Démontrer par les aires

André Laur

Cet article reprend la trame d'un atelier présenté lors de la journée régionale grenobloise APMEP de mars 2004. Cet atelier développait les deux aspects suivants : démontrer par les aires, calculer des aires. Son objectif était d'illustrer l'importance du concept d'aire dans la construction des mathématiques et son intérêt dans l'enseignement. Pour la première partie de l'atelier, seule évoquée ici, les références sont nombreuses. Je me suis appuyé sur le dossier Géométrie paru dans le bulletin vert de l'APMEP nº 431 (novembre-décembre 2000) et tout particulièrement sur l'article de Daniel Perrin : « L'exemple de la géométrie affine au collège ».
Un résumé, très proche du présent article, est consultable sur le site Planète maths de l'académie de Grenoble (www.ac-grenoble.fr/maths/cadres.htm ; cliquer sur *Pédagogie*, puis *Ouvrir des perspectives*). L'atelier était présenté à l'aide d'un montage de diapositives : d'où la forme de l'article qui reprend ce montage, la colonne de droite commentant la figure ou le texte situé à gauche.
Le contenu de cet article peut utilement inspirer des activités dans les classes de Quatrième et Troisième (on accède ainsi à une démonstration du théorème de Thalès, ce qui permet d'aller au-delà du résultat admis après la simple constatation d'égalité de rapports) ou de Seconde (le programme demande de résoudre des problèmes mettant en jeu les aires et propose en thème d'étude « exemples de démonstrations classiques par les aires »).
Les aires sont abordées dès l'école primaire : on procède à des activités de classement de surfaces selon leur aire, avant de les mesurer avec une unité choisie. Au collège et surtout au lycée, l'aire d'une surface n'est souvent abordée qu'à travers une formule de calcul : pour la mesurer ; les éventuels traitements qui suivent sont alors faits à partir des nombres mesurant ces aires.
On a voulu montrer, dans ce qui suit, **comment on peut utiliser l'outil « aires » pour raisonner sans jamais mesurer ces aires** ; on atteint ainsi des résultats intéressants, certains élémentaires, d'autres plus subtils.
Il appartiendra à chaque enseignant intéressé d'adapter l'écriture des résultats et le choix de l'enchaînement au niveau de sa classe.

En guise d'introduction

« Sésostris, disaient les prêtres, partagea le sol entre tous les Égyptiens, attribuant à chacun un lot égal aux autres, carré ; d'après cette répartition, il établit ses revenus, prescrivant qu'on payât une redevance annuelle. S'il arrivait que le fleuve enlevât à quelqu'un une partie de son lot, celui-là venait le trouver et lui signalait ce qui	Il s'agit d'une mise en appétit historique. Le texte est naïf ; il donne une image simpliste et réductrice de l'origine de la géométrie ; il est néanmoins intéressant pour sa portée symbolique : – il marque l'ancrage dans le concret du travail du géomètre, du mathématicien ; – il fait apparaître les mathématiques comme un instrument de justice et de

s’était passé ; lui, envoyait des gens pour examiner et mesurer de combien le terrain était amoindri, afin qu’il fût fait à l’avenir une diminution proportionnelle dans le paiement de la redevance fixée. C’est ce qui donna lieu, à mon avis, à l’invention de la géométrie, que les Grecs ramenèrent dans leur pays… »

Hérodote, chapitre 109 du 2ème livre des Histoires (cité par Michel Serres, dans « Les origines de la géométrie »)

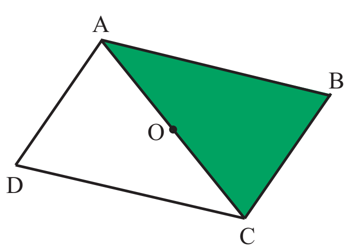
droit (au service du puissant, mais aussi du plus faible par le caractère objectif des informations qu’elles apportent).

