

La soustraction à l'école élémentaire

Élise Vagost

Cet article est le résultat d'un travail de recherche entrepris, en groupe, durant l'année de stage de professeur des écoles. Le point de départ est un article de Serge Petit paru dans le Bulletin Vert. Son objectif principal est l'analyse et la création d'activités relatives à la soustraction à l'école élémentaire.

Dans l'article, le « nous » fait référence aux quatre stagiaires que nous fûmes : Nadège ACCART, Cécile FAGNO, Marie ROMELOT et ÉLISE VAGOST.

I. Introduction

À l'entrée en Sixième (résultats de l'évaluation 2001), le calcul d'une soustraction posée fait difficulté pour environ un élève sur cinq : $1\ 285 - 625$ et $937 - 46$ étaient les deux exercices (ils étaient donnés en ligne). L'erreur la plus fréquente reste celle qui consiste à soustraire pour chaque chiffre « le plus petit du plus grand ».

La soustraction peut évoquer quatre points de vue différents (si l'on s'en tient à la typologie de Vergnaud) :

- Un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final.
Exemple : « J'ai 12 timbres, j'en utilise 5. Combien m'en reste-t-il ? »
- Deux états sont combinés pour obtenir un troisième état.
Exemple : « Dans une classe il y a 23 élèves. 9 sont des filles. Combien y a-t-il de garçons ? »
- La comparaison : on est amené ici à quantifier l'écart entre deux états.
Exemple : « Au jeu de l'oie, Béatrice est sur la case 31. Hervé a parcouru 14 cases de moins que Béatrice. Sur quelle case se trouve-t-il ? »
- Deux transformations sont composées pour en former une troisième. On ne connaît donc ici ni la valeur des états initiaux et finaux, ni celle des états intermédiaires.
Exemple : « Ce matin, j'ai perdu 9 billes et cet après-midi j'en ai gagné 15. Quel est le bilan pour toute la journée ? »

II. Étude de manuels

Nous avons « analysé » quelques manuels du CP au CM1. De ces analyses quelques points sont ressortis :

- Ils proposent pas ou peu de manipulation d'objets.
- La notion de soustraction est vue dès le CP (avec l'idée de compléments et d'addition à trous).
- La technique opératoire est vue en CE2.
- Les manuels de CE1 préconisent souvent l'utilisation de la droite numérique avec l'idée d'avancer et de reculer.
- La plupart des manuels « entrent » dans le concept de soustraction par une entrée numérique (à l'aide des additions à trous). Cependant nous avons pu

remarquer un manuel utilisant une entrée géométrique à l'aide d'une comparaison de longueurs de différentes bandes de papier.

- Dans les manuels, pour introduire la technique opératoire, on rencontre aussi bien une soustraction avec qu'une soustraction sans retenue.
- Les manuels ne sont pas tous unanimes quant à une technique opératoire à utiliser avec les élèves (voir partie IV).

III. Instructions officielles

a) Cycle 2

Au niveau du calcul, les instructions officielles nous disent que la seule technique opératoire étudiée en cycle 2 est celle de l'addition. « *Cela ne signifie pas que d'autres calculs ne sont pas abordés. Mais, chaque fois, leur traitement relève d'un calcul réfléchi construit par l'élève en s'appuyant sur la connaissance qu'il a des nombres et des opérations et sur les résultats qu'il a mémorisés.* » De plus, « *les signes opératoires sont présentés lorsque les élèves sont déjà familiarisés avec des problèmes relevant des opérations correspondantes et que certains résultats peuvent être obtenus et formulés oralement. Les écritures lacunaires peuvent être utilisées. Les mots " somme ", " différence " ou " écart ", " complément " et " produit " font partie du vocabulaire utilisé au cycle 2.* » (documents d'application)

Les élèves doivent être capables de :

- Connaître la table d'addition et l'utiliser pour calculer une somme, une différence, un complément ou décomposer un nombre sous forme de somme.
- Trouver rapidement le complément d'un nombre à la dizaine immédiatement supérieure.
- Organiser et effectuer, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, un calcul additif, soustractif, multiplicatif, en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.

Quelques types de calculs constituent des objectifs importants :

- Additionner ou soustraire des dizaines ou des centaines entières.
- Additionner ou soustraire un nombre à un chiffre à un nombre donné.

b) Cycle 3

Les documents d'application nous rappellent qu'il y a trois moyens de calcul : **le calcul mental** (qui doit occuper une place primordiale à l'école élémentaire), **le calcul instrumenté** (qui doit permettre une organisation préalable des calculs, un contrôle) et **le calcul posé** (soit un travail sur les techniques opératoires). Pour la soustraction qui nous intéresse ici, les élèves doivent savoir poser un calcul soustractif pour des cas simples (résultats à deux ou trois chiffres). Les instructions officielles prévoient son apprentissage au cycle 3. « *Une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées, ce qui conduit à retarder un peu leur mise en place (par rapport à ce qui est fait habituellement). Il est essentiel que bien avant que les techniques écrites usuelles ne soient mises en place, les élèves soient invités à produire des résultats en élaborant et en utilisant des procédures personnelles, non standard.* »

Les élèves doivent être capables de :

- Résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées. L'élève pourra avoir recours selon les situations à des procédures expertes ou il élaborera des procédures personnelles de résolution.
- Connaître les tables d'addition et les utiliser pour calculer une somme, une différence ou un complément.
- Additionner ou soustraire mentalement des dizaines entières ou des centaines entières.
- Calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux, par un calcul écrit en ligne ou posé en colonnes.
- Utiliser une calculatrice pour déterminer une somme ou une différence entre deux nombres entiers ou décimaux.

