

Les problèmes de fermeture : une mine d'exercices à ouvrir en classe

Jean-Pierre Friedelmeyer

Les problèmes pouvant donner lieu à des exercices simples, qu'on peut poser en classe, tout en ouvrant à des situations plus élaborées et difficiles sont plutôt rares. Les problèmes de fermeture sont de ceux-là : on peut commencer au collège, continuer au lycée et tomber sur des situations qui paraissent insolubles ou nécessitent des outils très puissants. Souvent un problème de fermeture facile peut en cacher un autre beaucoup plus difficile : il suffit de modifier légèrement les hypothèses. De sorte que tout un chacun peut, avec un peu d'imagination, inventer ses propres problèmes de fermeture. Ici, les énoncés sont présentés la plupart du temps sous forme « fermée », en commençant par la locution « démontrer que... » ; mais il est clair qu'avec les élèves le professeur pourra poser la question sous une forme plus ouverte, telle que « la ligne polygonale ... se ferme-t-elle ? ». Pour ne pas orienter votre recherche et pour stimuler votre imagination, nous ne donnons pas de solution aux problèmes proposés dans le corps du texte. Cependant quelques pistes seront fournies en fin d'article, pour ceux qui n'ont pas trop le temps de chercher ou qui sont à court d'idées.

Qu'est-ce qu'un problème de fermeture ?

Un problème de fermeture peut se rencontrer d'abord en portant simplement un autre regard sur certaines figures familières. Considérons par exemple la figure constituée par un triangle équilatéral ABC , son cercle inscrit et son cercle circonscrit, de centre commun O (figure 1). Dans cette configuration, le cercle inscrit a un rayon moitié du rayon du cercle circonscrit. Au lieu de regarder cette figure de manière statique, nous pouvons la décrire de manière plus dynamique : soient (O) et (O') deux cercles concentriques de centre O dont le second (O') a un rayon moitié du premier (O) . À partir d'un point A quelconque de (O) construisons une tangente à (O') ; elle recoupe

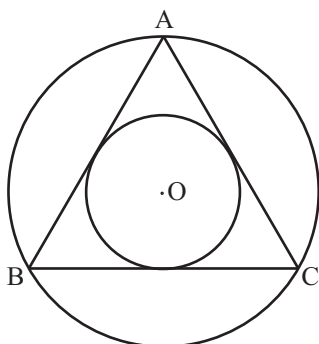


Figure 1

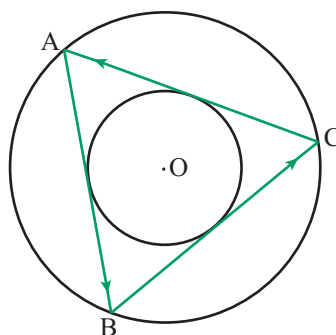


Figure 2

(O) en un point B : construisons de même la seconde tangente issue de B au cercle (O') : elle recoupe le cercle (O) en un point C ; construisons à nouveau la tangente à (O') en C ; elle recoupe le cercle (O) en A (figure 2).

Mais que se passe-t-il si le rapport des rayons des cercles n'est plus de 1 à 2 ? La troisième tangente ne passe plus par A (Figure 3) ! Cependant, peut-être qu'en continuant la construction de tangentes, une n-ième d'entre elles repassera par A (la septième dans la figure 4).

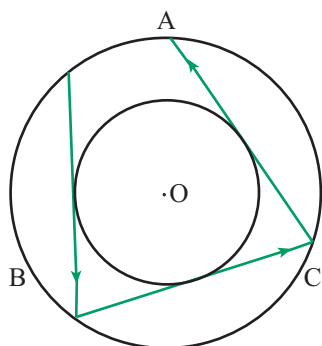


Figure 3

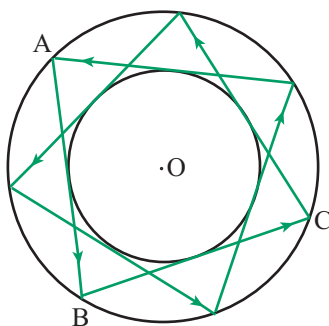


Figure 4

Nous dirons que dans les figures 2 et 4 la ligne polygonale se ferme (au bout de 3, respectivement 7 côtés) et nous pouvons alors poser un problème de fermeture : quelle est la relation entre les rayons des deux cercles concentriques, nécessaire et suffisante, pour que la ligne polygonale construite comme ci-dessus se ferme au bout de la n-ième tangente ? Nous reviendrons un peu plus loin sur cette question.

