à la vitesse uniforme d'un mètre par seconde la distance d'un kilomètre séparant le point A du point B. Considérons maintenant qu'Achille doit parcourir d'abord la moitié de la piste, parvenir au point central C, puis couvrir la moitié de la distance restante, entre C et B, et parvenir au point D.
Ce processus de division se poursuit à l'infini, puisque sans tenir compte de la longueur de plus en plus petite restant à parcourir, celle-ci peut toujours être divisée en deux parties égales. Étant donné que chaque segment fini de la piste demande un temps fini pour être parcouru et puisque nous avons affaire à un nombre infini d'intervalles finis, nous devons en conclure qu'Achille n'atteindra jamais son but. Signalons qu'il aura fallu deux mille ans aux mathématiciens pour trouver une solution à ce paradoxe. La faute de raisonnement consiste à penser que la somme d'un nombre infini d'intervalles finis d'espace et de temps doit, elle aussi, être infinie(19).

2. Le premier des paradoxes de Zénon d'Élée met en scène le Grec Achille, universellement célèbre à l'époque (500 av. J.-C.) pour sa rapidité à la course. Or, imaginons qu'Achille ait à parcourir 100 m à la vitesse uniforme de 10 m/s (soit 36 km/h). Il lui faut d'abord, disait Zénon, franchir la moitié de cette distance, puis la moitié de la distance restante, puis la moitié suivante, et ainsi de suite.
Ce processus peut être poursuivi indéfiniment, puisque la longueur restant à parcourir, bien que de plus en plus petite, peut toujours être divisée en deux parties égales. De plus, chaque segment ainsi défini demande un temps fini pour être parcouru. Donc, concluait Zénon, puisque Achille doit franchir un nombre infini d'intervalles finis, il n'atteindra jamais son but.
Théoriquement, le raisonnement semblait parfaitement juste. Pratiquement, il était immédiatement contredit par l'expérience. Or il faudra 2000 ans pour comprendre que ce raisonnement était faux : le point erroné dans le paradoxe du philosophe antique se trouvait dans l'idée que la somme d'un nombre infini d'intervalles finis d'espace ou de temps devait obligatoirement être infinie(20).

3. Zénon ou un autre Grec a présenté une version du paradoxe où non seulement le coureur ne parvient pas à son but, mais ne peut même pas démarrer. En effet, considérons le fait qu'Achille doive d'abord atteindre le point central C. Mais avant cela il doit atteindre le point D, situé à égale distance de A et de C, et ainsi de suite à l'infini, puisqu'il existe toujours une infinité de points entre deux points quelconques d'une même ligne continue. Donc, le coureur ne peut pas partir, car il n'y a pas de point suivant. Nous avons là encore affaire à la même série infinie, dont la limite est toujours 1.
(...)

(19) B. Godart Wending, *Paradoxe*, Encycl. Philo. Univers, P.U.F. Cité dans le numéro spécial Sciences et Avenir de mars 1996, « *Comprendre l'infini* ».
(20) Renaud de la Taille, dans Science & Vie, n° 943 d'avril 1996, p. 136.

Russell écrit à ce sujet dans son article, « Historique du problème de l'infini » : « Cet argument est essentiellement le même que le précédent [celui de la dichotomie]. Il prouve que, si jamais Achille dépasse la tortue, ce sera après un nombre infini d'instants écoulés depuis son départ. En fait, cela est vrai ; ce qui est faux, c'est l'idée qu'un nombre infini d'instants donne un temps infiniment long : et donc la conclusion qu'Achille ne dépassera jamais la tortue ne s'ensuit pas. »(21)

4. Dans ses deux derniers paradoxes, Zénon semble tout aussi opposé à l'hypothèse adverse, savoir : que la droite n'est pas divisible jusqu'à l'infini, mais est composée d'un nombre discret de points que l'on peut dénombrer : 1, 2, 3, Nous n'indiquerons pas ces deux paradoxes dont l'intelligence est plus complexe que celle des précédents. En tout cas, ces paradoxes constituent un mur d'airain au-delà duquel il apparaît impossible de progresser. Ces difficultés, qui, il y a une soixantaine d'années, semblaient une fois pour toutes résolues, ne le sont plus aujourd'hui pour tous les mathématiciens.(22)

5. L'argument le plus explicite encore dans la dichotomie : avant de pouvoir parcourir une ligne tout entière, un mobile doit d'abord couvrir la moitié de cette ligne, puis la moitié de cette moitié, et ainsi de suite à l'infini. Zénon constitue mentalement la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}^2+\frac{1}{2}^3+\ldots$, dont la somme vaut 1, mais n'arrive pas à en saisir intuitivement le contenu. Les notions modernes de limite et de convergence d'une série permettent d'affirmer qu'à partir d'un certain rang l'écart entre Achille et la tortue devient inférieur à un nombre e donné que l'on aura choisi aussi petit que l'on voudra.(23)

6. Le premier paradoxe de Zénon établit qu'un coureur ne pourrait jamais parvenir au terme d'une course parce qu'il doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance qui reste, puis la moitié de la distance qui reste encore, etc. C'est pourquoi le coureur doit courir : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$. Zénon argumentait alors de la façon suivante : le temps requis pour couvrir un nombre infini de distances doit être infini.

Une solution physique au paradoxe de Zénon qui soit en même temps la plus évidente est qu'un coureur couvrira la distance en un nombre fini de pas. Toutefois, si l'on accepte l'analyse mathématique de Zénon, le temps requis pourrait être $\frac{1}{2}$ minute + $\frac{1}{4}$ minute et ainsi de suite, et la somme de tous ces nombres infinis d'intervalles de temps est juste une minute. Cette analyse diverge du processus

(21) Nicholas Falletta, *Le livre des paradoxes*.(22) Source : André Delachet, *L'analyse mathématique*, Collection « Que sais-je ».

