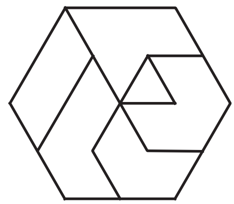
Le puzzle « de l'UNICEF » et les vecteurs : un thème pour sept activités en classe de Seconde

Arnaud GAZAGNES(*)



Ce puzzle doit son nom à un casse-tête trouvé dans le livre *Casse-tête du monde entier*, publié pour le compte de l'UNICEF, dont la représentation est donnée ci-contre :

Il s'agit d'utiliser ce puzzle[1] comme support d'une activité mathématique en Seconde, dans le chapitre sur les vecteurs. C'est l'une des diverses activités que l'on peut mener avec ce puzzle : les autres sont semblables à celles que l'on pourrait faire avec les *Combis* (voir la brochure *Jeux 5* de l'APMEP) ou avec le *puzzle « de Saarlouis »* (voir la brochure *Autour du puzzle de Saarlouis* de l'IREM de Lorraine).

L'un des grands intérêts de ce puzzle, ici, est qu'il y a un angle de 120° entre deux côtés consécutifs : un nouveau repère (par exemple) plus inhabituel est ainsi utilisé.

Les activités ci-dessous peuvent se faire aussi bien sur papier blanc ou pointé (le type de support est une variable didactique) ; toutefois, elles veulent mettre l'accent sur l'acquis de notions travaillées dans le cadre vectoriel plus que sur la technique de construction (avec règle et compas) et, dans ce sens, le papier pointé est nettement préférable.

Activité 1 : Caractéristiques d'un vecteur. Somme de vecteurs.

L'idée est d'utiliser le dessin pour travailler les différentes notions du chapitre à travers deux questionnaires à choix multiples (QCM), où bonne et mauvaises (mais plausibles[2]) réponses seront proposées. Les QCM de cette activité et de la suivante ont été construits à partir des erreurs d'élèves les plus fréquentes. Le premier permet un point sur les caractéristiques des vecteurs et un autre sur la somme de vecteurs. Le second permet un point sur les coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans un repère.
Il apparaît que, pour certains élèves, la reconnaissance d'un vecteur et son utilisation (dans une somme, par exemple) est difficile lorsque celui-ci n'est pas « tracé »[3].

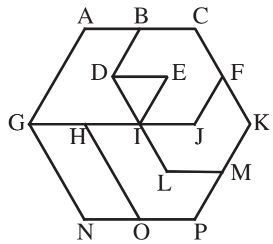
(*) Lycée Marie de Champagne, 10000-TROYES, Arnaud.Gazagnes@ac-reims.fr

(1) Pour information, il y a quatre-vingts configurations différentes des six pièces recouvrant un plateau de jeu hexagonal (aux transformations usuelles près). Dans tout le document, il n'y a en fait que deux solutions dessinées.

(2) C'est cette plausibilité qui rend tout QCM intéressant.

(3) On pourra alors remplacer dans l'item 6 la somme $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{LP}$ par $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{JF}$, voire par $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IL}$.

En utilisant la figure ci-contre, trouve la seule bonne réponse de chacune des propositions suivantes.



1.	$\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{LD}$ ont	a. même sens	b. même direction	c. même norme
2.	$\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IL}$ ont	a. même sens	b. même direction	c. même norme
3.	$\overrightarrow{GN}$ et $\overrightarrow{HO}$ sont	a. égaux	b. opposés	c. ni l'un ni l'autre
4.	$\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont	a. égaux	b. opposés	c. ni l'un ni l'autre
5.	$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AI}=$	a. $\overrightarrow{AH}$	b. $\overrightarrow{AN}$	c. $\overrightarrow{GI}$
6.	$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{LP}=$	a. $\vec{0}$	b. $\overrightarrow{DP}$	c. $2\overrightarrow{LP}$
7.	$\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{BJ}=$	a. $\overrightarrow{IJ}$	b. $\overrightarrow{HB}$	c. $\overrightarrow{BI}$
8.	$\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IK}=$	a. $\overrightarrow{GK}$	b. $\overrightarrow{KG}$	c. $\vec{0}$
9.	$\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IL}=$	a. $3\overrightarrow{CL}$	b. $\overrightarrow{CP}$	c. $2\overrightarrow{CL}$
10.	$2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=$	a. $2\overrightarrow{BD}$	b. $\overrightarrow{AK}$	c. $4\overrightarrow{AK}$

Activité 2 : Coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans un repère.