IV. Techniques opératoires

a) Remarques générales

L'élève doit disposer de plusieurs moyens de résolution (calcul réfléchi, calculatrice, technique opératoire) et savoir les mobiliser à bon escient. **À notre avis**, si l'élève est capable d'utiliser des procédures de calcul réfléchi, dans des cas où cela est approprié et si, pour des cas plus complexes, il peut avoir recours à la calculatrice, l'apprentissage des techniques opératoires usuelles peut être retardé (c'est ce que nous proposerons dans notre progression). Cet apprentissage pourra être abordé au moment où l'élève a les connaissances nécessaires à la bonne compréhension de ces techniques.

b) Documents d'accompagnement

Nous avons pensé qu'il était intéressant à ce niveau là de notre étude de citer le document d'accompagnement des programmes intitulé : « calcul posé » :

« L'apprentissage d'une technique usuelle de la soustraction est plus difficile que celui de l'addition, pour plusieurs raisons :

- *il existe plusieurs techniques possibles dont les fondements ne reposent pas sur les mêmes principes ni, par conséquent, sur les mêmes connaissances ;*
- *les connaissances qui permettent de justifier ces techniques sont plus nombreuses et plus complexes que dans le cas de l'addition ;*
- *les différences ou les compléments élémentaires (relevant des tables) sont souvent moins disponibles que les sommes. »*

Le document d'accompagnement fait état de trois techniques opératoires pratiquées. Le choix de l'une de ces techniques par l'enseignant suppose une conscience claire des justifications qui sous-tendent chacune d'elles de façon à adapter les étapes de l'apprentissage. Le calcul s'effectue toujours de droite à gauche. Les trois techniques sont expliquées sur l'exemple : $753 - 85$.

– **Technique reposant sur une autre écriture du premier terme**

De 3 unités, on ne peut pas soustraire 5 unités.

On échange donc 1 dizaine contre 10 unités. On considère maintenant 4 dizaines et 13 unités.

On peut alors soustraire 5 unités de 13 unités ; résultat : 8 unités.

Le même processus est repris pour soustraire 8 dizaines...

$$\begin{array}{r}
 6 \quad 14 \\
 \cancel{7} \quad \cancel{5} \quad 13 \\
 - \quad \quad \quad 8 \quad 5 \\
 \hline
 6 \quad 6 \quad 8
 \end{array}$$

Cette technique est en vigueur dans certains pays, mais présente l'inconvénient de nombreuses surcharges pour des calculs du type $4\,003 - 1\,897$.

– **Technique reposant sur l'équivalence entre soustraction et recherche de complément**

Le calcul de $753 - 85$ est équivalent à celui de $85 + \dots = 753$.

C'est donc le calcul de cette addition lacunaire qui va être réalisé. Le seul nombre à un chiffre qui ajouté à 5 donne un résultat terminé par 3 est 8 (table d'addition) : $5 + 8 = 13$. On retrouve le « 3 » des unités et il faut écrire « 1 » comme retenue au rang des dizaines.

L'addition lacunaire se poursuit au rang des dizaines : que faut-il ajouter à 9 ($8 + 1$) pour obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 5 ? Réponse : 6, car $9 + 6 = 15$, avec retenue de « 1 » au rang des centaines...

$$\begin{array}{r}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ étape} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad 8 \quad 5 \\
 + \quad \quad \quad \underline{\quad 8} \\
 \quad \quad \quad 7 \quad 5 \quad 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{2}^{\text{ème}} \text{ étape} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad 1 \quad 8 \quad 5 \\
 + \quad \quad \quad \underline{\quad 6 \quad 8} \\
 \quad \quad \quad 7 \quad 5 \quad 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{3}^{\text{ème}} \text{ étape} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad 1 \quad 1 \quad 8 \quad 5 \\
 + \quad \quad \quad \underline{\quad 6 \quad 6 \quad 8} \\
 \quad \quad \quad 7 \quad 5 \quad 3
 \end{array}$$

Cette technique présente l'avantage de n'être qu'une adaptation d'une technique connue (celle de l'addition), mais elle nécessite la compréhension de l'équivalence entre soustraction et une recherche de complément qui reste encore difficile au début du cycle 3 pour certains élèves.

– **Technique reposant sur l'invariance d'une différence par ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la soustraction.**

De 3 unités, on ne peut pas soustraire 5 unités. On choisit d'ajouter 10 unités au premier terme et de considérer 13 unités. Pour ne pas changer la différence, il faut aussi ajouter 10 unités au deuxième nombre : on le fait sous la forme d'1 dizaine. Etc. À signaler : il y a ajout simultané des 10 unités et de la dizaine (puis de 10 dizaines et d'une centaine). On ne peut donc pas parler de retenue.

$$\begin{array}{r}
 7 \quad 15 \quad 13 \\
 \quad \quad 8 \quad 5 \\
 - \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 6 \quad 6 \quad 8
 \end{array}$$

Cette technique fait également appel aux équivalences liées à la numération décimale, entre 10 unités et 1 dizaine, etc. Elle semble être la plus utilisée en France. Pourtant c'est la plus difficile, car elle repose sur une propriété que les élèves maîtrisent tardivement et qui peut être formalisée par : $a - b = (a + c) - (b + c)$; cette formalisation n'est évidemment pas à proposer aux élèves.

Le document d'accompagnement s'intéresse aux étapes de l'apprentissage de celles-ci :

« Le choix de l'une des techniques conditionne les étapes de l'apprentissage, dans la mesure où les connaissances et les compétences préalables que doivent maîtriser les élèves varient d'une technique à l'autre. Les seules connaissances communes concernent les équivalences entre unités, dizaines, centaines, ... et une maîtrise suffisante des résultats des tables d'addition (compléments et différences).

Comme pour l'addition, il est important de ne pas dissocier dans le temps l'étude des cas " sans retenue " et des cas " avec retenue ", afin de ne pas générer l'idée qu'un traitement séparé des chiffres de même valeur suffit toujours. »

c) Autre technique

Nous avons été séduites par la technique proposée par Serge Petit, dans un article paru dans le Bulletin de l'APMEP (n° 445, mars-avril 2003, p. 133-139).