N.D.L.R. Ce texte montre que la géométrie n’est pas née du seul problème de recadastrage des terrains, mais d’une recherche de proportionnalité…

Points de départ

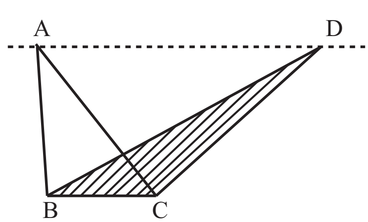
L’ensemble proposé se présente comme une séquence déductive qui s’appuie sur quatre propriétés de base.
Ces propriétés jouent donc le rôle d’axiomes (le mot peut être dit ; c’est surtout le concept de propriétés de départ qui importe). Une fois ces propriétés admises, on est dans un processus déductif relativement autonome (certains parleraient « d’îlots déductifs »).
Ces propriétés de base sont à « légitimer » d’une façon ou d’une autre (par exemple en suivant l’argumentaire proposé dans la colonne de droite).

1. La propriété du *demi-parallélogramme.* Chaque diagonale partage le parallélogramme en deux triangles de même aire.

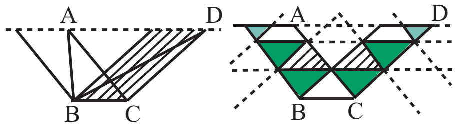
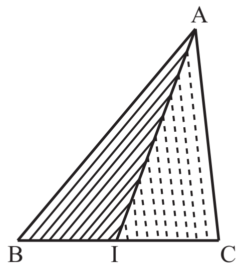
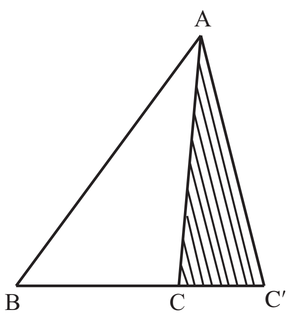


Cette propriété se déduit directement de l’étude des propriétés de conservation de la symétrie centrale vue en Cinquième : les deux demi-parallélogrammes sont superposables et ont donc la même aire.

2. La propriété du *trapèze.* Deux triangles qui ont une même base et des sommets sur une parallèle à la base sont d’aires égales.



Pour justifier cette deuxième propriété, on pourrait s’appuyer sur la formule de l’aire du triangle $\left(\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}\right)$; mais ce serait dommage d’avoir ainsi recours aux nombres mesurant les aires, vu les intentions exprimées en introduction.
Les deux figures qui suivent indiquent une façon d’obtenir cette propriété.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>On compare les aires doubles : en se ramenant à des parallélogrammes de même base.
Par découpage à l'aide de parallèles, on montre que l'on peut reconstituer l'un à partir des morceaux de l'autre : ils sont donc superposables et ont même aire.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. La propriété de la médiane. Une médiane partage un triangle en deux triangles d'aires égales.

</td>
<td>C'est la propriété du trapèze, complétée par un « glissement » (une translation).</td>
</tr>
<tr>
<td>4. La propriété des « proportions ». Si deux triangles ont un sommet commun A et des bases [BC] et [CC′] portées par la même droite, le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases.

</td>
<td>Cette propriété nécessite l'observation de plusieurs cas.
Cas 1 : si l'une des bases est un multiple entier de l'autre, on applique plusieurs fois la propriété de la médiane.
Cas 2 : si les deux bases sont commensurables (c'est-à-dire sont multiples d'une même base prise comme unité), on applique deux fois le cas 1.
Cas 3 : si les deux bases sont incommensurables, on obtient le résultat par passage à la limite (tout irrationnel peut être considéré comme la limite de rationnels). Il y a ici un « saut » incontournable (le même que celui que l'on fait quand on généralise la formule de l'aire d'un rectangle : base × hauteur) : ce « saut » peut ne pas être dit, mais il serait judicieux de le faire « sentir » à un moment ou un autre de la scolarité, par exemple lors d'une première utilisation de la formule (base × hauteur) avec des nombres irrationnels.</td>
</tr>
</table>

Des résultats qui s’ensuivent

Mieux vaut suivre l’ordre proposé, certains résultats s’appuyant sur ceux qui précèdent.