Même énoncé avec la même figure.

Dans le repère $(I;\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IE})$,

1.	E a pour coordonnées	a. (0,5 ; 1)	b. (1 ; 0)	c. (0 ; 1)
2.	G a pour coordonnées	a. (2 ; 0)	b. (0 ; 2)	c. (-2 ; 0)
3.	B a pour coordonnées	a. (1 ; 2)	b. (- 1 ; 2)	c. (0 ; 2)
4.	C a pour coordonnées	a. (0 ; 2)	b. (2 ; 0)	c. (1 ; 2)
5.	F a pour coordonnées	a. (1,5 ; 1)	b. (1 ; 1)	c. (2 ; -1)
6.	$\overrightarrow{HL}$ a pour coordonnées	a. (2 ; -1)	b. (-1 ; 2)	c. (-2 ; 1)
7.	$\overrightarrow{IA}$ a pour coordonnées	a. (-2 ; 2)	b. (-1 ; 2)	c. (0 ; 2)
8.	$\overrightarrow{IO}$ a pour coordonnées	a. (0 ; -2)	b. (1 ; -2)	c. (-1 ; 2)
9.	$\overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées	a. (2 ; 2)	b. (3 ; 2)	c. (0 ; 2)
10.	$\overrightarrow{EH}$ a pour coordonnées	a. (2 ; 1)	b. (-1,5 ; -1)	c. (-1 ; -1)

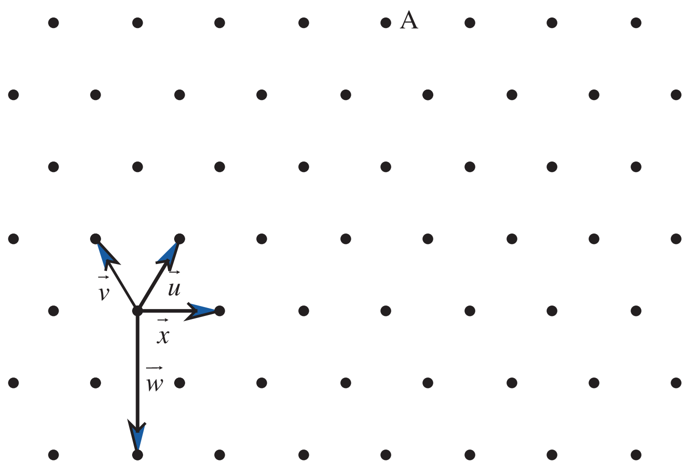
Activité 3 : Multiplication de vecteurs par des réels.

L'idée est de construire vectoriellement les différents points liés aux six pièces du puzzle. Trois pistes sont possibles : la première donne les points[4] définis par des égalités vectorielles (c'est le contenu de cette activité), la deuxième les donne par des sommes vectorielles (c'est celui de l'activité 4) et la troisième travaille la notion de repère et les coordonnées dans ce repère (c'est celui de l'activité 5). Dans les deux premières, un programme de tracé à la fin permet à l'élève une auto évaluation[5].

Sur un papier pointé (*voir exemple ci-dessous*), on donne un point A et quatre vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$.

Les points B, C, …, P sont définis ci-après de proche en proche[6] avec l'une des possibilités suivantes :

- le point à trouver est l'extrémité d'un vecteur défini avec l'un des quatre vecteurs donnés et le coefficient multiplicateur est à loisir entier naturel, relatif, fractionnaire, … (comme B, F ou L) ;
- le point à trouver est l'extrémité d'un vecteur défini avec des points précédemment construits (comme G ou K) ;
- le point à trouver est l'origine d'un vecteur (défini comme auparavant) (comme M).
- le point à trouver est solution d'une équation vectorielle (comme J).



Construis sur la figure les points B, C, D, …, O, P à l'aide des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{x}$ $\overrightarrow{AF} = -2\vec{u}$ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{AC} = -\vec{v}$ $\overrightarrow{CD} = \vec{x}$

(4) Les points sont rangés dans l'ordre alphabétique ; ce choix est tout à fait discutable ! Mais ce choix est apprécié par les élèves lorsqu'ils ont à chercher les points pour les relier.

(5) Chacun est invité à faire l'activité pour voir quels buts pédagogiques ont été cherchés.

(6) La lecture se fait de gauche à droite.