Nous faisons nôtre cette remarque :

« Il est important pour les élèves de mettre des mots lorsqu'ils utilisent la technique opératoire afin de continuer à donner du sens à la soustraction qu'ils sont en train d'effectuer. »

Cette technique plus « naturelle » repose sur le fait de dire ce qu'on fait (elle est à rapprocher de la technique « reposant sur une autre écriture du premier terme » du b)).

Au préalable (comme nous l'avons suggéré également dans notre progression), les élèves devront avoir manipulé des objets et utilisé du matériel pour introduire la numération de position. Par exemple, les unités sont constituées de graines de haricots, les dizaines sont des boîtes de pellicules photos fermées contenant dix haricots, les centaines sont des petits sacs fermés contenant dix boîtes de pellicules photos. Les mille sont des boîtes à chaussures contenant ...

Le lecteur pourra trouver l'illustration de la technique dans l'article cité où est proposé l'exemple : 1 002 – 789.

V. Progression

Nous avons construit, en tenant compte de toutes ces remarques, une « progression » pour l'apprentissage de la soustraction de la Grande Section au CM2.

a) Grande Section

Idée de surcomptage à l'aide des activités rituelles (gestion des absents, des présents)

b) CP

- Idée de manipulation « pure » pour résoudre des soustractions du type $10 - \dots$ à l'aide de plusieurs outils :
 - À l'aide de la bande numérique (idée d'avancer et de reculer).
 - Manipulation d'objets comme les haricots ou les boîtes (idée de complément).
 - À l'aide des mains (« j'ai dix doigts, j'en cache deux combien m'en reste-t-il ? »).
- Introduction du signe « moins ». Nous avons pensé qu'il fallait l'introduire dès le CP pour deux raisons :
 - Pour l'utilisation de la calculatrice (les élèves doivent apprendre à utiliser la calculatrice dès le CP afin de pouvoir être mis en situation de réelle recherche avec un calcul soustractif hors de leur portée au niveau numérique mais non au niveau conceptuel).
 - Pour pouvoir introduire l'écriture mathématique avec les signes conventionnels.
- Additions à trous en ligne pour montrer aux élèves le lien entre addition et soustraction.

c) CE1

En CE1, il ne doit pas y avoir de réel changement par rapport au CP. Les méthodes doivent être les mêmes : continuer à faire intégrer les notions en faisant varier la variable didactique grandeur du nombre.

Mais, contrairement à certains manuels, nous pensons qu'il ne faut toujours pas introduire la technique opératoire. La technique opératoire ne doit pas être perçue par les élèves comme une recette qui ôte tout le sens de l'opération. À partir du moment où la technique opératoire est donnée, les élèves oublient le sens mathématique de ce qu'ils font. Il faut faire éprouver aux élèves le besoin d'acquérir cette technique. Mais avant cela il faut privilégier les procédures personnelles. Il faut que les élèves développent leurs propres stratégies de calcul.

Il nous a paru aussi important d'apporter un grand nombre de synonymes au mot « moins » (soustraire, enlever, donner la différence, ôter, prendre, donner, ...) afin que les élèves ne tombent pas, plus tard, dans les pièges des énoncés à mots inducteurs.

d) CE2

La technique opératoire doit être introduite le plus tard possible. Cependant il faut garder en tête le fait que pour la division, la technique opératoire de la soustraction doit être maîtrisée. Donc, après réflexion, il semble judicieux de l'introduire en CE2 après deux années de résolution de problèmes de types soustractifs.

Cet apprentissage peut être conduit lorsque les élèves se sont approprié et ont utilisé l'équivalence entre les calculs de « a pour aller à b » et « $b - a$ », c'est-à-dire

lorsqu'ils ont réalisé par exemple qu'un calcul du type « 285 pour aller à 412 » donne le même résultat que celui affiché sur la calculatrice lorsqu'on tape $412 - 285$. Ils connaissent par ailleurs la « technique opératoire » de l'addition à trous. Ces acquis sont ici utilisés pour la construction de la technique opératoire de la soustraction, basée sur le calcul de « a pour aller à b ».

La technique opératoire que nous aurons envie de privilégier est celle développée dans l'article précédemment cité et ce pour plusieurs raisons :

- Elle continue à donner du sens au concept de la soustraction.
- Elle ne dénature pas le nombre
- Ce n'est pas une simple recette

Nous avons trouvé une situation-problème que les élèves n'arriveront pas à résoudre sans l'apport théorique d'une technique opératoire (si l'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée !). Il nous a paru essentiel de donner tout de suite une soustraction à retenues pour montrer aux élèves pourquoi on « commence » par les unités.

Voici donc une situation-problème possible que nous avons imaginée :

Comme chaque automne, deux groupes d'hirondelles quittent Metz, direction la chaleur, les vacances, ... Bref direction l'Afrique !

Après plusieurs longs jours de voyage, le premier groupe, un peu fatigué, décide de faire une escale à Brazzaville (Congo), après avoir parcouru 6 943 km.

Les autres, plus sportives, continuent leur route jusqu'à leur destination de rêve : Le Cap (Afrique du Sud) qui se trouve à 11 731 km de Metz.

Après quelques jours de repos au Congo, le premier groupe décide de rejoindre le second en Afrique du Sud. Avant de s'envoler, la petite Mélanie déjà fatiguée, demande à sa maman : « Maman, c'est encore loin ? combien de kilomètres ? »

Essaye de répondre à la petite hirondelle ... N'oublie pas que les oiseaux volent toujours en ligne droite.

N.D.L.R. On suppose que Metz, Brazzaville et Le Cap sont alignés.

e) CM1, CM2

En CM1, CM2 il faut continuer à entraîner les élèves à utiliser la technique opératoire sans pour autant ôter le sens de la soustraction. Par ailleurs, nous pensons qu'il faut donner aux élèves des situations de plus en plus complexes dont les résolutions ne font pas intervenir que la soustraction (voir le paragraphe VII. présentant un panel d'exercices).