Les configurations conduisant à des problèmes de fermeture peuvent varier à l'infini. En voici quelques-unes, plutôt élémentaires.

Un exemple classique.

Sont donnés : un triangle quelconque ABC et un point M sur l'un de ses côtés. On trace (MN) parallèle à un côté ne contenant pas M, qui rencontre le troisième côté en N. Puis on recommence avec N.

Problème 1. Démontrer que la ligne polygonale ainsi obtenue se ferme toujours sur M au bout du sixième segment (sauf un cas particulier où c'est au bout de trois segments)

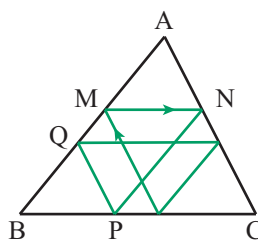


Figure 5

Situation plus générale.

Que se passe-t-il si l'on remplace les trois directions parallèles aux côtés par trois directions quelconques distinctes deux à deux $\delta, \varepsilon, \varphi$? Peut-il y avoir fermeture ? Ici la réponse n'est en général pas simple du tout. Elle le devient pourtant si l'on remplace le triangle donné par un cercle (voir problème 2).

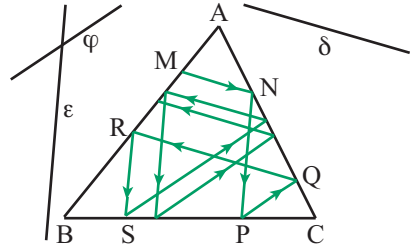


Figure 6

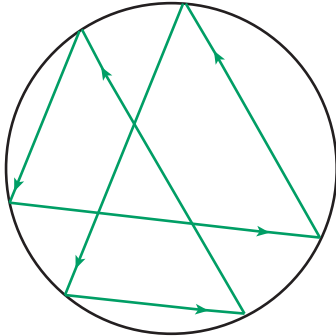


Figure 7

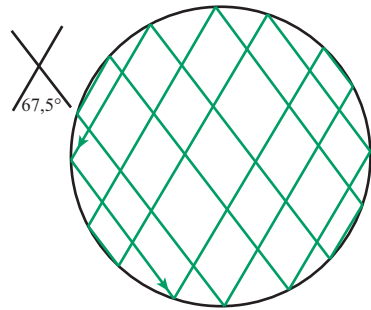


Figure 8

Problème 2. Démontrer que si l'on prend trois directions successives distinctes deux à deux, il y a toujours fermeture avec le sixième segment (exceptionnellement au bout du troisième segment).

Problème 3. Démontrer que si l'on prend deux directions faisant un angle α , il y a fermeture au bout d'un nombre fini de segments si et seulement si

$$\alpha = \frac{p\pi}{q} \quad (p \text{ et } q \text{ entiers}).$$

Sur la figure ci-dessus, $\alpha = \frac{3\pi}{8}$.

Problème 4. Si l'on prend n directions (n impair), correspondant aux n côtés d'un polygone inscrit dans un cercle, démontrer que la ligne se ferme en général au bout de $2n$ segments.

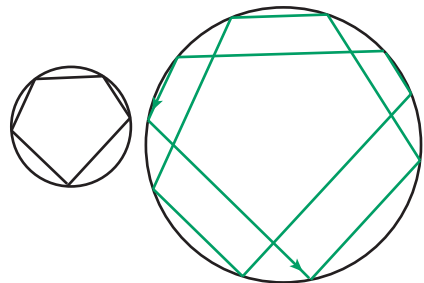


Figure 9

Problème 5. Par contre, si le nombre de directions n est pair, n correspondant toujours au nombre de côtés d'un polygone inscrit dans un cercle, alors la ligne se referme au bout de n segments.

