Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aire, mais … il doit le devenir.

Sophie Dupuy-Touzet(*) & Pierre Lopez(**)

Introduction.

Nous présentons dans cet article un exemple de mise en pratique de concepts de la didactique des mathématiques.

Disons tout de suite que nous ne sommes pas des « didacticiens ». Nous n'en avons pas les titres universitaires, même si nous avons, tous les deux, bénéficié de la formation dite « Diplôme universitaire en didactique »[1] à l'Université de Toulouse.

Notre point de vue est un point de vue de « praticien ».

Nous étions dans la situation d'un professeur de terminale S qui doit enseigner la partie « Intégration ».

À partir de réflexions sur le concept mathématique et en tenant compte de notre expérience, nous avons formulé des hypothèses sur les éventuelles difficultés que cet enseignement pouvait présenter.

Nous nous sommes attachés à construire une séquence d'enseignement, et plus particulièrement une activité d'approche, en respectant ces hypothèses. Après sa mise en pratique, nous avons exploité son déroulement pour revenir sur notre analyse a priori et proposer des modifications.

Nous ne nous sommes fait ni une obligation, ni une interdiction de l'usage d'un vocabulaire didactique. Nous ne le redoutons pas et pensons même que ce vocabulaire est utile. Cependant, nous n'avons pas voulu faire un article de didactique. Nous nous sommes contentés de témoigner d'une démarche pratique faisant suite à notre formation.

1. Analyse du contexte mathématique.

a) Explication du titre.

Au vu de l'histoire des mathématiques[2], la première partie du titre peut être considérée comme un contresens. Le calcul intégral s'est construit sur la problématique du calcul d'aire. Plus généralement, on peut dire que le calcul d'aire est un contexte qui a amené les mathématiciens vers le calcul infinitésimal.

(*) Groupe IREM « Second Cycle ». Lycée Les Arènes Toulouse.
(**) Groupe IREM « Maths-Physique-Lycée ». Lycée Louis Rascol Albi.

(1) Celle-ci a débouché sur la rédaction de deux mémoires : « Exemples d'obstacles liés à une phase de dé-transposition » par Mme Sophie Dupuy-Touzet (septembre 2004) et « La notion de “ technique ” comme outil d'analyse de pratiques » par M. Pierre Lopez (septembre 2004).

(2) Voir, par exemple, « Une histoire des mathématiques », A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer, Points-Sciences, 1986.

De plus, les traités « modernes » de calcul intégral font toujours le lien avec les aires, ne serait-ce que pour donner la « signification » d'une intégrale d'une fonction en escalier.

Enfin, le programme de terminale S demande de définir l'intégrale dans le cas d'une fonction positive comme l'« aire sous la courbe » :

Programme de Terminale S (B.O. nº 4 30 août 2001 HORS SÉRIE)

Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a,b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires : l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajourer une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Alors pourquoi avoir écrit cette première partie du titre ?

Tout d'abord, nous ferons remarquer que la première partie du titre n'est pas le titre complet !

Quand nous disons que le calcul intégral n'est pas un calcul d'aire, nous faisons l'hypothèse que, pour les élèves qui ont pratiqué des calculs d'aire pour des surfaces élémentaires depuis l'école primaire, la notion d'aire n'est pas *problématique* par le fait même qu'ils n'envisagent pas qu'une surface n'ait pas d'aire.

Or (est-il besoin de le rappeler) le calcul intégral ne règle pas uniquement la question du calcul d'aires de surfaces pour lesquelles les règles opératoires connues ne marchent pas, il montre (et on pourrait rajouter : « surtout ») que l'on peut définir l'aire de ces surfaces(3).

Quand on dit que le calcul intégral répond à la question : « comment peut-on définir l'aire sous la courbe ? », il faut entendre qu'il y répond doublement. Il donne une définition de l'aire (premier sens de « comment », prenant l'aire comme une

(3) À ce propos, il semble donc illusoire de motiver un enseignement sur la notion d'aire à l'aide de la recherche de la formule de l'aire d'un disque qui pour les élèves *ne peut être que* πr^2 !

notion) et il donne un moyen de calcul (deuxième sens de « comment », prenant l'aire comme un nombre)[4].

Or, comme nous l'avons dit plus haut, nous faisons l'hypothèse que les élèves n'« entendent » pas le premier « comment ». La première partie de notre titre veut donc dire que le calcul d'aire ne peut pas être chez les élèves une motivation au calcul intégral.

