

# Éclairage historique et épistémologique : nombres et grandeurs chez Descartes

Michel Fréchet

## 1. Nombres – grandeurs

Les pythagoriciens affirmaient que *tout est nombre*. Compter une collection d'objets renvoyait un nombre. Mesurer un objet, après avoir choisi correctement une unité, renvoyait un nombre : le nombre de fois que l'unité pouvait être reportée dans l'objet.

Cependant, l'**incommensurabilité** du côté et de la diagonale du carré brisa cette théorie. En effet, on ne peut choisir une unité, aussi petite soit-elle, permettant de mesurer, en nombre entier, à la fois le côté et la diagonale.

Il a donc fallu se résoudre à scinder les mathématiques en deux parties : l'**arithmétique** (du grec  $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$  : nombre) qui s'intéresse aux *nombres* et à leurs propriétés et la **géométrie** qui s'occupe des grandeurs.

## 2. Descartes

Certains auteurs pensent que Descartes « a saisi la possibilité de relier fondamentalement le numérique au géométrique ». Cette formulation peut prêter à confusion, et je pense que l'auteur de la « Géométrie » n'anéantit pas consciemment « radicalement la distinction : grandeur géométrique et nombre dans la pratique du géomètre. ».

En fait, le projet de Descartes n'est pas de transformer la nature des mathématiques héritées des anciens, comme le feront plus tard Klein et Hilbert, mais de transformer leurs études. Ce que nous livre le philosophe est une **méthode**.

Descartes ne cherche pas à remettre en cause les résultats obtenus par les anciens, notamment les éléments d'Euclide, « la prétention de Descartes n'est pas de doter la mathématique de son temps d'un corpus augmenté de connaissances parcellaires, mais d'en produire un tableau unifié »<sup>(1)</sup>.

La théorie des proportions est le moyen par lequel la géométrie peut devenir algébrique, ce qui permet à la science mathématique d'être unifiée.

Descartes va procéder par analogie, il définit « les quatre ou cinq opérations en géométrie comme cela se passe en arithmétique » :

« Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui

(1) Descartes, *la géométrie de 1637*, par Vincent JULIEN. Juillet 1996.

peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux autres comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible »<sup>(2)</sup>.

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

| ALGÈBRE CARTÉSIENNE         |                                                                    |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| ARITHMÉTIQUE                | GÉOMÉTRIE                                                          |
| nombres                     | grandeurs                                                          |
| addition                    | mise bout à bout de segments                                       |
| soustraction                | superposition de deux segments                                     |
| multiplication $a \times b$ | recherche de la grandeur $x$ telle que $\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$ |
| division $\frac{a}{b}$      | recherche de la grandeur $x$ telle que $\frac{1}{b} = \frac{x}{a}$ |
| racine carrée $\sqrt{a}$    | recherche de la grandeur $x$ telle que $\frac{1}{x} = \frac{x}{a}$ |

La « grandeur » chez Descartes reste prisonnière de l'étendue, bien qu'un progrès soit réalisé par rapport aux anciens : le produit de deux segments (Descartes dit ligne) est un segment grâce à l'utilisation des proportions.

Descartes construit sa géométrie à la manière de l'arithmétique, il définit des algorithmes pour les opérations à l'aide de constructions à la règle et au compas tirées des *Éléments* d'Euclide. Tous les problèmes qu'il résout appellent une solution géométrique, une construction, et ce n'est pas parce qu'elles n'apparaissent nulle part qu'il n'y pense pas ; le 11 juin 1640, il écrit à Mersenne : « Pour les retours géométriques des questions trouvées par l'algèbre, ils sont toujours si faciles, mais avec cela si longs et ennuyeux à écrire, quand les questions sont un peu belles, qu'ils ne méritent pas qu'un homme qui sait quelque chose s'y arrête... ».

« Si Descartes a adopté la *recta linea* comme type de quantité, c'est que le nombre irrationnel n'existait pas alors en tant que nombre » dira G. Milhaud. La lecture de l'article « Nombre » de l'encyclopédie de d'Alembert nous montre que ce point de vue était encore en usage au XVIII<sup>e</sup>. « Enfin, comme Descartes ne connaît pas le nombre irrationnel en tant que nombre, il le remplace par la ligne droite, il est loin de prévoir, comme le prévoira Leibniz, la définition de Cauchy : - un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées » commente Belaval.

Par contre, l'idée géniale de Descartes de noter par une lettre, soit un nombre, soit une grandeur, va aider à leur rapprochement. Mais ce n'est pas parce qu'il note par le même type de symboles ces deux notions qu'il les confond.

(2) *La géométrie*, Descartes.