En plus de ces entraînements et d'une « continuité d'apprentissage », il y a un nouvel apprentissage essentiel à mener dans ces classes : les soustractions des nombres décimaux. De la même façon que pour les soustractions de nombres entiers, il ne faut pas donner tout de suite une technique opératoire aux élèves.

Le document d'accompagnement donne comme remarque à ce propos :

« Comme dans le cas de l'addition, le travail sur la technique posée de la soustraction de deux nombres décimaux peut être envisagé dès qu'une première compréhension de l'écriture à virgule des nombres décimaux est en place, toujours axé sur la justification de la technique. Une difficulté particulière apparaît pour le

calcul de différences comme $703,2 - 87,56$: elle se traduit souvent par le fait que des élèves écrivent “ 6 ” au rang des centièmes dans le résultat. Pour conduire correctement le calcul, il est nécessaire de considérer que l’absence de chiffre des centièmes dans $703,2$ peut aussi être traduite par la « présence » de 0 à partir de l’égalité : $703,2 = 703,20$.

Le but visé est d’amener les élèves à prendre conscience que la soustraction des décimaux fonctionne comme celle des entiers, moyennant un alignement (en colonne) des chiffres des unités : le tableau de numération peut constituer un référent utile, à condition qu’il ne devienne progressivement qu’évoqué. »

VI. Remarques à propos de la calculatrice

Nous pensons que dès le CP il faut mettre cet outil à la libre disposition des élèves. Le maître se réserve cependant le droit d’en interdire l’usage dans certaines activités.

« Il s’agit là d’une décision importante qui s’inscrit d’abord dans la volonté de reconnaître que l’outil de calcul le plus utilisé par l’homme d’aujourd’hui (dans sa vie quotidienne ou professionnelle) n’est plus le papier et le crayon. La calculatrice est d’abord un outil didactique, c’est-à-dire que sa mise à disposition des élèves peut favoriser l’utilisation de procédures qui n’apparaîtraient pas en son absence. Ainsi un élève peut être dissuadé d’utiliser la soustraction pour résoudre un problème parce qu’il ne sait pas effectuer les calculs correspondants. C’est ici qu’intervient la calculatrice, comme outil de calcul permettant de réaliser ce que l’élève n’est pas encore capable de mener à bien seul. Dans le même sens, l’utilisation de la calculatrice peut donner une légitimité aux signes opératoires utilisés par les élèves. L’hypothèse peut être faite que, en prenant de l’intérêt pour les élèves, les signes + et – gagnent également en signification. Par contre, l’usage de la calculatrice risque de renforcer la signification du signe = comme « annonce du résultat » au détriment de sa signification comme « équivalence entre deux écritures d’un même nombre ».

La calculatrice peut être aussi utilisée comme outil de vérification d’un calcul réalisé mentalement ou par écrit.

Enfin, elle peut être source de questions, de problèmes adressés aux élèves. Par exemple : comment obtenir 17 à l’écran sans taper ni 1, ni 7 ? Comment obtenir 46 en n’utilisant que les touches 7, 4, + et – ? ». (Ermel CE1).

VII. Panels d’exercices pour les différents niveaux avec leurs intérêts respectifs

Nous avons fait des recherches dans plusieurs manuels ainsi que dans des livres de problèmes pour l’école élémentaire et nous allons en analyser quelques-uns.

a. CAP Maths CE2

- « Le voyage en ballon »

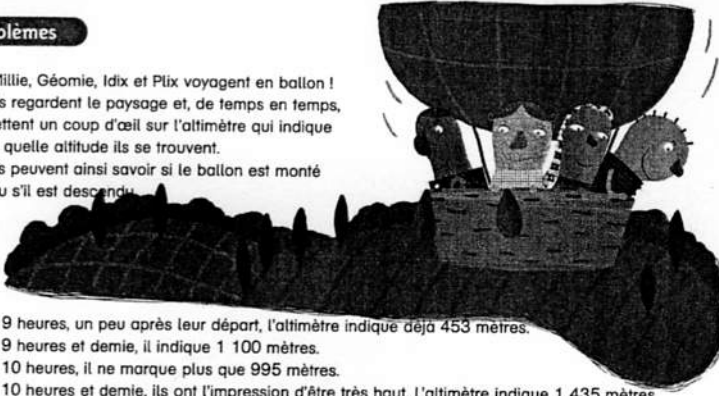
L’objectif spécifique de la situation est de chercher comment déterminer la valeur d’une augmentation ou d’une diminution.

Dans cette situation, il s'agit de conforter chez les élèves la reconnaissance de l'équivalence entre calcul d'un complément (en avançant ou en reculant), addition à trous et soustraction.

Il est intéressant d'utiliser ce problème car les enfants vont se rendre compte que monter n'est pas synonyme d'ajouter et que descendre n'est pas synonyme de soustraire.

Problèmes

1 Millie, Géomie, Ixix et Plix voyagent en ballon ! Ils regardent le paysage et, de temps en temps, jettent un coup d'œil sur l'altimètre qui indique à quelle altitude ils se trouvent. Ils peuvent ainsi savoir si le ballon est monté ou s'il est descendu.



À 9 heures, un peu après leur départ, l'altimètre indique déjà 453 mètres.
 À 9 heures et demie, il indique 1 100 mètres.
 À 10 heures, il ne marque plus que 995 mètres.
 À 10 heures et demie, ils ont l'impression d'être très haut. L'altimètre indique 1 435 mètres.
 Et, à 11 heures, un peu avant l'atterrissage, ils sont encore à 698 mètres.

● De combien de mètres le ballon est-il monté entre 9 heures et 9 heures et demie ?

● De combien de mètres le ballon est-il descendu entre 9 heures et demie et 10 heures ?

● De combien de mètres le ballon est-il monté entre 10 heures et 10 heures et demie ?

● De combien de mètres le ballon est-il descendu entre 10 heures et demie et 11 heures ?