<table>
<tr>
<td>

5. Théorèmes du *papillon*.

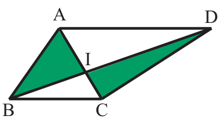


Figure 1
(ABCD est un trapèze)

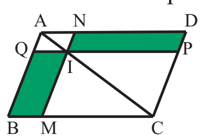


Figure 2
(ABCD est un parallélogramme)

</td>
<td>

Il s’agit ici de comparer les aires colorées dans chacune des figures : on a tout intérêt à utiliser un logiciel de géométrie dynamique, avec un cas de figure incitant au doute.
Dans les deux cas, les aires colorées sont égales : pour le trapèze (figure 1), il s’agit d’une application immédiate de la propriété du *trapèze* ; pour le parallélogramme (figure 2), on applique à plusieurs reprises la propriété du *demi-parallélogramme.*
Le résultat est à chaque fois simple : il permet une mise en jambes (et en confiance) pour la suite du parcours.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

6. Théorème du *chevron*.
Soit N un point intérieur au triangle ABC et A′ le point d’intersection de (AN) et [BC].
Alors le rapport des aires de ANB et de ANC est égal au rapport de BA′ et CA′.

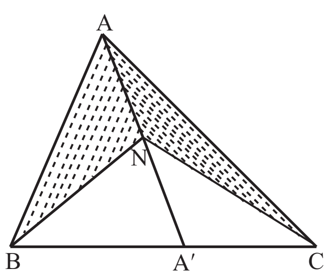


Figure 1

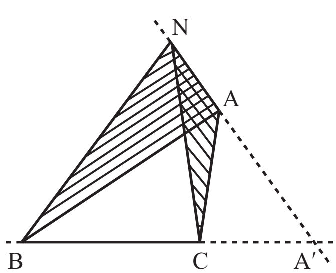


Figure2

</td>
<td>

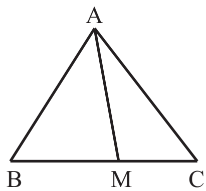
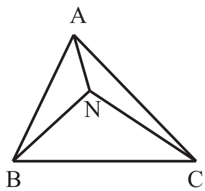
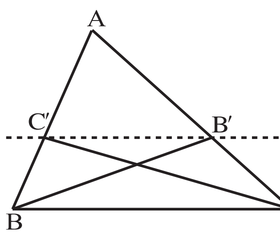
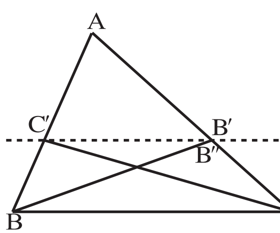
On démontre ce théorème en appliquant deux fois la propriété des *proportions* : d’abord dans le triangle ABC, puis dans le triangle NBC.
On conclut en utilisant une propriété relative aux nombres proportionnels :

« si $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''} = \dfrac{a}{b}$, alors $\dfrac{a' - a''}{b' - b''} = \dfrac{a}{b}$ ».

Les élèves ont du mal à mettre en œuvre spontanément cette propriété : ils ont pourtant souvent eu l’occasion de l’utiliser dès l’école primaire lors de la résolution de problèmes mettant en jeu des suites de nombres proportionnels ; on peut en profiter ici pour la revoir, la formaliser, la démontrer éventuellement et, bien sûr, l’utiliser.

On peut étendre l’énoncé au cas où le point N est extérieur au triangle ABC : c’est ce qu’illustre la deuxième figure.