En d'autres termes, la connaissance intuitive de la notion d'aire complique la problématisation du calcul intégral par le calcul d'aire.

On peut citer à ce propos Henri Lebesgue :
« De plus, parmi les nombreuses définitions qui ont été successivement proposées pour l'intégrale des fonctions réelles d'une variable réelle, je n'ai retenu que celles qu'il est, à mon avis, indispensable de connaître pour bien comprendre toutes les transformations qu'a reçues le problème d'intégration et pour saisir les rapports qu'il y a entre la notion d'aire, si simple en apparence[5], et certaines définitions analytiques de l'intégrale à aspects très compliqués » (« Leçons sur l'intégration »[6], Introduction à la première édition).

Le « si simple en apparence » nous a confortés dans l'idée que les élèves ne peuvent pas comprendre nos préoccupations théoriques concernant la notion d'aire.

Ce que nous avons compris de la « théorie des situations » nous amène à reformuler la conséquence de notre hypothèse en disant que le contexte du calcul d'aire n'est pas bon pour essayer de construire une « situation fondamentale » introduisant le calcul intégral.

Il nous fallait donc trouver autre chose !

Cependant, nous voulions, quelle que soit la démarche pédagogique qui serait choisie, appliquer strictement le programme. D'où la deuxième partie de notre titre : le calcul intégral doit devenir un calcul d'aire.

Nous avons donc cherché une situation qui « problématise » le calcul intégral sans s'appuyer sur la notion d'aire et qui fasse intervenir le calcul d'aire comme solution du problème.

Avant d'aller plus loin, nous voudrions préciser un point.

On n'aura pas été sans remarquer l'usage que nous avons fait à plusieurs reprises du mot « hypothèse ». Cela nous paraît significatif de notre démarche. C'est en ce sens que notre travail veut aller au-delà d'un échange d'opinions.

Nous n'affirmons pas une vérité, nous énonçons un point de vue. Nous en déduisons des conséquences pratiques que nous mettons à l'aune d'un déroulement en classe.

(4) On remarquera que le programme court-circuite de fait le premier « comment ». En effet, il n'envisage pas la question de l'existence de l'aire : celle-ci existe et définit l'intégrale (*voir extrait du programme ci-dessus*).

(5) C'est nous qui soulignons.

(6) Rappelons que cet ouvrage est consacré « à l'étude du développement de la notion d'intégrale ».

La validation de l'hypothèse réside dans une sorte de vérification a posteriori.

Nous sommes conscients des problèmes épistémologiques que cette méthode induit. Nous ne sommes pas compétents pour les énoncer clairement, et donc a fortiori les résoudre. Notre formation tant universitaire que professionnelle n'a jamais pris en compte ces aspects. Nous le regrettons et nous laissons le lecteur se documenter par ailleurs.

b) Où il est question de modélisation.

Donnons un nouvel éclairage du titre en rejouant avec les verbes « être » et « devenir ».

Nous mettrons en exergue une nouvelle citation de Henri Lebesgue :
« Mais n'y a-t-il pas, pour l'intégrale de Stieltjes, une définition analogue à la définition géométrique de l'intégrale, c'est-à-dire qui apparaisse comme une simple mise au point d'une définition intuitive. Ce mode de définition existe, il a certainement guidé les premières idées de Stieltjes… » (« Leçons sur l'intégration », page 290).

Notre thèse est que le calcul intégral n'*est* pas un calcul d'aire. Il le *devient* par un processus de modélisation.

Le calcul intégral n'*est* pas un calcul d'aire parce que précisément sans le calcul intégral, les aires n'*existent* pas.

Pour être plus précis, on devrait dire « la notion d'aire sous la courbe d'une fonction ». En effet, nous n'ignorons pas qu'il y a d'autres moyens de définir l'aire que par le calcul intégral. Cependant, en revenant au contexte des classes de lycée, il faut partir du principe que c'est le calcul intégral qui va permettre de *parler* de la notion d'aire(7).

On voit alors comment un acte de modélisation peut (ou doit) intervenir dans l'enseignement de cette partie du programme.

Il ne s'agit pas d'essayer de « démontrer » que le calcul intégral *correspond* au calcul d'aire, mais que le calcul intégral *donne* le calcul d'aire. Il ne faut pas essayer par des « raisonnements » portant sur la sommation d'aires « infinitésimales » d'entraîner les élèves vers l'idée que l'on a *démontré* que le calcul intégral *est* un calcul d'aire.