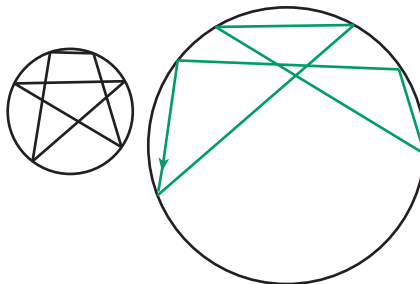


Figure 10

Revenons aux figures rectilignes, en l'occurrence le rectangle ABCD de la figure 11.

En partant d'un sommet (par exemple A) on considère la ligne polygonale AMNPQRSTX formée des segments successifs inclinés à 45° sur les côtés du rectangle ABCD. À quelles conditions la ligne polygonale se referme-t-elle au point A ? (Cela fait penser au billard, qui peut aussi donner des idées de problème de fermeture).

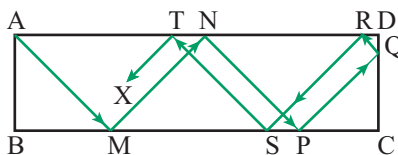


Figure 11

Problème 6. Démontrer que si les côtés sont mesurés par des entiers a et b premiers entre eux, la ligne polygonale se ferme au bout de $2(a + b - 1)$ segments. Dans la figure 12 on a un rectangle 9×19 et la figure se referme au bout du 54° segment. Mais en réalité il n'y a que 27 segments effectifs, chacun étant parcouru deux fois, la ligne polygonale arrivant au sommet opposé à celui du départ au bout du 27° segment.

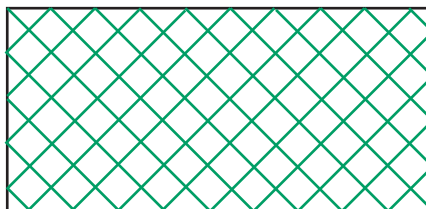


Figure 12

Problème 7. Démontrer de même qu'il y a fermeture en général au bout de $2(a + b)$ segments si l'on prend comme point de départ n'importe quel point sur les côtés du rectangle, comme dans la figure 13 correspondant à un rectangle de côtés 5×7 . Le résultat peut changer cependant, si la distance du point de départ à un sommet du rectangle est elle-même entière.

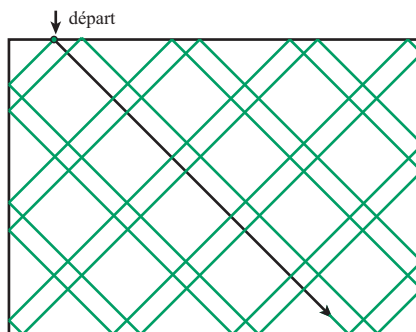


Figure 13

Si, au lieu de directions à 45° on prend des directions mesurées par la tangente de l'angle avec les côtés du rectangle, la situation est plus difficile à étudier. Elle est cependant abordable si les côtés du rectangle sont mesurés par des entiers (ou rapports d'entiers) et si la tangente de l'angle d'inclinaison des segments formant la ligne polygonale est rationnelle.

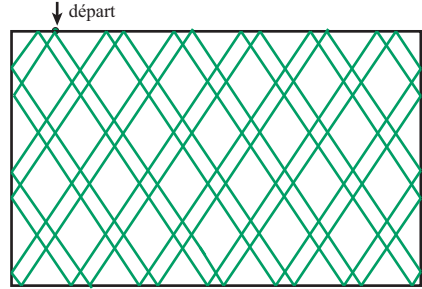


Figure 14

Problème 8. Démontrer que, dans un rectangle 5×8 et des directions inclinées sur le petit côté selon un angle dont la tangente vaut $2/3$, la ligne polygonale se ferme au bout du 34^{e} segment, quel que soit le point de départ sur les côtés du rectangle, sauf pour les départs en l'un des sommets du rectangle (Figure 14 ci-dessus). Dans ce dernier cas la ligne se ferme en revenant au point de départ au bout du 32^{e} segment (mais elle n'est constituée que de 16 segments différents, chacun étant parcouru deux fois).

Problème 9. Démontrer, de façon plus générale, que si les côtés du rectangle sont mesurés par les entiers a et b et la direction des segments par un angle avec le côté de mesure a dont la tangente vaut p/q (p et q entiers, tels que a, b, p, q soient premiers entre eux deux à deux) alors la ligne polygonale décrite ci-dessus se ferme au bout de $(ap + bq)$ segments, sauf si le point de départ est situé en l'un des sommets.