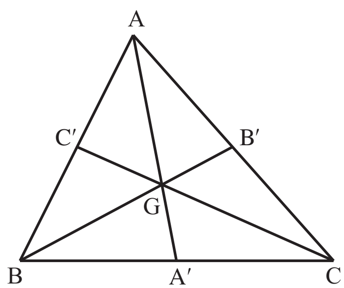
</td>
</tr>
</table>

7. Aire et médiane. Soit M un point du segment [BC]. (AM) est médiane si et seulement si les triangles AMB et AMC ont même aire.  Soit N un point intérieur au triangle ABC. Les triangles ANB et ANC ont même aire si et seulement si N est sur la médiane issue de A.	Ces deux propriétés sont l'occasion d'un travail sur l'équivalence logique et, dans la démonstration de la réciproque, de l'utilisation d'un raisonnement par l'absurde (à faire sans nécessairement évoquer le mot « raisonnement par l'absurde » : celui-ci pourra être introduit lors d'un autre enchaînement du même type).
8. Théorème de Thalès. Soit ABC un triangle, B′ un point intérieur à [AC] et C′ un point intérieur à [AB]. Si (B′C′) est parallèle à (BC) alors $$\frac{CB'}{AC} = \frac{BC'}{AB}.$$ 	On utilise les propriétés du *trapèze* et des *proportions*. Par exemple : $$\frac{CB'}{AC} = \frac{\text{aire}(BB'C)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{\text{aire}(CC'B)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{BC'}{AB}.$$ La démonstration est ici immédiate. C'est celle utilisée dans les *Éléments* d'Euclide. Peut-on la proposer à tous nos élèves ? À quels niveaux ? La question mérite d'être posée et, en même temps, celle de la place de la notion d'aire dans l'enseignement.
8′. Réciproque du théorème de Thalès. Soit ABC un triangle, B′ un point intérieur à [AC] et C′ un point intérieur à [AB]. Si $\frac{CB'}{AC} = \frac{BC'}{AB}$ alors (B′C′) est parallèle à (BC). 	La démonstration est typique de certains raisonnements de géométrie : on utilise le théorème direct pour démontrer la réciproque. On introduit par exemple le point B″ sur le côté [AC] tel que (C′B″) soit parallèle à (BC) ; le théorème direct permet après calcul d'écrire : CB′ = CB″. On conclut en disant qu'il existe un seul point M sur la demi-droite [CM) tel que CM soit de longueur donnée. Cette dernière affirmation, conforme à l'expérience, repose sur un axiome de bijection entre demi-droite et ensemble des réels positifs : sur ce sujet, aucune difficulté à soulever à ce niveau d'étude.

À noter que les réels positifs étaient définis au 19e siècle comme « l'ensemble des grandeurs » : de ce point de vue, il y a donc par définition bijection entre l'ensemble des longueurs (les réels positifs) et l'ensemble des points d'une demi-droite !

9. Concours des médianes.

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.



La démonstration se calque sur celle relative aux médiatrices.

Soit G le point d'intersection des médianes [AA′] et [BB′] ; G est sur [AA′], donc, d'après le théorème « aire et médiane »,

$$\text{aire}(AGB) = \text{aire}(AGC) ;$$

G est sur [BB′], donc

$$\text{aire}(BGA) = \text{aire}(BGC).$$

On en déduit :

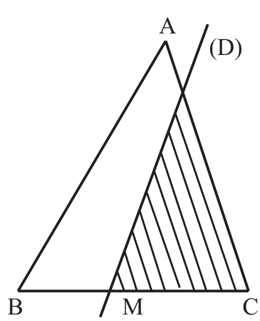
$$\text{aire}(BGC) = \text{aire}(AGC)$$

et donc, toujours d'après le théorème « aire et médiane », G est sur la médiane [CC′].

10. Problèmes de partage.

Le triangle ABC est donné ainsi que le point M sur [BC].

Comment placer la droite D pour que l'aire hachurée soit égale à la moitié de l'aire du triangle (resp. au tiers, au quart de l'aire du triangle) ?



ABCD étant un carré, où placer M pour que les trois aires délimitées par (MA), (MB), (MC) et le pourtour de ABCD soient égales (figure page suivante) ?

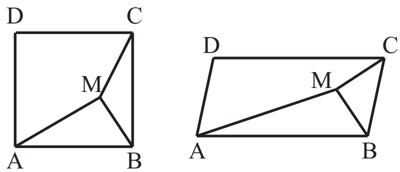
Ce premier problème mérite recherche et tâtonnement avant toute indication.

Cherche ô lecteur attentif et curieux !

Une première idée est de chercher un partage du triangle en deux aires égales : avec la médiane ; l'utilisation de l'un des théorèmes du papillon donne la réponse : en traçant une parallèle à (AM) passant par le milieu de [BC] ; cette droite coupe [AB] ou [AC] selon la position de M, en un point de la droite D cherchée.

Pour le tiers (ou le quart), la démarche est analogue.

On est amené ici à envisager plusieurs cas selon la position de M : démarche de « discussion » formatrice pour nos élèves.