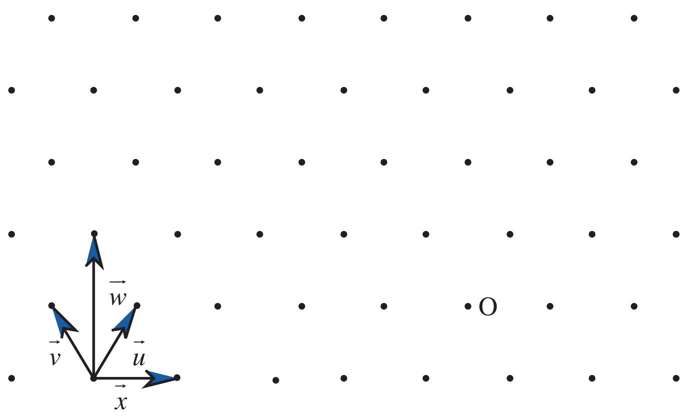
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{FH} = 3\vec{x}$ $\quad \overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ $\quad \overrightarrow{CJ} + 2\vec{u} = \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{GI} = 2\vec{x}$

$\overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ $\quad \overrightarrow{MI} = \vec{u}$ $\quad \overrightarrow{AN} = 2\vec{w}$ $\quad \overrightarrow{GO} = \vec{w}$ $\quad \overrightarrow{NP} = 2\vec{x}$

Trace les lignes brisées suivantes : JCABIPNFA, GKO, CLM, EDGHD.
Tu obtiendras le « Puzzle de l'UNICEF », auquel on joue comme avec un tangram(7).

Activité 4 : Sommes vectorielles.

Sur un papier pointé (*voir exemple ci-dessous*), on donne un point O et quatre vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$. Les points A, B, …, P sont les extrémités de vecteurs d'origine O, définis indépendamment les uns des autres, à l'aide de sommes de vecteurs choisis parmi les quatre donnés.
Les points à construire sont des points du réseau (comme précédemment), même si la construction donne des points intermédiaires qui ne sont pas sur le réseau (comme pour M)(8). De plus, l'ordre des vecteurs n'est pas anodin : certains élèves ne voient pas (tout de suite) que les deux sommes $\vec{v} - \vec{u}$ et $-\vec{u} + \vec{v}$ sont égales, par exemple ; une interversion des termes pourra servir quand un point intermédiaire « sort » du réseau donné.



1. Construis sur la figure les points A, B, C, D, …, P à l'aide des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + 3\vec{v}$ $\quad \overrightarrow{OB} = 2\vec{w} + \vec{x}$ $\quad \overrightarrow{OC} = 3\vec{v}$ $\quad \overrightarrow{OD} = 3\vec{u} - 2\vec{x}$

$\overrightarrow{OE} = \vec{w} + \vec{u}$ $\quad \overrightarrow{OF} = \vec{w} - 2\vec{x}$ $\quad \overrightarrow{OG} = \vec{w} - \vec{u} + \vec{v}$ $\quad \overrightarrow{OH} = \vec{w}$

(7) Si les élèves ont fait le premier dessin à une précédente occasion (en classe ou chez eux), l'information est inutile : ils reconnaîtront le dessin.
(8) Cela a gêné quelques-uns de mes élèves.

$\overrightarrow{OI} = 2\vec{u} + \vec{x}$ $\quad \overrightarrow{OJ} = 2\vec{v} - \vec{u}$ $\quad \overrightarrow{OK} = -\vec{u} + \vec{x} + 2\vec{v}$ $\quad \overrightarrow{OL} = \vec{w} - \vec{v}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{3}{2}\vec{x}$ $\quad \overrightarrow{ON} = -\vec{u} + \vec{v}$ $\quad \overrightarrow{OP} = -\vec{w} + 2\vec{u}$

2. Trace les lignes brisées suivantes : HDCFJKHGD, JNPIBAC, OLHE et MEB.
Tu obtiendras le « Puzzle de l'UNICEF », auquel on joue comme avec un tangram.

Activité 5 : Coordonnées d'un point dans un repère. Changement de repère.