• « Le recensement »

Cette activité permet d'entretenir la capacité à résoudre des problèmes relatifs à des augmentations et des diminutions.

La situation est intéressante car elle mêle deux types de situations : additive et soustractive et l'élève est amené à réfléchir sur le sens des deux opérations.

Enfin, l'élève est tantôt amené à calculer des écarts entre deux nombres (40 666 pour aller à 40 972), à poser des additions ($1\ 117 + 26 = \dots$) et à poser des soustractions ($3\ 902 - 300 = \dots$).

Problème

1

En 1999, la population de toutes les communes de France a été recensée. Le recensement précédent date de 1990. On peut donc savoir si la population de chaque commune a augmenté ou diminué entre 1990 et 1999. Dans le tableau suivant, on donne des renseignements pour sept communes du département de l'Ain. Certaines informations ont été effacées. Retrouve-les.

(source : site INSEE www.recensement.insee.fr)

| Commune | Population en 1990 | Population en 1999 | Variation ↗ augmentation ↘ diminution |
|-----------------|--------------------|--------------------|---|
| Arandas | 128 | 135 | ↗ 7 |
| Bourg-en-Bresse | 40 972 | 40 666 | |
| Coligny | | 1 117 | ↘ 26 |
| Gex | 6 645 | | ↗ 1 118 |
| Nantua | | 3 902 | ↗ 300 |
| Souclin | 197 | 221 | |
| Tenay | | 1 086 | ↘ 270 |

• « Deux problèmes divers »

Dans ces deux problèmes, les élèves connaissent l'état final, la transformation et il s'agit de trouver l'état initial. Leur objectif est de chercher différentes méthodes pour trouver une valeur avant qu'elle ne subisse une augmentation ou une diminution (équivalence entre addition à l'opposé et soustraction).

En classe, il est intéressant de proposer une confrontation des méthodes utilisées par les élèves.

Problèmes

2

Le prix d'une voiture a augmenté de 200 euros. Elle coûte maintenant 8 945 euros. Quel était son prix avant l'augmentation ?

3

Une voiture vient de parcourir 325 km. Le compteur affiche maintenant 2 480 km. Qu'affichait le compteur avant le départ de la voiture ?

Ces deux problèmes peuvent être précédés de situations laissant une libre place aux procédures personnelles.

Exemples :

- Une plante a grandi de 25 cm en un an et mesure maintenant 136 cm. Combien mesurait-elle l'année dernière ?
- On a taillé une plante au printemps. On a enlevé 45 cm et la plante mesure maintenant 85 cm. Combien mesurait-elle avant d'être taillée ?

Les élèves sont souvent confrontés à des situations dans lesquelles le problème posé peut être résolu soit par la recherche d'un complément, soit par le calcul d'une addition à trous ou celui d'une soustraction. Or il faut que les élèves prennent conscience du fait que pour retrouver une valeur avant qu'elle n'ait subi une augmentation, on peut enlever ce qui a été ajouté et dans le cas où la valeur subit une diminution, on peut ajouter ce qui a été enlevé. C'est ce type de raisonnement qu'il faut induire afin d'assurer l'équivalence entre les différentes procédures de résolution.

• « Combien de points cachés ? »

L'objectif est toujours le même : faire prendre conscience aux élèves qu'il existe plusieurs procédures différentes pour résoudre un même problème et en particulier une équivalence entre le calcul de complément, l'addition à trous ou la soustraction.

Problèmes

3 Pour chaque problème, trouve combien de points sont cachés. Explique ta réponse.

Sans la calculatrice

Il y a 85 points en tout.

Il y a 92 points en tout.

Avec la calculatrice (si tu veux)

Il y a 207 points en tout.

Il y a 942 points en tout.

Il y a 700 points en tout.

Il y a 634 points en tout.

Plusieurs variables didactiques entrent en ligne de compte :

- **La taille des nombres en présence** : certains nombres facilitent le calcul additif, d'autres le calcul soustractif.
- **L'usage sollicité de la calculatrice** : il est plus facile de calculer une soustraction qu'une addition à trous avec une calculatrice.
- **La phase de validation des réponses** : on valide plutôt le calcul par addition, mais, si on souhaite compter les points cachés, il faut enlever les autres points du total pour n'avoir plus que les points cachés.

b. Cap Maths CM1

• « Quelle est la différence ? »

L'objectif de cet « exercice » est de chercher une technique pour soustraire les nombres décimaux ! La technique doit prolonger celle élaborée pour les nombres entiers.

Recherche **Quelle est la différence ?**

1 Calcule chaque différence et explique la méthode que tu as utilisée :

$12,59 - 7,3$ $37,38 - 9,42$

2 Calcule chacune de ces différences :

$25,8 - 4,36$ $8 - 4,7$

Exercice

Voici 3 nombres : 57 9,705 0,45

Écris et calcule toutes les différences possibles.

166 ● cent soixante-six

Pour calculer une différence de nombres décimaux en posant l'opération.

DICO-MATHS ► p. 12

L'enseignant, lors de la mise en commun, utilise l'une des deux soustractions suivantes ($25,8 - 4,36$ ou $8 - 4,7$) pour mettre en évidence trois points :

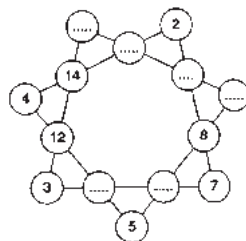
- La pose en colonne doit respecter l'alignement des chiffres : colonne des millièmes, colonne des centièmes, ...
- L'absence de chiffre dans une colonne signifie qu'il n'y a pas d'élément de cette valeur (l'écriture du 0 manquant peut être utile, surtout dans les premiers termes de la différence).
- L'explication des retenues, en fonction de la technique choisie.

c. « Objectif calcul » CM1

• « L'étoile des nombres »

Cet exercice permet de réinvestir les situations additives et soustractives. Sa forme nous paraît attrayante et motivante pour les élèves car la présentation fait penser à un jeu. De plus une auto-évaluation est possible.

