Exercices de ci, de là

Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain)

IREM, Faculté des Sciences,

40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex

ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices :

1) Résoudre dans **R** le système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=0 \\ xyz+xyt+xzt+yzt=0 \\ xyzt=0 \end{cases}$$

Corol'aire n° 27 – janvier 1997

2) Pour quelles valeurs de k le coefficient du binôme de Newton $\binom{2k-1}{k}$ est-il impair ?

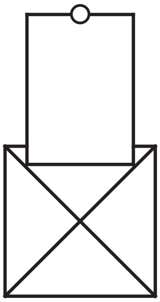
Claude Marcy (Chatellerault) – Corol'aire n° 59 – décembre 2004

3) Soit S le point d'intersection des tangentes extérieures à deux cercles extérieurs. Par S on trace une droite qui coupe les deux cercles en quatre points. Les tangentes en ces quatre points forment un quadrilatère.

Montrer que :

1. ce quadrilatère est un parallélogramme,
2. une de ses diagonales passe par S,
3. l'autre diagonale est l'axe radical des deux cercles.

Miguel Amengual Covas (Mallorca)



4) Lors du séminaire de rentrée de l'IREM de Poitiers, le 16 septembre dernier, Nathalie Chevalarias nous a présenté un outil de menuisier servant à dessiner des ellipses. Cet outil est constitué de deux pièces en bois ; l'une de forme carrée dans laquelle l'artisan a pratiqué deux rainures selon les diagonales ; l'autre de forme rectangulaire dont les deux sommets d'une largeur vont pouvoir coulisser dans les rainures. Un crayon est fixé au milieu de l'autre largeur.
Vous devez savoir aussi que la largeur de la pièce rectangulaire vaut exactement la moitié de la diagonale du carré.
Pourriez-vous montrer simplement que le crayon a effectivement dessiné une ellipse quand la planche rectangulaire a effectué un mouvement complet ?
Nathalie Chevalarias (Saint-Georges Les Baillargeaux) – Corol'aire n° 63 – décembre 2005

Solutions d'exercices du bulletin n° 460 :

Exercice 1 : Résoudre l'équation $x^3 + 3x = a^3 - \dfrac{1}{a^3}$ sans avoir recours à la formule de Cardan, c'est-à-dire en la mettant sous une forme particulière.
(Ch. de Comberousse, Cours de Mathématiques 1923).

Solution d'Albert Marcout (Sainte-Savine)

$$a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right).$$

L'équation s'écrit donc :

$$x^3 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(x - \left(a - \frac{1}{a}\right)\right) = 0.$$

Le premier membre se factorise :

$$\left[x - \left(a - \frac{1}{a}\right)\right]\left\{\left[x^2 + x\left(a - \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2\right] + 3\right\} = 0.$$

Outre la racine $x_1 = a - \dfrac{1}{a}$, l'équation a les racines de l'équation du second degré suivante :

$$x^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 3 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 - 4\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 - 12 = -3\left(\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4\right) = -3\left(a + \frac{1}{a}\right)^2.$$

Les autres racines sont donc :

$$x_2=\frac{-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\mathrm{i}\sqrt{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{2}\quad\text{et}\quad x_3=\frac{-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\mathrm{i}\sqrt{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{2}$$

qu'on peut écrire

$$x_2=\frac{a\left(\mathrm{i}\sqrt{3}-1\right)}{2}+\frac{1}{a}\times\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad x_3=\frac{-a\left(\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{1}{a}\times\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Solutions semblables de Loïc Pomageot (Creil), Georges Lion (Mata Utu - Wallis) et Jean-Claude Carréga (Lyon).

Exercice 2 : Peut-on construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, un triangle équilatéral ABC tel que les coordonnées de A, de B et de C soient des nombres entiers ?

Solution de Bruno Alaplantive (Saint-Jean du Falga)

Triangle équilatéral de coordonnées entières, existes-tu ou pas ?

1. Si tel était le cas, lui ou son double (en longueur) aurait une aire mesurée par un nombre entier de carrés unités. *Soit la formule de Pick, soit simplement le fait de pouvoir lui circonscrire un rectangle du quadrillage.*
2. Si les coordonnées sont entières, alors c^2 – où c désigne la longueur du côté – est entier par Pythagore !
3. On sait par ailleurs que l'aire du triangle équilatéral est donnée par la formule

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

On aurait ainsi $\dfrac{\text{nombre entier}\times\sqrt{3}}{4}=\text{nombre entier.}$

Finalement, si tel était le cas, $\sqrt{3}$ pourrait s'écrire comme quotient de deux entiers…
Ce qui ne saurait être !

Remarque : Sur une feuille A4 à petits carreaux, une base horizontale de 30 carreaux sur une hauteur de 26 carreaux rendent, à vue d'œil !, un splendide triangle équilatéral…

NDLR :

1) Formule de Pick :
« L'aire A d'un polygone de réseau quelconque (sommets de coordonnées entières) est donnée en fonction du nombre de points frontières B et de points intérieurs C par la formule A = B/2 + C − 1. »
Voir en particulier l'excellent livre de Ian Stewart : Visions géométriques (Bibliothèque « Pour la science » / Belin – 1994), page 99.
2) Les autres solutions transmises utilisent soit les nombres complexes et les systèmes : A. Marcout (Sainte-Savine), J.-C. Carréga (Lyon), J. Chayé (Poitiers),

M.A. Covas (Mallorca), R. Vidal (Narbonne), G. Lion (Mata Utu - Wallis), soit la géométrie et la trigonométrie : M. Lahaie-Hitier.