L'activité précédente peut continuer avec celle-ci, pour travailler la notion de repères. Dans un premier temps (*qu. 1 à 3*), le repère aura pour origine O (tous les points étant définis avec O) et pour vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans lequel l'élève écrira tous les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, …, $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seulement (les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{x}$ étant définis par $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$) et déterminera les coordonnées de tous les points A, …, P. Le travail attendu lors de l'écriture des vecteurs en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est un calcul vectoriel (et non pas une simple lecture sur la figure)(9).
Dans un second temps, le travail portera sur un changement d'origine du repère (*qu. 4*) dans lequel on écrira les nouvelles coordonnées des points ou, plus difficile (à cause de la présence de $\sqrt{3}$ = 2 sin 60°), sur un changement de base (*qu. 5*).

1. Exprime à l'aide des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{x}$ les sommes $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.
2. En remplaçant $\vec{w}$ et $\vec{x}$ par les sommes trouvées à la question précédente dans les égalités vectorielles de l'activité 4, écris les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, …, $\overrightarrow{OP}$ à l'aide seulement des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Déduis-en les coordonnées des points A, …, P dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
4. À l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OG}$.

   Écris alors le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   Déduis-en les coordonnées du point A dans le repère $(G;\vec{u},\vec{v})$.

   Comment obtient-on facilement les nouvelles coordonnées de A à partir des anciennes ?
   Fais de même pour trouver les coordonnées de tous les autres points

(9) Cette précision est importante. Dans une première version, je n'avais pas spécifié dans le sujet la demande d'un tel vœu et, donc, des élèves ont fait une telle lecture (en toute bonne foi). D'où cette réécriture de la question. L'enseignant pourra alors montrer que la lecture graphique permet de valider les résultats algébriques.

dans le repère $\left(G;\vec{u},\vec{v}\right)$.

5. (*Avec des racines !*) Écris[10] les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs usuels $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

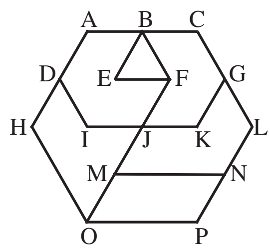
   Écris les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, …, $\overrightarrow{OP}$ à l'aide seulement des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Les égalités vectorielles obtenues en remplaçant $\vec{w}$ par $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{x}$ par $\vec{u}-\vec{v}$ donnent de nouvelles égalités qui peuvent tout à fait remplacer celles de l'activité précédente (l'enseignant donne alors le point O et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis précédemment).
Mes élèves de Seconde, malgré les difficultés pour certains et les pièges rencontrés, ont beaucoup aimé faire les dessins, chacun à leur vitesse. Le fait de trouver un dessin à la fin a été un moteur. Peu après, ce sont eux qui m'en ont apportés … que leurs camarades ont faits ! Et je suis persuadé qu'en créant ces dessins (notamment dans la décomposition vectorielle), ils ont réellement fait des maths. Einstein a écrit que « *le jeu est la forme la plus élaborée de la recherche* » …

Activité 6 : Équations vectorielles. Dessin associé.

L'idée est de partir du puzzle pour résoudre des équations vectorielles ; leurs solutions permettront ensuite de construire un dessin (servant de facto d'auto évaluation).

La figure ci-contre est le « Puzzle de l'UNICEF », auquel on joue comme avec un tangram.



Mode d'emploi.

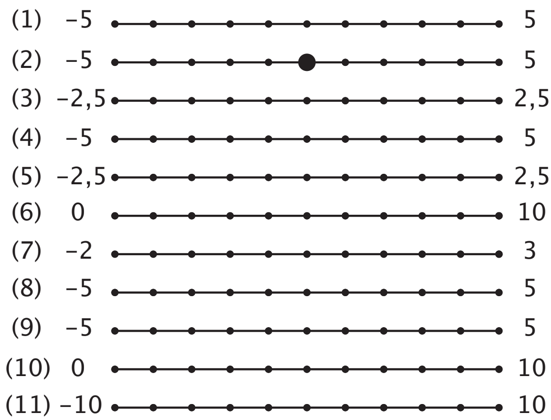
Dans le tableau ci-dessous, tu lis[11] : $\overrightarrow{AB} = \bullet\overrightarrow{KJ}$ (1) a.

Commence par déterminer, à l'aide du puzzle, la valeur du • dans l'équation précédente : tu trouveras – 1.
Ensuite, recherche dans le grillage gradué placé sous le tableau la ligne (1) et place dessus le point a d'abscisse –1 (il te faudra auparavant trouver la graduation de chaque ligne). Et ainsi de suite.