En plaçant dans chaque cercle un nombre compris entre 1 et 14, tu dois obtenir un total de 30 dans chaque alignement de 4 cercles.



• « Les tickets de caisse »

Cet exercice nous paraît motivant car il peut être rendu concret. En effet on peut utiliser de vrais tickets de caisse pour réaliser cette situation. Il peut donc être rattaché à une situation de la vie quotidienne.

Toutefois, on se pose une question à propos des tickets de caisse : les signes opératoires n'apparaissant pas souvent, est-il pertinent de montrer aux élèves que, dans les situations de la vie courante, les procédures mathématiques n'apparaissent pas telles qu'elles ont été enseignées car l'absence des signes pourrait les perturber ?

Retrouve ce qui a été effacé dans les tickets de caisse ci-dessous.

a/

| | | |
|----------------|----------------|----------------|
| TROUC 14.03.99 | TROUC 08.07.98 | TROUC 05.05.98 |
| 8.75 | 23.16 | 4.25 |
| 8.75 | 14.50 | 12.40 |
| 5.30 | | 8.75 |
| | 4.50 | |
| Total 32.50 | Total 64.50 | Total 52.80 |

b/

| | |
|--------------|--------------|
| Dune 2.02.99 | 10.10 |
| 20.50 | 13.50 |
| | 5.20 |
| | |
| Total 57.00 | 7.00 |
| Payer 60.00 | 12.50 |
| Rendu 3.00 | |
| | Total 100.00 |
| | Rendu 43.50 |

d. « Maths en flèches » CM2

Tous ces exercices présentent à la fois des situations complexes (les réponses ne s'obtiennent pas par un seul calcul) et des situations où la compréhension de l'énoncé et des questions constitue un élément important.

• « Le flipper »



Activités

Thibault, Ahmed, Pascale et Gaëlle font une partie de mini-flipper.

Chaque partie se joue en trois boules.
Selon leur score, ils peuvent gagner des parties gratuites.

| BRAVO ! | |
|----------------|-----------------------|
| 250 000 points | → 1 partie gratuite |
| 375 000 points | → 2 parties gratuites |
| 475 000 points | → 3 parties gratuites |

Voici leurs scores après avoir joué deux boules :

| | |
|-----------------|-----------------|
| Thibault 61 000 | Pascale 180 110 |
| Ahmed 276 450 | Gaëlle 310 850 |



• Combien chaque enfant doit-il gagner de points avec la troisième boule pour avoir le plus possible de parties gratuites ?

• Ahmed a obtenu 164 360 points avec sa 3^e boule. Quel est son score final à la fin de la partie ?

• À la fin de la partie, Gaëlle a obtenu 2 parties gratuites et son score final a 40 000 points d'écart avec celui de Ahmed. Quel est ce score ?



Ce problème est attractif et la thématique est motivante pour des élèves de CM. De plus, il est complexe car il propose des opérations variées. D'autre part, la manipulation de grands nombres contraint les élèves à utiliser la technique opératoire de la soustraction.

• « Le relevé de banque »

Cette situation problème présente un document de la vie courante (à savoir un relevé de compte en banque) et sera utile dans la vie future des élèves. Il permet de se familiariser à un vocabulaire spécifique (débit et crédit) qui ne sont pas des termes simples à comprendre. D'autre part, la résolution de cet exercice laisse les élèves libres de la méthode à utiliser. Il conduit à l'utilisation des techniques opératoires de l'addition et de la soustraction. De plus, l'ordre des opérations n'a pas d'importance et n'est pas prédéfini par l'énoncé.

1 Activités

Monsieur Giraud possède un compte à la banque CRÉDOR.
Voici son dernier relevé de compte :

| BANQUE CRÉDOR Agence Lyon 2 191, rue de Jemine 69601 Lyon | | M. ou Mme Giraud 5, rue du Vieux-Cours 69003 Lyon | |
|---|----------------------------|---|-------------------|
| Compte N° : 99 733 704 « Relevé du : 21.02 au 28.02 | | | |
| | | Ancien solde | 1 130,04 € |
| Date | Opérations | DÉBIT | CRÉDIT |
| 21-02 | Chèque n° 3005340 | 35,20 € | |
| 25-02 | Virement Sécurité sociale | | 62,40 € |
| 28-02 | Fautes Télécom | 142,66 € | |
| 10-02 | Chèque n° 3005341 | 105,52 € | |
| 10-02 | Chèque n° 3005342 | 255,29 € | |
| 25-02 | Virement salaire | | 1 550,00 € |
| 25-02 | Jeux 1 distributeur CB | 320,00 € | |
| 27-02 | Virement Mutuelle du Rhône | | 45,27 € |
| 27-02 | Paiement Super T | 46,24 € | |
| | | Nouveau solde | |

- Quel est le mois de ce relevé ?
- Que signifient les termes : opérations, débit, crédit, solde ?
- Calcule de deux façons le nouveau solde au 28.02 (tu peux utiliser une calculatrice).
- Le 1^{er} mars, M. Giraud paie une facture de 300 € par chèque et son frère lui rembourse 86 € par chèque également. Quel sera son solde après ces deux opérations ?

• « La Tour Eiffel »

Ce petit exercice permet de travailler la compréhension des énoncés et la recherche dans l'énoncé des éléments nécessaires à la solution. Il présente également un aspect temporel avec la succession des événements. Les techniques de résolution peuvent être variées et peuvent mettre en œuvre le surcomptage (question b) et la technique « experte ».

3 Petite histoire de la tour Eiffel...

L'année de son inauguration, la tour Eiffel pesait 9 700 tonnes.
En 1981, des plates-formes ayant été ajoutées, elle pesait alors 10 100 tonnes.
Mais en 1983, c'est-à-dire 94 ans après la première inauguration, des travaux d'aménagement l'allègèrent de 1 343 tonnes.

a En quelle année a été inaugurée la tour Eiffel ?

b En 1981, combien pesait-elle de plus par rapport à son poids initial ?

c Quel était le poids de la tour Eiffel en 1983 ?