Parmi les problèmes de fermeture, il en est des célèbres, tels le problème de Steiner, ou le problème de Poncelet, dont la démonstration dépasse très largement le niveau du lycée. Nous les mentionnons seulement parce qu'il sont à l'origine de ce petit article et pour leur exceptionnelle beauté et généralité.

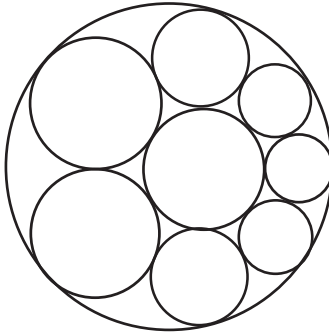


Figure 15

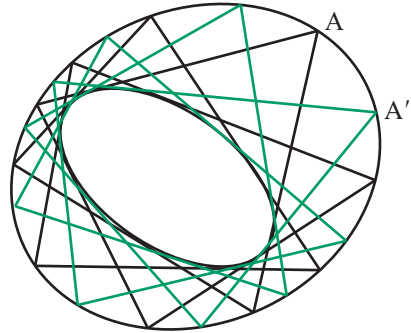


Figure 16

Un exemple de configuration de Steiner (Figure 15).

Deux cercles étant donnés, l'un intérieur à l'autre, on construit la suite de cercles tangents entre eux et tangents aux deux cercles donnés. À quelle condition sur les

rayons des cercles donnés et la distance de leurs centres existe-t-il une suite de cercles se fermant au bout d'un nombre fini de cercles (le premier cercle étant tangent au dernier) ?

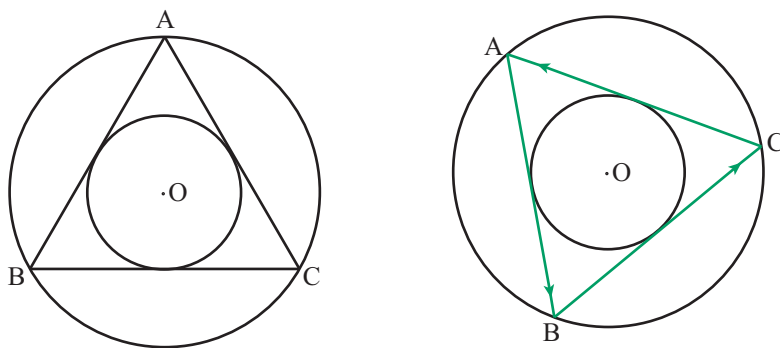
Un théorème de Steiner affirme que, si une telle configuration est réalisée avec n cercles tangents aux deux cercles donnés, la fermeture se produira également au bout de n cercles en commençant avec n'importe quelle position du premier cercle⁽¹⁾.

Un exemple de configuration de Poncelet (Figure 16).

Deux coniques quelconques étant données, à partir d'un point de l'une on trace une tangente à l'autre. Cette tangente recoupe la première conique en un point à partir duquel on construit la seconde tangente à la seconde conique, etc. À quelle condition sur les coniques cette ligne polygonale se referme t-elle au bout d'un nombre fini de tangentes ?

Un théorème de Poncelet affirme alors que si elle se referme au bout de n tangentes à partir d'un point défini de la première conique, elle se refermera au bout du même nombre n de tangentes à partir de n'importe quel point de départ de la première conique⁽²⁾.

Un cas particulier de problème de Poncelet est celui de deux cercles concentriques, déjà évoqué au début de cette article.



Problème 10. Soient deux cercles concentriques de rayons R (pour le cercle extérieur), et r (pour le cercle intérieur). Démontrer que la ligne polygonale se referme au bout de n tangentes si et seulement si il existe un entier naturel p tel que

$$\frac{r}{R} = \cos \frac{2p\pi}{n}.$$

Un exemple ancien en est donné par ce qu'on appelle la relation d'Euler pour un triangle mais qui a été trouvée et démontrée pour la première fois en 1746 par William Chapple (1711 ? – 1781) (Figure 17) :

(1) On trouvera des informations simples sur cette configuration de Steiner dans Coxeter « *Redécouvrons la géométrie* », Dunod, 1971, p. 144 et suivantes.