Le calcul intégral *devient* un calcul d'aire, car on *dira* que « l'aire sous la courbe » est définie par l'intégrale de la fonction sur l'intervalle considéré.

On pourrait nous reprocher de nous éloigner des programmes. Il n'en est rien. Il nous semble que nous avons lu le programme avec au contraire une attention toute particulière et nous ne ferons pas l'injure à leurs rédacteurs de penser que, quand ils disent que l'intégrale est l'aire sous la courbe, ils ignorent que cette aire est une notion *intuitive* (d'ailleurs, ils le disent !).

On peut maintenant considérer que nous avons définitivement réglé la question de notre titre. Passons à autre chose.

(7) C'est dans cet esprit que l'un des deux auteurs avait publié en septembre 2002 dans le « Fil d'Ariane » n° 16 un article intitulé « Tangente et modélisation ».

c) Un nouveau contexte.

Où en sommes-nous ?

Nous avons à enseigner le calcul intégral de telle sorte, on l'aura compris, qu'il devienne un calcul d'aire. C'est une première difficulté.

Mais nous en envisageons (au moins !) une autre : la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ [(8)].

Trois problèmes se posent alors :

- le symbole $\int$;
- l'énonciation « somme de *a* à *b*… » ;
- le « d*t* ».

Historiquement, d'après F. Cajori[(9)], on doit le symbole $\int$ à Leibniz qui l'emploie pour la première fois en 1675 dans un manuscrit daté du 29 octobre.

Plus précisément, Leibniz écrit $\int l$ pour parler de «la somme des *l* » (les « *l* » représentent des grandeurs qui correspondent à nos images de fonction).

Nous avons ainsi la réponse aux deux premiers problèmes, plus un que nous n'avons pas encore explicité : l'explication que l'on peut donner en classe du terme même de « calcul intégral ».

Il nous semble important de ne pas éluder cet aspect de notre enseignement qui consiste à prendre en compte le fait que nous nous exprimons dans une langue qui, comme toutes les langues, recèle un aspect métaphorique. Les mots créent des images. On s'en tire parfois en insistant sur le fait qu'en mathématique une expression doit être lue « globalement ». Quand on parle de « calcul intégral » on ne parle pas d'un « calcul » qui serait « intégral » mais de quelque chose qui s'appelle « calcul intégral ».

Cependant, on peut soupçonner que pour nos élèves, « intégral » évoque l'image d'un casque intégral. Qu'à cela ne tienne ! On dira que « Le calcul intégral est à la fonction ce que le casque intégral est à la tête : le casque intégral prend toute la tête, le calcul intégral prend toute la fonction (ou si on préfère, toutes les valeurs de la fonction). »[(10)]

Nous arrivons à l'idée que le calcul intégral prend en compte « toutes les valeurs de la fonction », généralisant la notion de somme.

Se présente alors la question des « dimensions », au sens du physicien.

---

(8) Si on en croit J. Dieudonné (« Pour l'honneur de l'esprit humain », Éditions Pluriel, 1987, p. 75) cette notation est due à Fourier.

(9) Nous prenons comme référence « A History of Mathematical Notations » de F. Cajori.

(10) Pour une étymologie plus sérieuse, voir l'ouvrage de B. Hauchecorne « Les Mots & les Maths », Ellipses, 2003

Commençons par citer le programme de terminale S :
« *[…] si x et y sont deux grandeurs liées par une relation y = f(x), l'intégrale […] est une grandeur homogène au produit des grandeurs xy […]* ».

Par exemple, si $f(t)$ donne une vitesse en fonction du temps, en intégrant on passe de « mètres par seconde » à des « mètres ».

Souvent le « dt » dans la notation de l'intégrale est justifié en invoquant des aires « infiniment petites ». Normalement, dans un cours d'analyse classique, ce vocabulaire n'a plus cours. La problématique des dimensions peut expliquer le maintien de cette notation(11). Dans nos classes, ce « dt » peut être présenté comme la marque de ce changement de dimension.

Si on considère la valeur moyenne, les dimensions ne posent plus problème.
Par ailleurs la notion de « somme généralisée » prend tout son sens.

Nous en sommes donc arrivés à l'idée d'introduire le calcul intégral dans un contexte de calcul de valeur moyenne, sans oublier notre objectif : assurer in fine l'identification « calcul intégral = calcul d'aire ». Pour cela, nous devons chercher une activité portant sur un calcul de valeur moyenne qui fasse intervenir le calcul d'aire dans la solution du problème posé.

Avant de détailler l'activité que nous avons construite, nous présentons l'ensemble de la séquence d'enseignement à laquelle elle s'intègre.