Petite remarque : en classe, nous changerions l'énoncé de la question c, en effet nous parlerions de masse et non de poids.

e. « Consignes & démarches en mathématiques » CM-6^{ème}.

• « Tri des énoncés suivant le calcul de la résolution »

Cet exercice a pour objectif la compréhension d'énoncés courts ainsi que de la démarche de résolution. En raison de la présence de la division, cet exercice doit être proposé en CM2.

Mais il est intéressant de le transposer et d'inventer des énoncés du même type pour tous les niveaux (du CP au CM2), Ce genre d'exercice permet de voir si les élèves reconnaissent ce que sont des situations additives, soustractives ou multiplicatives...

1. Classer des énoncés suivant le calcul de la résolution.



Classe les énoncés ci-dessous dans le tableau suivant :

| La solution s'obtient... | Énoncé n°... |
|--------------------------|--------------|
| sans calcul | |
| avec une addition | |
| avec une soustraction | |
| avec une multiplication | |
| avec une division | |

- (1) Je pense à un nombre. Je le double et je trouve 314. Quel est ce nombre ?
- (2) Il ne reste à Jean Chrysostome que 7,23 €. Il lui manque 0,68 € pour s'acheter le nouvel album de sa BD préférée. Quel est le prix de cet album ?
- (3) Nouridine et David ont chacun 16 autographes de footballeurs. Hier soir, Nouridine a réussi à en avoir 5 nouveaux et David, 3 nouveaux. Qui en a maintenant le plus ?
- (4) Brigitte a fait 5,2 litres de gelée de coings. Combien de pots de 0,4 litre doit-elle prévoir ?
- (5) On a coupé 25 cm de cette corde qui mesurait auparavant 2,60 m. Quelle est la longueur restante ?
- (6) Pour utiliser Internet, Sylvie paie 0,15 € par minute. Combien lui coûte une heure de connexion ?
- (7) On a versé dans un bidon 9 litres de lait : il y a maintenant 15 litres. Combien le bidon contenait-il de litres de lait auparavant ?
- (8) Raymond se promène à vélo. Il a déjà parcouru 31 kilomètres. Il lui en reste 18. Quelle est la longueur de son parcours ?
- (9) Pénélope a fait un trajet pédestre de 3,5 kilomètres en 48 minutes et Margot a fait le même trajet en 54 minutes. Qui a été le plus rapide ?

Remarques :

- Il faudrait, en classe, enlever l'énoncé (4) en raison de la présence d'une division par un nombre non entier (hors programme depuis 2002).
- Il pourrait être intéressant, afin de ne pas empêcher l'utilisation de méthodes différentes (tâtonnement par exemple), de rajouter une ligne « autrement » au tableau.

• « Choix d'un énoncé »

Cet exercice permet de savoir si les élèves reconnaissent ce que sont des situations additives et soustractives. En raison de la présence des parenthèses, cet exercice est à proposer en CM2.



Voici quatre énoncés. Quel(s) est (sont) celui (ceux) dont la solution conduit à effectuer le calcul suivant :

$$40 - (19 + 8) ?$$

- (1) J'achète un pot de peinture à 19 € et un lot de pinceaux à 8 € pour repeindre la tonnelle du jardin. Je donne 40 €³² à la commerçante. Combien va-t-elle me rendre ?
- (2) Le bus est arrivé à mon arrêt avec 40 personnes à l'intérieur. 19 personnes sont montées et 8 sont descendues. Combien de personnes étaient dans le bus lorsqu'il est reparti ?
- (3) Jonathan et Marc ont joué aux billes. Ce matin, Marc en possédait 40. Au bout d'une heure, il en avait perdu 19 et, une heure après, il en avait perdu encore 8. Combien lui en restait-il en rentrant chez lui ?
- (4) J'achète deux disques compacts. L'un coûte 19 € et l'autre, 8 € de moins. Je donne 40 € au caissier. Combien va-t-il me rendre ?

f. « Des problèmes pour le cycle 3. Les Maths, un outil pour comprendre le Monde »

Ce livre n'est pas un manuel, mais un livre de fiches photocopiables proposant de nombreux problèmes pour le cycle 3. Nous proposons quelques exercices que nous apprécions.

Voici quelques remarques intéressantes des auteurs du livre :

« Il nous a semblé important de sortir du cloisonnement de l'année, le cycle 3 et le début du collège étant particulièrement propices à l'utilisation de connaissances construites dès le cycle 2. Bien sûr, ce choix amène quelques difficultés. En effet, les capacités en calcul d'un élève de CE2 ne sont pas les mêmes que celles d'un élève de CM2 et le temps d'exécution des calculs ainsi que leur niveau d'expertise pourront donc varier. Pour pallier ces difficultés, nous pensons que l'usage réfléchi de la calculatrice permettra un engagement plus grand dans le traitement d'un problème en allégeant la tâche de calcul, car il ne s'agit pas pour la plupart des situations proposées d'un entraînement au calcul écrit.

Conscients de ces difficultés éventuelles, nous avons cependant choisi de proposer aux élèves de résoudre des problèmes sans étiquette d'un niveau précis. Certains élèves de CE2 sont parfois intéressés par des situations qui ne leur sont pas habituellement proposées parce que jugées trop "difficiles" pour eux alors que des élèves de CM2 trouvent souvent plaisir à résoudre un problème qui, pour une fois, ne leur semble pas hors de leurs possibilités. »

En classe, il paraît important de ne pas utiliser ces problèmes tels quels, mais de les recréer en fonction du vécu des élèves.