(2) Poncelet, J.-V. , *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, seconde édition en 2 vol., Paris (1865 - 1866) , vol. I, p. 349.

Problème 11. Les cercles (O) et (O') ont pour rayon respectif R et r, avec (O') à l'intérieur de (O). Soit $d = OO'$ la distance des centres. À partir d'un point A sur (O) on trace une tangente au cercle (O') qui recoupe le cercle (O) en B. De B on trace la seconde tangente à (O') qui recoupe (O) en C. De C on trace une troisième tangente. Démontrer que cette tangente passe par A si et seulement si $d^2 = R^2 - 2Rr$.

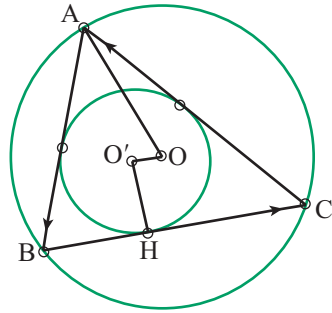


Figure 17

Un autre exemple en est donné par le problème 12 qui suit :

Problème 12. Soient deux cercles (O) et (O') tels que le premier passe par le centre O' du second. Soient [AB], [BC] et [CD] trois cordes du cercle (O) ; démontrer que si (AB), (BC) et (CD) sont toutes les trois tangentes au cercle (O'), il en est de même de la droite (DA). (Autrement dit la ligne polygonale ABCDX, inscrite dans le cercle (O) et circonscrite au cercle (O') se referme en A). Démontrer que (OO') est un axe de symétrie pour le quadrilatère (ABCD).

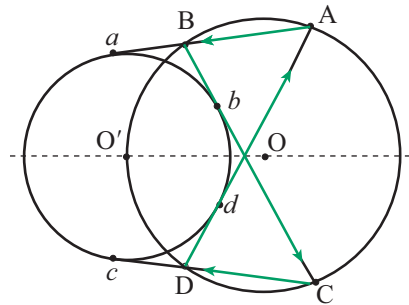


Figure 18

On aura remarqué dans tous ces problèmes, que lorsqu'il y a fermeture, il y aura toujours fermeture quel que soit le point de départ ; et lorsqu'il n'y a pas fermeture pour un point précis, il ne peut jamais y avoir fermeture pour aucun autre point. Mais on peut rencontrer des situations dans lesquelles il y a fermeture pour certaines positions seulement et pas dans le cas général, comme dans l'exemple qui suit d'un cercle inscrit dans un carré de même centre.

Problème 13. Soit un carré ABCD de centre O, de demi diagonale $OA = a$, et (O) un cercle centré en O et de rayon r inférieur à a. Les tangentes issues de A au cercle (O) recoupent (BC) et (DC) en E et F. Démontrer que (EF) est tangente au cercle (O) si et

seulement si $\left(\frac{a}{r} - 1\right)^3 = \frac{a}{r} + 1$.

Démontrer que, en dehors des points M pris aux sommets du carré, la ligne polygonale MNPQ, formée par les tangentes successives au cercle (O) ne se referme pas.

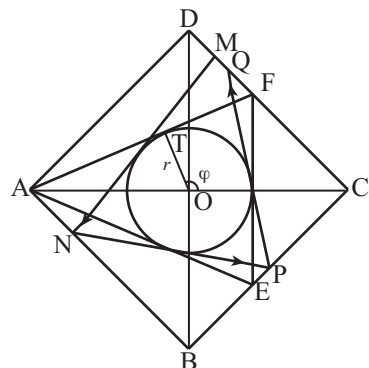


Figure 19

Le cas de la parabole.

Problème 14. Soit (P) la parabole d'équation $y = ux^2 + v$ ($u \neq 0$) relativement à un repère orthonormé d'origine O et (O) le cercle centré en O et de rayon 1. D'un point A quelconque de la parabole (P) on construit une tangente à (O) qui recoupe (P) en un point B. De B on construit la seconde tangente à (O) qui recoupe (P) en C, et de C on construit une troisième tangente à (O). Démontrer que cette troisième tangente repasse par A, quel que soit le point A pris au départ, sur (P) si et seulement si $(u + v)^2 = 1$.