(22) Source : André Delachet, *L'analyse mathématique*. Collection « Que sais-je ? ».

(23) A. Dahan Dammamdico & J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques*.

physique mais le résultat n'en demeure pas moins.[(24)]

7. Les deux premiers arguments (la dichotomie et l'Achille) sont plus subtils et relèvent, pour la démonstration de leur inanité (lorsqu'on les considère comme voulant réellement démontrer qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue, ou que le mobile parti de A n'atteindra jamais C), du calcul infinitésimal (que ne pouvait évidemment connaître Zénon). Dans l'un et l'autre cas, les distances à parcourir pour atteindre le but sont de plus en plus petites, et, en conséquence, les temps mis pour les parcourir sont de plus en plus courts ; si l'espace est divisible à l'infini, le temps l'est également, de sorte que la distance finie pourra être parcourue en un temps fini.
(…)
Dans les deux premiers arguments, il veut montrer que, si l'on admet l'infinie divisibilité de l'espace, le mouvement (par rapport à un point fixe ou par rapport à un autre mobile) est impossible : si le segment de droite est composé d'une infinité de points, il ne pourra être parcouru par un mobile en un temps fini (car le mobile n'aura jamais épuisé cette infinité de points par lesquels il doit passer avant de parvenir à l'extrémité du segment). En fait, comme on l'a dit ci-dessus, Zénon ne tient pas compte ici du fait que le temps peut être, lui aussi, infiniment divisé, et qu'ainsi au segment de droite limité composé d'une infinité de points peut correspondre un laps de temps composé d'une infinité d'instants.[(25)]

8. L'histoire des infinitésimaux (ou infiniment petits) est beaucoup moins simple que celle de leur cousin l'infini, et les considérations du style de celles de Zénon y ont joué un rôle important. Le paradoxe dit de la dichotomie s'attaque à la divisibilité infinie de l'espace. Pour qu'un objet puisse se déplacer d'une certaine distance, il doit d'abord parcourir la moitié de cette distance ; mais avant de parcourir cette moitié, il doit nécessairement en parcourir le quart, et ainsi de suite. Obligé de faire une infinité de choses dans l'ordre inverse, il est dans l'impossibilité de prendre le départ. Le scénario d'Achille et la Tortue est assez analogue. Il s'agit cette fois du bouillant Achille qui ne parvient pas à rattraper la tortue beaucoup plus lente que lui, mais partie plus tôt : chaque fois qu'il atteint un emplacement où se trouvait la tortue, celle-ci a progressé pendant le déplacement d'Achille et elle conserve ainsi une certaine avance.
(...)
Les paradoxes de Zénon sont plus subtils qu'il n'y parait, et si on les considère sous l'angle de la nature physique de l'espace-temps plutôt que sous l'angle purement mathématique, ils posent encore aujourd'hui des questions délicates. Les grecs jugèrent ces paradoxes redoutables, ce qui contribuera à les dégoûter encore plus des nombres et à se réfugier dans la géométrie.[(26)]

9. Au V^{e} siècle avant notre ère, dans la ville grecque d'Élée, le philosophe Zénon bute sur un grave paradoxe, la Dichotomie, quand il analyse le mouvement : pour

(24) Morris Kline, *Mathématiques : la fin de la certitude*.
(25) André Pichot, *La naissance de la science, tome 2 Grèce présocratique*.
(26) Ian Stewart, *Les mathématiques*.

atteindre un point donné, un mobile doit d'abord parcourir la moitié de la distance qui l'en sépare, puis la moitié de la moitié et ainsi de suite à l'infini. Comment parcourir cette infinité de moitiés en un temps fini ?
Une variante de ce paradoxe est celui d'Achille et la tortue : jamais le véloce Achille ne rattrapera une tortue car « il est nécessaire que le poursuivant gagne d'abord le point d'où a pris son départ le poursuivi, en sorte qu'il est nécessaire que le plus lent, à chaque fois, ait quelque avance », explique Aristote dans la Physique.
Zénon d'Élée est aussi célèbre pour avoir posé le paradoxe de la flèche, qui affirme qu'une flèche ne peut atteindre son but. À chaque instant, la flèche se trouve à un endroit précis. Si l'instant est très court, la flèche n'a pas le temps de se déplacer et reste au repos pendant cet instant. Comme on peut raisonner de même pour chaque instant du parcours de la flèche, celle-ci est donc toujours immobile. E pur si muove…(27)

Références

[1] J.-P. Dumont. *Les écoles présocratiques*. Éd. Gallimard, Coll folio essais, 1991.

[2] Galilée. *Dialogues et lettres choisies*. Éd. Hermann, 1966.

[3] R. Taton. *La science antique et médiévale*. Éd. Quadrige/RU. F., 1994.

[4] J.-P. Cléro. *La notion d'infini en mathématiques dans la philosophie d'Aristote*. in Cahiers pédagogiques de philosophie et d'histoire des mathématiques, Éd. IREM Rouen/CRDP Rouen.

[5] J.-P. Dumont. *L'infini paradoxal de Zénon d'Élée : la dialectique de l'espace et du nombre*. in Histoire d'infini. Éd. IREM Brest, 1992.

[6] J.-M. Nicolle. *Pour son aide et son amitié*.

---

(27) Michel Blay, *Les mathématiques de l'infini* in *Les génies de la science*, n° 22, février-mai 2005.