★ **Ça monte et ça descend**

Un avion part de Paris à destination de Moscou (en Russie) avec une escale prévue à Berlin (en Allemagne) et une autre à Varsovie (en Pologne). 325 passagers embarquent à Paris. À Berlin, 28 passagers descendent de l'avion et 57 montent. À Varsovie, 41 passagers descendent et 35 montent.

? Combien de passagers débarqueront à Moscou ?

★ **Un peu d'argent de poche**



Au moment de la rentrée, grand-mère propose une petite aide à chacun de ses petits-enfants pour que chacun puisse s'acheter la papeterie qui lui plaît.

"Je vais donner à chacun ce qui lui manque dans sa tirelire pour avoir 10 €." Dit-elle.

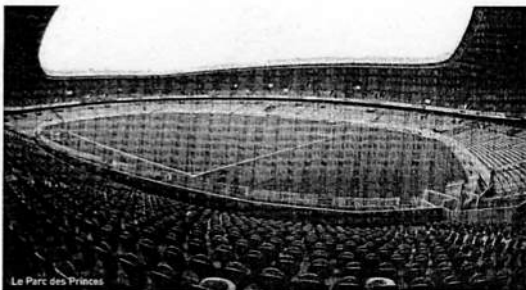
Elle donne 7 € à Pierre, 4 € à Alice et ne donne rien à Lucie qui est furieuse : "C'est injuste : je fais des économies et du coup, je n'ai rien !" Grand-mère essaie de la consoler mais n'y parvient pas.

Elle lui dit alors : "Bon, tu as raison, ce n'est pas très juste : je te donne 4 €, comme à Alice. C'est autant que ce que tu avais en plus de 10 €."

? Combien chaque enfant avait-il avant de recevoir l'argent de sa grand-mère ?

★★ **Le Stade de France**

À Saint-Denis, dans la banlieue nord proche de Paris, a été construit le **Stade de France** qui peut accueillir jusqu'à 105 000 spectateurs (75 000 pour les rencontres d'athlétisme et 80 000 pour le rugby ou le football). Avant qu'il soit construit, les grandes rencontres sportives avaient lieu au **Parc des Princes** (Porte de Saint-Cloud à Paris) qui contient 49 329 places. Le **Superdôme** de La Nouvelle-Orléans (Louisiane, USA) est le plus grand stade en taille, mais ne peut recevoir que 97 365 spectateurs lors d'un meeting et 76 791 lors d'un match. Il existe de grands stades dans beaucoup d'autres pays du monde, celui de Prague (République Tchèque à **Starhöv**) peut accueillir 240 milliers de personnes et le célèbre stade **Maracana** au Brésil peut contenir jusqu'à 200 000 spectateurs.

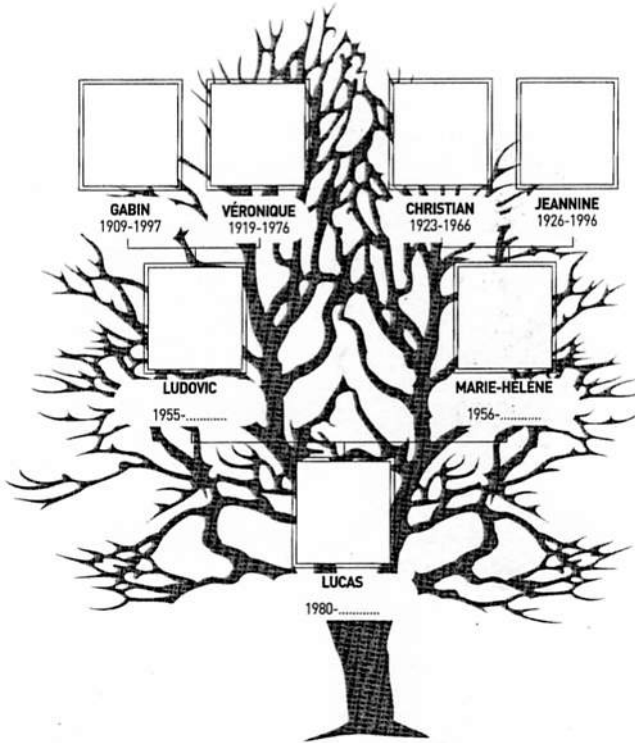


Le Parc des Princes

ph. © Jean-Marc Louhat / Vainysaiff


- ?**
1. Combien le Stade de France peut-il accueillir au maximum de spectateurs de plus que le Parc des Princes ?
 2. Combien le Stade de France peut-il accueillir de spectateurs de moins que celui Starhöv ?
 3. Si lors d'un match de rugby le Stade de France est rempli aux trois quarts, combien y a-t-il de spectateurs environ ?

★★ L'arbre généalogique



1. Quel âge avait Ludovic l'année de la naissance de son fils Lucas ?
2. À quel âge Véronique a-t-elle accouché de Ludovic ?
3. Quels grands-parents Lucas a-t-il connus ? Lesquels n'a-t-il jamais connus ?
4. Jeannine s'est mariée à 29 ans. C'était en quelle année ?
5. Quel âge avait Ludovic quand il a perdu sa mère ?
6. Qui a vécu pendant la Première Guerre mondiale (1914-1918) ?
7. Qui a vécu pendant la Deuxième Guerre mondiale (1939-1945) ?
8. Nous sommes en, quel est (ou quel sera cette année) l'âge de Lucas ?
9. Si Lucas devient "centenaire", en quelle année fêtera-t-il cet anniversaire-là ?
10. À quel âge sont morts chacun des grands-parents de Lucas ?

★ Des panneaux à déchiffrer



Quelle est la distance entre... :

- Nonancourt et Mortagne-au-Perche ?
- Dreux et Verneuil-sur-Avre ?
- Dreux et Mortagne-au-Perche ?
- Verneuil-sur-Avre et Mortagne-au-Perche ?

© Hatier, 2003 - Photocopies autorisées pour une classe seulement.

Voilà. Nous espérons que tout cela vous donnera envie de vous plonger dans des activités liées à la soustraction pour le plus grand bien de vos élèves...