À la fin, trace les lignes brisées, comme indiqué : si tu ne t'es pas trompé(e), tu dois obtenir un oiseau…

(10) Je n'ai pas testé cette question cette année : elle reste une piste de travail.
(11) Contrairement aux tableaux des dessins codés proposés dans « Jeux 7 », je choisis maintenant de mettre la consigne en premier ; en effet, l'élève commence par déterminer la valeur demandée puis la place sur le segment gradué. Donc…

$\overrightarrow{AB}=\bullet\overrightarrow{KJ}$	(1)	a	$\overrightarrow{EP}+\bullet\overrightarrow{LC}=\vec{0}$	(5)	j
$\overrightarrow{DI}=\bullet\overrightarrow{KN}$	(1)	b	$\overrightarrow{EB}+\bullet\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FB}$	(7)	k
$\overrightarrow{FO}=\bullet\overrightarrow{BE}$	(1)	c	$\bullet\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}$	(7)	l
$\overrightarrow{FO}=\bullet\overrightarrow{PL}$	(3)	d	$\overrightarrow{HL}+\bullet\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$	(9)	m
$\overrightarrow{FE}=\bullet\overrightarrow{DF}$	(3)	e	$\bullet\overrightarrow{AB}=\vec{0}$	(9)	n
$\overrightarrow{DE}=\bullet\overrightarrow{MN}$	(3)	f	$\bullet\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AJ}$	(9)	o
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{IK}=\bullet\overrightarrow{PO}$	(5)	g	$\overrightarrow{JH}-\overrightarrow{JL}=\bullet\overrightarrow{JK}$	(11)	p
$\overrightarrow{OF}+\bullet\overrightarrow{HA}=\vec{0}$	(5)	h	$\bullet\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{LJ}=\vec{0}$	(11)	q
$\overrightarrow{IJ}=\bullet\overrightarrow{IK}$	(5)	i	$\bullet\overrightarrow{CB}+\bullet\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CJ}$	(11)	r



Trace les lignes suivantes : pr, eki, bf, qnoljfcadhgmn.

Inutile de préciser que le fait d'obtenir un dessin a été pour les élèves une motivation non négligeable !
Les points définis avec une égalité de vecteurs (tels *a*, *b*, …) ne posent pas trop de difficulté (la seule existant est de trouver le bon signe du coefficient).
La difficulté grandit avec une équation telle que celle qui définit le point H. Certains élèves raisonnent avec $\overrightarrow{OF}+\bullet\overrightarrow{HA}$ pour arriver à $\vec{0}$; d'autres partent de $\bullet\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{FO}$ (et utilisent ainsi les vecteurs opposés).
La difficulté s'accroît encore lorsqu'il y a plusieurs vecteurs (et encore plus lorsque, dans un membre, il y a tous les vecteurs non nuls et, dans l'autre, le vecteur nul, comme dans l'équation définissant *r*). Les équations permettent de travailler la notion de vecteurs opposés : par exemple, pour déterminer le réel correspondant à $\overrightarrow{EP}+\bullet\overrightarrow{LC}=\vec{0}$, l'élève utilisera $-\overrightarrow{EP}$, soit $\overrightarrow{PE}$.

Pour *r*, il y a deux fois le symbole de la même inconnue ; il y a une factorisation attendue. Encore que…
Comme dans l'activité précédente, les points sont rangés dans l'ordre alphabétique ; ce choix est encore tout à fait discutable ! Néanmoins, je signale qu'un de mes élèves s'est rendu compte qu'il s'était trompé dans un calcul parce que ses lettres n'étaient pas rangées dans l'ordre alphabétique (bien que cette information n'ait pourtant pas été donnée !). De plus, comme dans les activités 3 et 4, ce choix est apprécié par les élèves lorsqu'ils ont à chercher les points pour les relier. Le lecteur choisira…
L'enseignant pourra faire remarquer que le puzzle n'est pas nécessaire pour certains points, la résolution étant algébrique : pour *k*,

$$\overrightarrow{EB} + \bullet\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB} \Leftrightarrow \bullet\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \bullet = -1.$$

Éventuellement, des équations n'utilisant que des normes (comme $DI = \bullet FO$) pourront être insérées ; les surprises verront le jour !
La contrainte que je me suis donnée dans cette activité est, pour l'élève, la plausibilité de son erreur ; cela se ressent en particulier dans les valeurs des bornes des segments gradués. Par exemple, pour le point *a*, il y a possibilité d'un – 1 (correct) et d'un 1 ou, pour le point *f*, il y a possibilité d'un 1/2 (correct) et d'un – 1/2 ou d'un 2. C'est seulement à la fin, avec le dessin de l'oiseau, qu'il s'auto évalue.
À cause des équations proposées, cette activité est plutôt à faire en fin de chapitre, comme bilan. J'ai donné à mes élèves cette activité en devoir en temps libre. Les élèves ont bien joué le jeu, à savoir qu'ils n'ont pas recopié le dessin en montant dans l'escalier avant le cours (… !), ont placé les points qu'ils ont trouvés et pas les autres et, surtout, ont laissé leurs erreurs (ce qui m'a permis de retravailler avec eux tel ou tel type de notion du chapitre(12)).