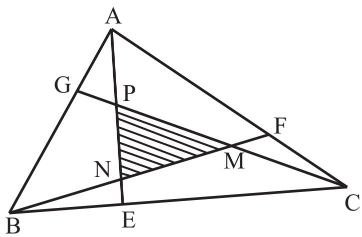
Même question dans le cas où ABCD est un parallélogramme

L'égalité des aires de MAB et MAC contraint le point M à appartenir à la diagonale : application du théorème 7 et d'une propriété du parallélogramme.
La propriété des *proportions* permet ensuite de conclure.

11. « Au rapport ! »
Dans le triangle ABC ci-dessous, on a :

$$\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FA}=\frac{GA}{GB}=\frac{1}{2}.$$

Quel est le rapport de l'aire de MNP sur celle de ABC ?



En notant a l'aire de AGP, on a :
aire(ABP) = $3a$ (propriété du trapèze) ;
aire(APC) = $6a$ (propriété du chevron) ;

aire(ACG) = $7a = \dfrac{\text{aire(ABC)}}{3}$ (propriété des proportions). On en tire a en fonction de l'aire de ABC :

$$a=\frac{\text{aire(ABC)}}{21}.$$

En raisonnant de même en partant de l'aire de BNE puis de l'aire de CMF on obtient :

$$\text{aire(BNE)} = \text{aire(CNF)} = a\ ;$$

puis :

$$\text{aire(ACP)} = \text{aire(CMB)} = \text{aire(BNA)} = 6a.$$

Par différence, on en déduit :

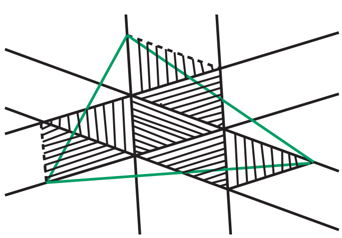
$$\text{aire(MNP)} = 3a.$$

D'où le rapport cherché est $\dfrac{1}{7}$.

Que se passe-t-il si l'on remplace par k $(0 < k < 1)$?

On aboutit après calcul à un rapport égal à $\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}$.

Prolongement ludique du travail ci-dessus : découper un triangle en six coups de ciseaux de telle sorte que les morceaux réarrangés donnent sept triangles identiques.



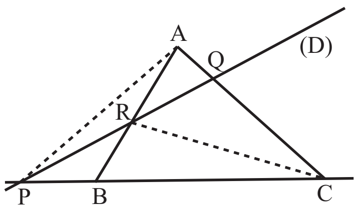
La figure ci-contre fait apparaître :
– les six coups de ciseau (les droites),
– les sept triangles reconstitués (les parties intérieures au triangle non hachurées se retrouvent dans les triangles hachurés, par simple symétrie centrale).

Ce découpage fournit par ailleurs une réponse au problème de rapport posé plus haut.

12. Théorème de Ménélaüs.

Soit un triangle ABC, et (D) une droite coupant (BC) en P, (CA) en Q et (AB) en R (P, Q, R différents des sommets A, B, C).

Alors, $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$.



Application :

On suppose que R est au milieu de [AB].

Où est situé P quand Q est au « tiers » (resp. au « quart ») de [AC] en partant de A ?

On a successivement : $\frac{PB}{PC} = \frac{\text{aire(RPB)}}{\text{aire(RPC)}}$, $\frac{QC}{QA} = \frac{\text{aire(PRC)}}{\text{aire(PRA)}}$ et $\frac{RA}{RB} = \frac{\text{aire(PRA)}}{\text{aire(PRB)}}$.

D'où le résultat.

Remarque : la formulation générale de ce théorème fait intervenir des mesures algébriques ; on peut observer que la droite (D) coupe les côtés-segments du triangle ABC exactement deux fois (« toute droite entrant dans un triangle par un côté en ressort par un autre côté » : résultat intuitif appelé axiome de Pasch) ou aucune fois.

Ceci permet de formuler la réciproque de ce théorème : « soit ABC un triangle, P, Q et R des points appartenant respectivement à (BC), (CA) et (AB), différents des sommets du triangle et tels que 0 ou 2 d'entre eux soient sur les côtés-segments du triangle.