2. La séquence d'enseignement faite en terminale S.

Cette séquence, relative au calcul intégral pour des fonctions continues positives, est constituée de trois séances. La première a duré une quarantaine de minutes ; la seconde une heure ; la dernière une heure trente.

La première séance est consacrée à l'activité d'approche.
À travers un problème de nivellement de terrain, elle a pour principal objectif de faire le lien entre la recherche d'une valeur moyenne et un calcul d'aire.
L'analyse détaillée de cette activité fait l'objet du paragraphe suivant.

À l'issue de cette activité, la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ainsi que la définition de la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ sont données, pour des fonctions positives.

L'intérêt du calcul de l'aire sous une courbe est dès lors suscité, et la méthode des rectangles pour déterminer une valeur approchée est initiée.

La deuxième séance est consacrée à deux activités issues du manuel scolaire de la classe (collection Math'x ; édition Didier).
Ces activités proposent des encadrements de l'aire sous la courbe par des suites.

Dans la première activité (Activité 1, page 174), intitulée « Encadrement d'une aire par deux suites adjacentes », les suites sont obtenues par dichotomie de l'intervalle d'intégration.

(11) Nous n'ignorons pas qu'il n'en est pas toujours ainsi dans les exposés universitaires sur le calcul intégral, mais nous nous intéressons à ce qui se passe au lycée.

Dans la deuxième activité (Activité 2, page 175), intitulée « Calcul d'aire sous la parabole », les suites sont obtenues en divisant l'intervalle d'intégration en n parties égales.

L'objectif de cette séance est triple :

- justifier l'existence de l'aire sous la courbe, aire égale à une limite de suites ;
- présenter deux méthodes de calcul approché de l'aire sous la courbe, utilisant des procédés différents de subdivision d'un intervalle ;
- préparer la séance suivante, comme nous le verrons plus loin.

Les deux premières questions de la première activité ont été données en travail à la maison et sont corrigées en début de séance. La fin de cette activité, ainsi que la première question de la seconde font l'objet d'un travail autonome des élèves en classe, suivi d'une correction collective. La deuxième question de la seconde activité est donnée en travail à la maison. La troisième question ne sera délibérément pas traitée.

La troisième séance débute par la correction du travail fait à la maison. Elle se poursuit par une dernière activité qui a pour objectif la démonstration du théorème suivant :
« Si f est continue, positive, croissante, sur un intervalle $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a. »

Activité 3: Étude de la fonction « Aire sons la courbe ».

Soient f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $I=[a\,;b]$, C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On définit sur I la fonction A qui à t associe l'aire délimitée par C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=t$.
L'objectif de l'activité est de montrer que A *est dérivable sur* I*, et de déterminer sa fonction dérivée.*
1. Soient t_0 dans $[a\,;b[$, et h un réel strictement positif, tel que $t_0+h\in$ I.

a) Justifier l'encadrement : $h\,f(t_0)\le A(t_0+h)-A(t_0)\le h\,f(t_0+h)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{A(t_0+h)-A(t_0)}{h}=f(t_0)$.

2. Faire un raisonnement analogue avec t_0 dans $]a\,;b]$ et h un réel strictement négatif, tel que $t_0+h\in$ I.
3 Conclure.

Il convient de préciser à ce niveau une difficulté concernant la démonstration visée. La fonction F est définie géométriquement. Or, pour montrer sa dérivabilité, on fait appel à un outil (le taux d'accroissement) qui n'a été exploité que dans un contexte algébrique.

La question 1a amène les élèves à aborder le problème d'un point de vue géométrique. Le résultat demandé s'obtient en encadrant une aire par des aires de rectangles. La séance précédente doit faciliter cette étape, permettant un traitement rapide de la question, afin d'en venir à la question 1b, point essentiel de l'activité.

Après un travail autonome puis une correction collective de cette activité, le théorème est formulé, généralisé aux fonctions positives non monotones.

Pour clore la séance, les élèves ont à répondre à la question suivante :
« Dans le cas d'un mouvement rectiligne, la vitesse moyenne entre les instants T_0 et T_1 est-elle égale à la valeur moyenne de la fonction vitesse instantanée sur l'intervalle $[T_0 ; T_1]$? »

Analysons à présent la première activité de la séquence.

3. Analyse de la première activité.

a) Le point de départ.

L'exploitation du document d'accompagnement des programmes fut notre première démarche.