Compléments
Jean-Claude Carréga apporte les précisions suivantes :

1) Même résultat pour un hexagone régulier car, en prenant un sommet sur deux de l'hexagone, on obtient un triangle équilatéral.
2) Même résultat pour un polygone régulier ayant $3n$ côtés
3) En fait, on peut démontrer que le carré est le seul polygone régulier pouvant avoir tous ses sommets à coordonnées rationnelles dans un repère orthonormé.

Robert Vidal signale une solution géométrique, basée sur la descente infinie, de Jean Brette parue dans le nº 276 (mars 2000) de la Revue du Palais de la Découverte.

Exercice 3 : Soit l'équation $x^2 + 2x - 10^{-10} = 0$. À l'aide d'une calculatrice, trouver, avec la meilleure approximation possible, des valeurs approchées des deux racines.
Guy Canevet (Le calcul scientifique - Que sais-je nº 1357).

L'énoncé donné dans le bulletin nº 460 comportait une erreur. Les lecteurs voudront bien nous en excuser. L'équation proposée par Guy Canevet était celle du texte ci-dessus.
Voici les précisions de l'auteur :

« La racine positive de cette équation peut s'écrire $x = \sqrt{1+10^{-10}} - 1$. C'est un nombre très petit qui vaut environ $5 \cdot 10^{-11}$; or, par son expression, il est obtenu en faisant la différence de deux nombres très voisins, $\sqrt{1+10^{-10}}$ d'une part et 1 d'autre part. Si l'on travaille avec une machine ne comportant que dix chiffres significatifs, le résultat peut être complètement erroné. Mais on peut remarquer que cette même racine peut s'écrire $x = \dfrac{10^{-10}}{1+\sqrt{1+10^{-10}}}$. Dans cette formule, on effectue la division de 10^{-10} par un nombre très voisin de 2 : on travaille donc à précision relative constante, et le résultat est correct. »

Guy Canevet

NDLR : Le « Que sais-je » de Guy Canevet aborde beaucoup de questions tant théoriques que pratiques, et, détail important, il est facile et agréable à lire.

Notre collègue *Loïc Pomageot* (Creil) nous a transmis une solution pour l'équation donnée dans le bulletin nº 460 : $x^2 + 2x - 10^{10} = 0$. Il utilise les développements limités de $\sqrt{1+n}$ et trouve les solutions de l'équation à 10^{-42} près. Voici la solution qu'il propose en utilisant la calculatrice.

Tout d'abord $x_1 \approx -1 + \sqrt{10^{10}} = -1 + 10^5 = 99\,999$ (avec une erreur très faible).

À l'aide de la table de valeurs de la calculatrice, on trouve (après affinements successifs) la valeur approchée suivante $x_1 \approx 99\,999{,}000\,005$ (pour laquelle la calculatrice renvoie exactement 0 … mais nous savons que x_1 est irrationnel, donc non décimal !).

Cherchons donc x_1 sous la forme $x_1 = 99\,999 + y_1$ (où $y_1 > 0$).
On a alors :

$$x^2 + 2x - 10^{10} = 99\,999^2 + 199\,998y + y^2 + 199\,998 + 2y - 10^{10} = y^2 + 2\times 10^5 - 1$$

car

$$99\,999^2 = \left(10^5 - 1\right)^2 = 10^{10} - 200\,000 + 1 = 10^{10} - 199\,999$$
$$\Rightarrow 99\,999^2 + 199\,998 - 10^{10} = -1.$$

On doit donc résoudre l'équation $y^2 + 2\times 10^5 y - 1 = 0$.

La solution positive de cette équation est $y_1 = -10^5 + \sqrt{10^{10}+1}$.

On a $y_1 = -10^5 + 10^5\sqrt{1+\dfrac{1}{10^{10}}} \approx -10^5 + 10^5\left(1+\dfrac{1}{2\times 10^{10}}\right) = \dfrac{1}{2\times 10^5} = 5\times 10^{-6}$.

On va donc chercher y_1 sous la forme $y_1 = z_1 \times 10^{-6}$.

Ce qui donne $y^2 + 2\times 10^5 y - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 \times 10^{-12} + 2\times 10^{-1} z - 1 = 0$.

À l'aide de la table de valeurs, on obtient : $z_1 \approx 4{,}999\,999\,999\,87$.

Cherchons z_1 sous la forme : $z_1 = 5 - t_1$.
Ce qui donne :

$$z^2 \times 10^{-12} + 2\times 10^{-1} z - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(25 - 10t + t^2\right)\times 10^{-12} + 1 - 2\times 10^{-1} t - 1 = 0.$$

Après simplification, on doit résoudre

$$t^2 \times 10^{-12} - \left(2\times 10^{-1} + 10^{-11}\right)t + 25\times 10^{-12} = 0.$$

À l'aide de la table de valeurs, on obtient $t_1 \approx 1{,}249\,999\,999\,937 \times 10^{-10}$.
Finalement, on a :

$$z_1 = 5 - t_1 \approx 5 - 0{,}000\,000\,000\,124\,999\,999\,993\,7$$
$$= 4{,}999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$

D'où

$$x_1 \approx 99\,999 + 4{,}999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3 \times 10^{-6}$$
$$= 99\,999{,}000\,004\,999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$

Ensuite, on a

$$x_2 \approx -100\,001{,}000\,004\,999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$