Démontrer que dans ces conditions, l'orthocentre du triangle ABC se déplace sur une droite fixe lorsque le triangle ABC varie sur la parabole en restant tangent au cercle (O).

Vérifier que cet orthocentre est fixe lorsque $u = 1/2$ ou lorsque $u = -1/2$

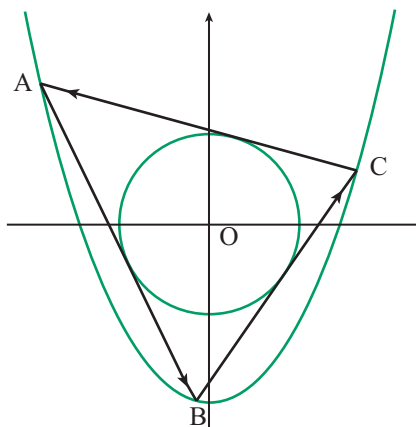
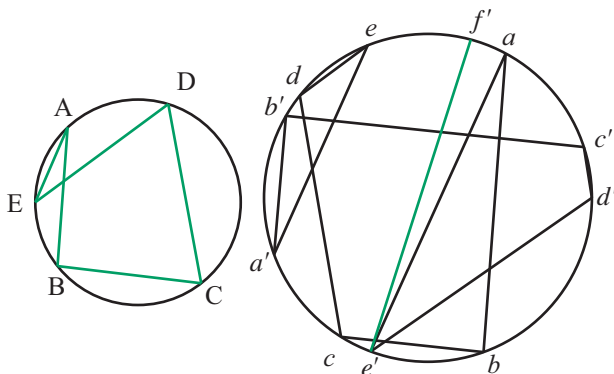


Figure 20

Ce ne sont là que quelques exemples pour montrer la variété, la richesse et quelquefois la complexité des problèmes de fermeture. Chacun d'entre vous pourra imaginer ses propres situations et proposer ses solutions. À vos règles, stylos et logiciels de dessin !

Quelques pistes supplémentaires.

Les problèmes liés à des polygones inscrits dans un cercle se traitent bien évidemment avec les relations entre mesure de l'angle inscrit et mesure de l'arc intercepté. Voici un exemple.



Soit ABCDE la ligne polygonale de référence, et $abcdea'b'c'd'e'f'$... la ligne construite par parallélisme. On a :

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{CE} + \widehat{DA} + \widehat{EB} = \widehat{ac} + \widehat{bd} + \widehat{ce} + \widehat{da'} + \widehat{eb'} = \widehat{ab'} + \widehat{a'b} = 2k\pi.$$

Cela ne permet pas d'affirmer que $a = a'$, mais seulement que (ab) est parallèle à $(a'b')$ ce que l'on savait déjà. Ensuite,

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{CE} + \widehat{DA} + \widehat{EB} + \widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{CE} + \widehat{DA} = \widehat{BE} + 2k\pi.$$

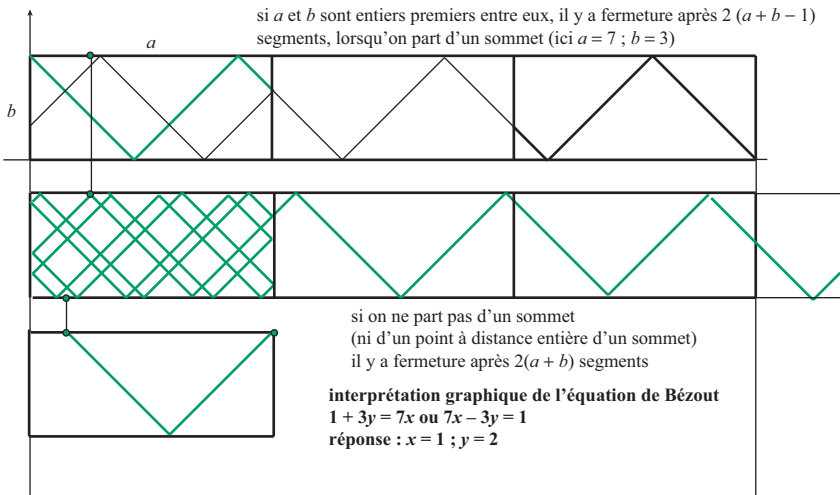
De même on a :

$$\widehat{ac} + \widehat{bd} + \widehat{ce} + \widehat{da'} + \widehat{eb'} + \widehat{a'c'} + \widehat{b'd'} + \widehat{c'e'} + \widehat{d'f'} = \widehat{af'} + \widehat{be'}.$$