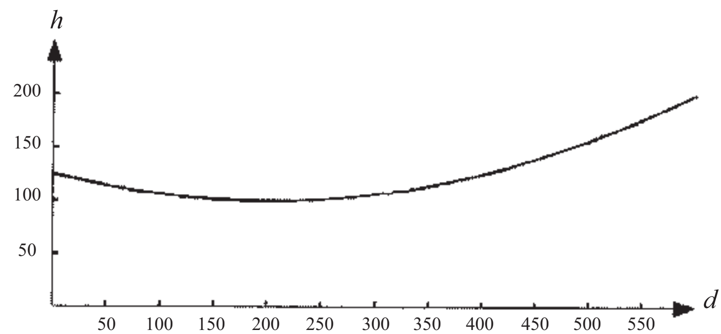
L'activité proposée page 40, intitulée « Un terrain » nous a semblé pertinente.

Nous avons alors décidé d'introduire le calcul intégral à travers la valeur moyenne à l'aide d'un problème de nivellement.

Texte de l'activité du document d'accompagnement

1. Un terrain

1.1. On connaît le profil.
La figure 1 ci-dessous, sur laquelle les distances et les hauteurs sont indiquées en mètres, montre le profil d'un terrain. Le tableau 1 décrit numériquement le même profil. Et la formule (1) en fournit une description algébrique.
Figure 1



d en m	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
h(*d*) en m	125,0	114,06	106.25	102.10	100,00	102,10	106,25	114,07	125,00	139,06	156,25	176,56	200

Tableau 1

$$h(d) = \frac{d^2}{1\,600} - \frac{d}{4} + 125 \qquad (1)$$

Question 1
On voudrait niveler le terrain décrit ci-dessus. À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?
On suggère de répondre à cette question dans un premier temps en ne se servant que de la figure 1. Ensuite, on ne s'appuiera que sur le tableau 1. Et enfin, on se servira uniquement de la formule (1).

Question 2
Toujours en ce qui concerne le même terrain, on demande d'évaluer sa pente en chaque point. On suggère à nouveau de répondre à la question en se servant uniquement d'abord de la figure I, puis du tableau 1 et enfin de la formule (1!.

b) Analyse de l'activité du document d'accompagnement.

Premier inconvénient :

L'expression algébrique de h est donnée[12].

Dans un contexte qui se veut « concret », la connaissance de h nous paraît peu réaliste. De plus, le fait que la fonction h soit polynomiale est simpliste.

D'autre part, h étant connue, le tableau de valeurs n'a plus d'intérêt. Or, précisément dans le contexte choisi, la donnée la plus crédible est un relevé de mesures.

Nous ne donnerons donc pas l'expression algébrique de h, mais le graphique correspondant au profil du terrain, et un tableau de valeurs, relatant les mesures effectuées par un géomètre.

Deuxième inconvénient :

Les hauteurs sont données tous les 50 mètres.

La régularité de la subdivision de l'intervalle peut entraîner la réponse qui consiste à faire la moyenne arithmétique des valeurs. On ne peut pas réfuter cette méthode, or elle court-circuite la démarche didactique. Dans le cadre de la « théorie des situations », nous pensons que l'on s'éloigne d'une « situation fondamentale », la notion visée n'étant pas nécessaire à la résolution du problème.

Nous donnerons donc un tableau de valeurs avec un pas non constant.

Le contexte « concret » dans lequel nous nous situons permet de justifier ce choix par le fait qu'un géomètre tiendrait compte de la pente : plus elle est raide, plus les mesures sont rapprochées.

c) Construction de l'activité.

Pour cette activité, on considère que l'idée de nivellement d'un terrain a du sens pour les élèves, ce qui rend accessible le contexte concret.

Le choix peu réaliste d'un terrain qui aurait le même profil sur toute sa largeur permet de ramener un problème de volume à un problème de surface. On passe donc d'un problème concret à un problème pseudo-concret. Cependant, l'idée de nivellement reste parlante.

(12) La connaissance de h permet le calcul de la question 2, qui est hors de notre préoccupation.

Pour optimiser la visualisation de la hauteur du nivellement, on évite une fonction non monotone, qui rendrait plus délicate son approximation. Ce choix est fait dans le but de faciliter la dévolution du problème.