Si $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$ alors les points P, Q et R sont alignés. »

Ici aussi, on démontre la réciproque en utilisant le théorème direct appliqué aux points P, R et Q′ où Q′ est le point d'intersection de (PR) et (AC) [il faut donc d'abord montrer que ce point Q′ existe] ; on en déduit que $\frac{QC}{QA} = \frac{Q'C}{Q'A}$, puis que Q = Q′.

13. Théorème de Céva.

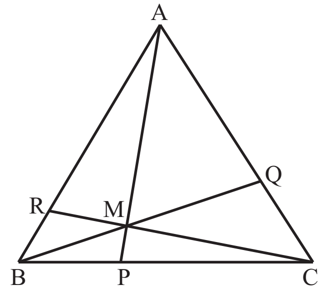
Soit un triangle ABC, P un point de]BC[, Q un point de]CA[et R un point de]AB[.

Si (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes alors $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$.

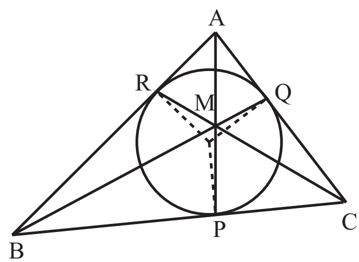
On a successivement :

$\frac{PB}{PC} = \frac{\text{aire(AMB)}}{\text{aire(AMC)}}$, $\frac{QC}{QA} = \frac{\text{aire(BMC)}}{\text{aire(BMA)}}$ et $\frac{RA}{RB} = \frac{\text{aire(AMC)}}{\text{aire(BMC)}}$.

D'où le résultat.



Ce théorème admet une réciproque, facile à démontrer.
Application : montrer que les droites joignant les sommets d'un triangle aux points de contact du cercle inscrit sont concourantes (en un point appelé point de Gergonne).



La démonstration reprend celle relative aux médianes : de ce point de vue, le théorème de Céva est une généralisation du théorème de concours des médianes.

La démonstration de la réciproque se fait comme pour toutes les réciproques précédentes : les droites (BQ) et (CR) se coupent en un point M ; soit P′ le point d'intersection de (AM) et [BC] ; on déduit du théorème de Céva que $\frac{P'B}{P'C} = \frac{PB}{PC}$, puis que $P' = P$.

Le résultat découle immédiatement de la réciproque du théorème de Céva.

En considérant les points de contact des cercles exinscrits avec les côtés-segments du triangle, on obtient de façon analogue le point de Nagel du triangle ABC.

14. Théorème de Gergonne.
Soit un triangle ABC, P un point de]BC[, Q un point de]CA[et R un point de]AB[.
Si (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes alors $\frac{MP}{AP} + \frac{MQ}{BQ} + \frac{MR}{CR} = 1$.

On s'appuie sur la figure ci-dessus relative au théorème de Céva. On a : $\frac{MP}{AP} = \frac{\text{aire(MCP)}}{\text{aire(APC)}} = \frac{\text{aire(MBP)}}{\text{aire(APB)}}$ et donc

$$\frac{MP}{AP} = \frac{\text{aire(MCP)} + \text{aire(MBP)}}{\text{aire(APC)} + \text{aire(APB)}} = \frac{\text{aire(MBC)}}{\text{aire(ABC)}}.$$

Des calculs analogues appliqués aux deux autres rapports permettent de conclure.

Le travail fait sur ces trois derniers théorèmes peut être présenté comme la visite d'une ***galerie des ancêtres*** : l'occasion de s'interroger sur le plus beau tableau de la galerie et de découvrir des mathématiciens du passé.
Et pour compléter cette galerie, voici l'un des théorèmes-clés de l'enseignement de la géométrie au collège :