Mais $\widehat{be'} = \widehat{BE}$ donc $\widehat{af'} = 2k\pi$ donc f' est confondu avec a . Si les arcs sont égaux chacun à chacun ($\widehat{AC} = \widehat{ac}$; $\widehat{BD} = \widehat{bd}$, etc) alors les deux lignes polygonales sont homothétiques et la ligne $abcdea'b'...$ se referme en $f' = a$.

Problème 6. Si les côtés sont mesurés par les entiers a et b (situation à laquelle on peut toujours se ramener lorsque a et b sont commensurables), on cherche le plus petit commun multiple de a et b . Donc on prend b rectangles accolés, et alors la ligne polygonale arrive à un sommet au bout de a segments inclinés à 45° . Parmi ceux-ci, $(a - 1)$ coupent le côté mesurant b et sont donc dédoublés. En particulier, lorsque a et b sont premiers entre eux, ce PPCM est ab . Voir les figures ci-dessous (on suppose $a > b$).

Remarquons que si a et b sont premiers entre eux, en prenant comme point de départ le point situé à une unité d'un sommet, sur le côté a , on a une illustration de l'équation de Bézout : $ax - by = 1$.



Pour les **problèmes 8 et 9** on cherchera de même le plus petit multiple commun à $b.p/q$ et a .

Problème 10. Repérer les sommets par des angles $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1$ (s'il y a fermeture) et remarquer que :

1. $a_{k+1} - a_k$ est constant pour k entier compris entre 1 et $(n - 1)$;

$$2. \cos\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2}\right) = \frac{r}{R}.$$

Problème 12. Considérons les symétries axiales par rapport à $(O'B)$, puis $(O'C)$, puis $(O'D)$: elles transforment (AB) en (BC) puis (CD) puis (DX) tangent à (O', r) et coupant (O, R) en X . On en déduit l'angle (AB, DX) vérifie :

$$(AB, DX) = (AB, CD) + (CD, DX) = (O'a, O'c) + (O'c, O'd) = (O'a, O'd).$$

Mais les points A, B, O', D sont cocycliques donc

$$(AB, AD) = (O'B, O'D) = (O'a, O'd) = (AB, DX).$$

Donc $(AD) = (DX)$ ou $A = X$.

Problème 13. T étant le point de contact de (AF) avec (O) et φ l'angle COT , montrer

$$\text{que } \cos(\varphi) = -\frac{r}{a} \text{ et } \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{a}{r} - 1.$$

Remarque : en posant $x = \frac{a}{r} - 1$, on est conduit à l'équation $x^3 - x - 2 = 0$.

Problème 14. C'est sans doute le plus difficile et la solution analytique proposée ci-dessous n'est peut-être pas la plus élégante. N'hésitez pas à nous en proposer une meilleure.

Désignons par (a, a') , (b, b') et (c, c') les coordonnées respectives de A, B et C . En exprimant le fait que la distance de O aux droites (AB) , (BC) et (CA) est égale à 1, on obtient les trois relations :

$$(ab' - ba')^2 = (a - b)^2 + (a' - b')^2$$

$$(bc' - cb')^2 = (b - c)^2 + (b' - c')^2$$

$$(ca' - ac')^2 = (c - a)^2 + (c' - a')^2$$

dans lesquelles on remplacera a' par $(ua^2 + v)$ et des relations analogues pour b' et c' .

En mettant en évidence les fonctions symétriques de a, b et c on arrive à dégager les relations : $u(ab + bc + ca) = u + 2v$, puis $a + b + c + abc = 0$ et enfin $(u + v)^2 = 1$.

Pour l'orthocentre H , les mêmes relations conduisent à :

$$y_H = \frac{u-1}{u} \text{ et } x_H = (a + b + c)(1 - 2u) \text{ lorsque } u + v + 1 = 0 ;$$

$$y_H = -\frac{u+1}{u} \text{ et } x_H = (a + b + c)(1 + 2u) \text{ lorsque } u + v = 1.$$