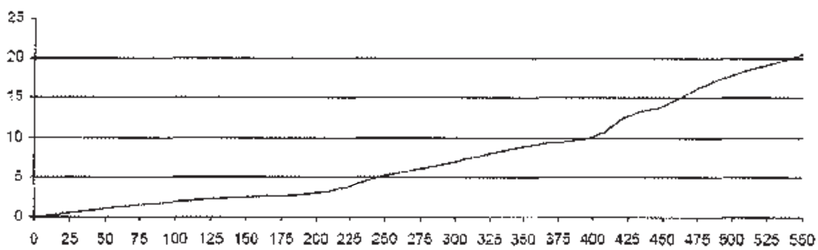
La fonction est choisie croissante.

Nous prenons l’origine du repère comme représentation du point le plus bas du terrain. Ce choix n’est pas sans conséquence sur la facilité avec laquelle les élèves vont répondre à la première question.

Comme évoqué précédemment, le tableau de valeurs présente des mesures en des points plus ou moins espacés selon la pente.

Activité 1 : Un problème d’approche.

La figure ci-dessous montre le profil d’un terrain que l’on souhaite niveler (les mesures sont exprimées en mètres).



1. À quelle hauteur approximative faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ?

2. Un géomètre effectue des mesures de hauteurs plus ou moins espacées selon la pente.
Ses mesures figurent dans le tableau ci-dessous :

distance (en m)	0	100	200	250	300	350	400	425	450	475	500	525	550
hauteur (en m)	0	2	3	5,2	6,9	8,9	10,1	12,7	14	16,3	17,9	19,1	20,5

a) Répondre à la question 1 à l’aide des données du tableau.

b) Que doit faire le géomètre s’il veut un résultat plus précis ?

d) Analyse a priori de l’activité proposée.

Question 1 :

L’objectif est de faire tracer approximativement la droite d’équation $y = \mu$, où μ est la hauteur de nivellement.

On attend des élèves qu’ils utilisent une règle transparente, qu’ils estiment visuellement par déplacements verticaux la position de la droite attendue, et, par lecture graphique, qu’ils donnent une hauteur approximative du nivellement.

Les cas clairement réfutables sont ceux pour lesquels la valeur μ est supérieure ou égale au maximum de la hauteur du terrain. Cette erreur est peu probable a priori. Les cas où la valeur μ est comprise entre les extrêmes, mais est éloignée d'une valeur réaliste ne sont pas réfutables.

Cependant, à partir du moment où les élèves ont compris la consigne, on n'envisage pas de difficulté pour cette question.

Question 2 a) :

L'objectif est de mettre en évidence le lien entre la valeur moyenne et l'aire sous la courbe.

Dans un premier temps, on attend des élèves qu'ils traduisent le problème en un problème géométrique : considérer que trouver la hauteur de nivellement du terrain revient à déterminer un rectangle de longueur la longueur du terrain et de même aire que l'aire sous la courbe.

Dans un deuxième temps, on attend qu'ils approximent l'aire sous la courbe à l'aide de la somme d'aires de rectangles (ou de trapèzes) obtenus avec les données du tableau.

Hormis les cas de bonnes réponses, nous envisageons deux cas :

- le cas où les élèves ne démarrent pas. On prévoit alors d'intervenir pour les amener à associer, à l'aide de la première question, la recherche de la hauteur du nivellement à une recherche d'aire.
- le cas où, voyant les valeurs numériques et identifiant le problème à une recherche de moyenne, ils calculent la moyenne arithmétique non pondérée des valeurs du tableau, voire font des calculs farfelus faisant intervenir toutes les données du tableau. Le choix des valeurs du tableau, en particulier le pas non régulier, doit permettre aux élèves d'invalider d'eux-mêmes les réponses fournies, et de susciter une nouvelle recherche.

Ce second cas relève du principal obstacle que les élèves peuvent rencontrer : la volonté d'exploiter directement les données du tableau, répondant ainsi dans le même registre que l'énoncé de la question.

Pour finir, on attend une synthèse consistant à assimiler μ au quotient de l'aire sous la courbe par la longueur du terrain.

À ce stade de l'activité, on considère que les élèves ont compris l'association entre la valeur moyenne et l'aire sous la courbe

Question 2 b) :

L'objectif de cette question est que les élèves prennent conscience du fait que la valeur approchée de l'aire sous la courbe qu'ils ont trouvée avec les données du tableau sera « améliorée » par une prise de mesures intermédiaires.

On prépare ainsi la démarche qui consiste à subdiviser un intervalle par des intervalles de plus en plus fins, pour améliorer une approximation d'aire.

Toute réponse consistant à affiner les intervalles initiaux sera validée.

e) Déroulement et analyse a posteriori.