Activité 7 : Un programme de tracé.

L'idée est d'écrire un programme de tracé du puzzle. On ne redira jamais assez combien un tel travail demande aux élèves analyse de la figure et rédaction mathématique correcte (vocabulaire exact, consigne exacte(13), hiérarchie des informations, …)(14).
Le travail consiste à distribuer différentes solutions aux élèves qui devront en écrire un programme de tracé, pour le donner ensuite à un autre élève qui l'exécutera (par exemple avec un logiciel de géométrie).
Certes, à part les six sommets de l'hexagone régulier (et son centre), tous les autres sont en fait des milieux de segments, ce qui permet un programme très simple. Mais autant utiliser les vecteurs… L'enseignant(15) *obligera*, par exemple, à utiliser tel ou tel vecteur, une expression du type « … est l'image de … par la translation de vecteur … », telle ou telle caractéristique (comme une égalité vectorielle définissant

(12) En aide individualisée, par exemple.
(13) Qui n'a jamais vu (avec la figure précédente) une consigne du type « Trace un hexagone ABCGLNPOHD » ?
(14) Le lecteur intéressé lira mon ouvrage *Consignes et démarches en mathématiques*, CDDP de l'Aube et de la Marne.
(15) Ces quelques consignes ouvrent des pistes de travail.

un milieu, …) ; a contrario, il *interdira* d'utiliser deux fois le même vecteur en tant que tel(16).

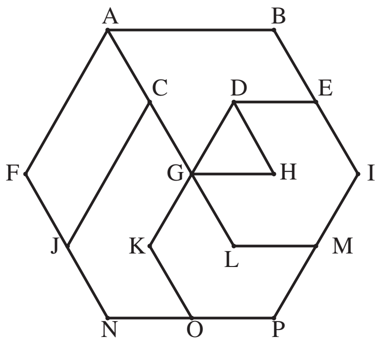
Et toutes les autres activités possibles… Car la liste n'est pas exhaustive !

Solutions des différentes activités.

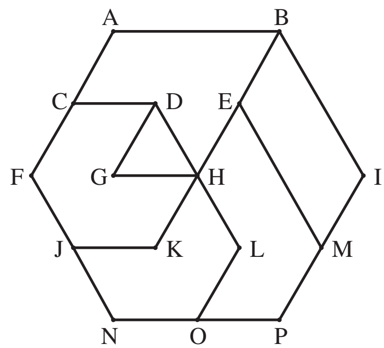
Solution de l'activité 1 : 1b 2c 3a 4c 5b 6a 7c 8c 9b 10b

Solution de l'activité 2 : 1c 2c 3b 4a 5b 6a 7a 8b 9a 10c

Solution de l'activité 3 :



Solution de l'activité 4 :



Solution de la question 2 de l'activité 5 :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + 3\vec{v}$	$\overrightarrow{OB} = 3\vec{u} + \vec{v}$	$\overrightarrow{OC} = 3\vec{v}$	$\overrightarrow{OD} = \vec{u} + 2\vec{v}$
$\overrightarrow{OE} = 2\vec{u} + \vec{v}$	$\overrightarrow{OF} = -\vec{u} + 3\vec{v}$	$\overrightarrow{OG} = 2\vec{v}$	$\overrightarrow{OH} = \vec{u} + \vec{v}$
$\overrightarrow{OI} = 3\vec{u} - \vec{v}$	$\overrightarrow{OJ} = 2\vec{v} - \vec{u}$	$\overrightarrow{OK} = \vec{v}$	$\overrightarrow{OL} = \vec{u}$
$\overrightarrow{OM} = 2\vec{u} - \vec{v}$	$\overrightarrow{ON} = -\vec{u} + \vec{v}$	$\overrightarrow{OP} = \vec{u} - \vec{v}$	

Solution de l'activité 6.