15. Théorème de Pythagore.
Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

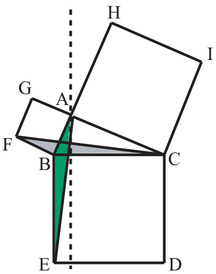


Figure 1

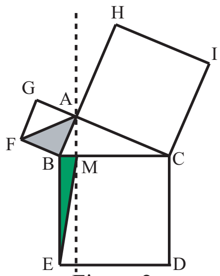


Figure 2

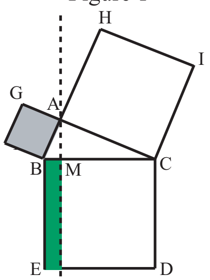


Figure 3

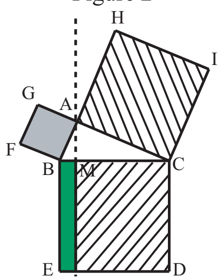
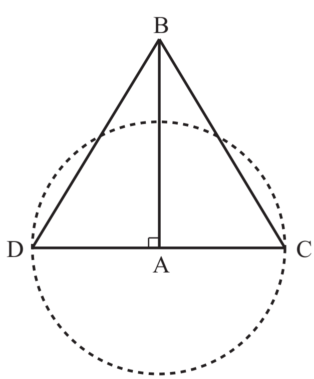


Figure 4

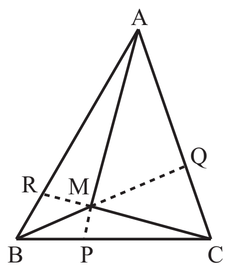
Les quatre dessins ci-contre donnent une démonstration en images de ce théorème : c'est la démonstration proposée par Euclide.
Le premier dessin montre deux triangles superposables (utilisation de l'un des cas d'isométrie remis à l'honneur en classe de Seconde, dont on peut faire un usage intuitif dès le collège : « angles égaux compris entre des côtés de mêmes longueurs ») : ces deux triangles ont donc la même aire.
Dans le deuxième dessin, chacun de ces triangles est transformé en triangle de même aire (propriété du *trapèze*).
Dans le troisième dessin, on utilise la propriété du *demi-parallélogramme*.
On fait de même pour la partie droite du dessin (figure 4).
L'aire du grand carré est alors égale à la somme des aires des deux petits carrés.

15′. Réciproque du théorème de Pythagore.
Si le triangle ABC est tel que
$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$
alors il est rectangle en A.



Dans sa démonstration, Euclide construit un triangle ABD rectangle en A et tel que AD = AC. Le théorème de Pythagore donne alors : $DB^2 = BC^2$.
Les deux triangles ABD et ABC ont alors leurs trois côtés de même longueur : ils sont alors superposables (utilisation là encore d'un cas d'isométrie des triangles) ; les angles en A des deux triangles sont alors égaux. D'où le résultat.
On retrouve donc ici la même démarche que celle observée dans la réciproque du théorème de Thalès : utilisation du théorème direct pour démontrer la réciproque.
Remarque : cette réciproque n'a pas tout à fait sa place dans la séquence déductive ici proposée (aucune des propriétés précédentes n'est mise en jeu) ; elle constitue néanmoins une nouvelle illustration de la façon dont on démontre une réciproque (à partir de la proposition directe) ; son absence pourrait gêner par ailleurs le visiteur de la galerie évoquée plus haut

Ainsi se termine le parcours proposé.
Un prolongement naturel en classe de Première S relève du barycentre :

Tout point M intérieur au triangle ABC peut être défini comme le barycentre de (A, aire(MBC)), (B, aire(MCA)), (C, aire(MAB)). 	Le théorème du *chevron* permet de montrer que le barycentre « partiel » de (B, aire(MCA)) et (C, aire(MCB)) est aussi celui de (B, PC) et (C, PB), c'est-à-dire le point P. Le barycentre de (A, aire(MBC)), (B,aire(MCA)), (C, aire(MAB)) est donc sur (AP). On montre de même qu'il est sur (BQ). C'est donc le point M. Ce résultat se généralise au cas où le point M est extérieur au triangle ABC, en comptant négativement les aires entièrement « extérieures » au triangle ABC.

Comme déjà dit, on n'a abordé ici qu'une dimension du concept d'aire, dimension dont l'intérêt pédagogique paraît certain aux divers niveaux de la formation. Il n'est pas du tout question de nier l'importance des autres dimensions : la mesure des aires reste en particulier l'une des entrées privilégiées dans le calcul intégral.
Puisse simplement le parcours ci-dessus inciter à un regard plus complet et plus diversifié en la matière.