Cette activité est proposée lors d'une séance classe entière (25 élèves).
Le travail est autonome, mais la communication entre voisins est autorisée.

À la lecture de l'énoncé, certains élèves s'interrogent sur la signification des mots « remblais » et « déblais ». Une définition est donnée par le professeur.

Pour répondre à la première question, tous les élèves prennent leur règle, et effectuent des balayages verticaux jusqu'à obtenir une hauteur de nivellement convenable.
L'hypothèse qui consiste à dire que la notion de nivellement est signifiante se vérifie.

La seconde question est abordée de deux manières.

Première manière :

Une majorité d'élèves place sur la courbe les points dont les coordonnées figurent dans le tableau de valeurs, et les relient à l'axe des abscisses. Ils disent chercher ainsi à faire un lien entre le problème résolu graphiquement, et le tableau de valeurs.
Se présentent alors deux cas :

- Quelques élèves font apparaître des rectangles ou des trapèzes. Ils trouvent une valeur approchée de « la quantité de terre à niveler » et terminent correctement l'exercice.
- Les autres n'avancent plus.

Deuxième manière :

Les autres élèves semblent ne pas se préoccuper du graphique.
Parmi ceux-là, on distingue trois cas :

- Quelques élèves effectuent le calcul suivant :

$$100\times 2+100\times 3+50\times 5,2+50\times 6,9+50\times 8,9+50\times 10,1$$
$$+25\times 12,7+25\times 14+25\times 16,3+25\times 17,9+25\times 19,1+25\times 20,5$$

À la question : « graphiquement, à quoi correspond le calcul effectué ? », la quasi-totalité des élèves concernés répond correctement, en évoquant l'aire des rectangles. Les autres n'apportent pas de réponse.

- Quelques élèves font une moyenne arithmétique des hauteurs.
À la question « Comment justifiez-vous que l'espacement entre les mesures n'intervient pas ? », ils avouent ne pas être capables de justifier leur démarche, et reconnaissent ne pas en être satisfaits.

- Les autres ne démarrent pas.

Après avoir laissé un temps de réflexion suffisant, un questionnement du professeur amène les élèves qui n'ont pas résolu le problème à le considérer géométriquement, et à le ramener à un calcul d'aire. En partie aidés par ceux qui ont résolu le problème, tous les élèves parviennent au résultat.

Ce déroulement confirme notre analyse a priori.

Le calcul d'une valeur moyenne (et à terme le calcul intégral) n'*est* pas un calcul d'aire, il doit le *devenir*. Cependant le contexte choisi permet qu'il apparaisse comme tel *spontanément* chez certains élèves. Cela laisse espérer qu'il le devienne chez les autres par un travail collectif en classe.

Il nous faut revenir sur les élèves qui en sont restés à un calcul à partir des données du tableau, sans considération géométrique.

Nous allons pour cela considérer le cas d'un élève en particulier (dont on peut dire qu'il est à l'origine de notre article).

Dans un premier temps, cet élève fait une moyenne des hauteurs pondérées des distances à l'origine. Le résultat incohérent l'amène à reconsidérer son calcul. Il reste persuadé que la solution réside dans un calcul de moyenne pondérée. Après réflexion, il affecte chaque hauteur d'un poids correspondant à la distance séparant ce relevé de mesure du précédent. Comme tous les élèves qui ont effectué ce calcul, il est interrogé sur sa démarche. Sa réponse est significative :

« *Je cherche une hauteur moyenne, je fais donc une moyenne des hauteurs. Comme avec les distances ça ne marche pas, j'ai cherché d'autres coefficients.* »

Interrogé sur la signification géométrique de son calcul, il répond ne pas voir l'utilité d'une démarche géométrique.

Le fait que chez certains élèves la problématique reste une problématique numérique permet de garder à cette étude toute sa richesse.

Lorsque tous les élèves ont résolu le problème, il est fait une synthèse des réponses. C'est l'occasion de mettre en évidence les différentes approximations de l'aire sous la courbe : avec des rectangles « sur la courbe », des rectangles « sous la courbe » ou des trapèzes. Cette dernière méthode est définie par les élèves comme une « moyenne » des deux autres, qualifiées respectivement d'approximation par excès, et par défaut.

La dernière question est traitée collectivement. La réponse est apportée sans hésitation par quasiment tous les élèves.

On peut dire qu'à l'issue de cette présentation le calcul intégral est intervenu dans trois cadres différents :

- le cadre des représentations graphiques de fonction ;
- le cadre des tableaux de valeurs ;
- le cadre géométrique.

Avec l'intervention de ces trois cadres, on peut penser que le calcul intégral a pris du sens.

f) Conséquences.

L'analyse a posteriori a montré que la valeur moyenne est un contexte pertinent pour l'introduction du calcul intégral.

On notera que la validité de cet affirmation ne réside pas dans une quelconque étude statistique.

Pour plusieurs raisons, en tant que « professeurs de terrain », nous n'avons pas les moyens d'une telle étude. Pourtant, pour notre pratique, il nous faut trouver des critères de validation.

Nous pensons que ceux-ci résident dans une certaine adéquation entre ce que nous attendions et ce que nous obtenons en classe. Cela nécessite un type d'« écoute » particulier de la part du professeur. Bien sûr le risque d'une « sur-écoute » est possible (on entend quelque chose parce qu'on veut l'entendre). Il n'en reste pas moins que l'aspect expérimental de notre métier apparaît clairement dans cette démarche. L'observation de ce qui se passe en classe ne peut se faire sans a priori. C'est parce que nous avons une « théorie » que nous pouvons observer le « réel ».

Ceci étant dit, on peut considérer que l'activité construite n'a pas exploité au maximum le contexte de valeur moyenne.

Nous voyons la possibilité de modifier cette activité de la manière suivante :

- on garde le même contexte concret (ou pseudo-concret) ;
- on donne le graphique(13), et le tableau de valeurs (en gardant le pas non constant) ;
- on pose la question : « À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ? ».

Il faudrait maintenant refaire une analyse a priori de cette nouvelle activité. Nous la laissons aux lecteurs intéressés qui voudraient l'appliquer dans leurs classes.

Cependant nous ferons remarquer que, par rapport à l'activité originale, l'énoncé ne parle plus de « hauteur approximative », et que, par la suppression de la deuxième question, on n'oblige plus à l'utilisation du tableau de valeurs.

Nous pensons, au vu du déroulement analysé précédemment, que les premières réponses données par les élèves seront de type graphique. Cela permet une entrée de tous les élèves dans le problème.

La problématique du choix d'« une » réponse parmi celles proposées(14) devient la motivation de la recherche d'une autre démarche qui doit amener à l'utilisation du tableau de valeurs et déboucher sur le calcul d'aire.

Si cette démarche intervient dès le début de la séance, cela ne doit pas nuire au déroulement de l'activité. Les différentes approches doivent au contraire faire en sorte que ceux qui l'abordent de manière géométrique tirent vers le calcul d'aire ceux qui restent accrochés à l'idée de moyenne et que, dialectiquement, ceux qui ont en tête l'idée de moyenne fassent en sorte que ceux qui sont passés au calcul d'aire « n'oublient pas » que la problématique est une problématique de valeur moyenne.

(13) Une question que nous n'aborderons pas mais qui est importante pour le déroulement, est de savoir si le graphique est donné sur papier blanc, sur papier quadrillé, ou, comme dans l'activité originale, avec des lignes horizontales.

(14) Le choix du type de graphique (voire de son format) évoqué précédemment se révèle ici fondamental, dans la mesure où il faut que les réponses proposées soient assez variées pour lancer le débat.

Ainsi construite, cette activité rend l'élève plus « acteur ».

Dans une telle situation le rôle du professeur doit moins peser sur le choix des démarches. De ce fait, l'approche par un calcul de moyenne prendra, nous le pensons, une place plus importante dans la discussion, et donc dans la construction de ce savoir nouveau qu'est le calcul intégral.

Conclusion.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, cet article n'est pas un article de didactique, mais présente une mise en pratique de notions de didactique. Certaines sont clairement affichées, d'autres sont plus implicites. Selon ses connaissances, chacun sera à même de les identifier.

Le chercheur trouvera sûrement beaucoup de « distorsions » dans cette mise en pratique. Nous appelons de nos souhaits cette critique. Cela pourrait nous permettre d'avancer vers une pratique plus « professionnelle ».

Nous pensons que notre métier peut bénéficier des acquis de la didactique. Il s'agirait donc de préciser en quoi elle peut nous guider dans l'exécution de certains gestes professionnels.

Nous avons voulu apporter notre contribution en donnant un exemple de prise en compte de la didactique dans la pratique quotidienne de l'enseignant.

En résumé, nous aurions atteint notre but si cet article montre comment une réflexion sur un travail en classe peut aller au-delà d'un simple exposé d'opinions dont trop souvent les contraintes de notre métier nous obligent à nous satisfaire.