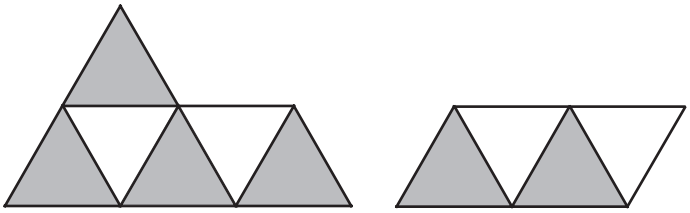
# Les problèmes de l'APMEP

## Solution

**Énoncé nº 305 (Pierre DUCHET, 75-Paris)**

En appelant « sphinx » et « parallélogramme » les deux formes que voici :

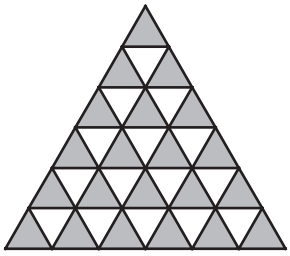


a) Peut-on paver complètement un triangle équilatéral, de côté $n$, avec des sphinx ?

b) Combien peut-on placer (au maximum) de parallélogrammes à l'intérieur d'un hexagone régulier de côté $n$ ?

Dans les deux cas, les pièces ne doivent pas se recouvrir. Elles peuvent être pivotées et retournées.

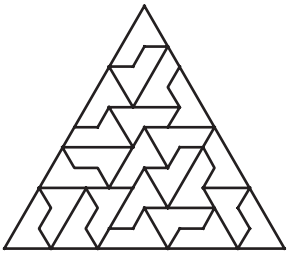
**SOLUTION**



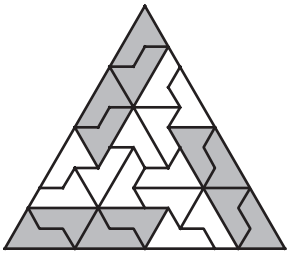
Un triangle $T_n$, de côté $n$, $n^2$ fois plus grand qu'un triangle unité (de côté 1), contient $n^2$ triangles unités, dont $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ triangles pointes en haut (orientés dans le même sens que $T_n$) et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ triangles pointes en bas (orientés différemment).
Or chaque sphinx couvre 6 triangles unités, dont 4 orientés dans un sens et 2 orientés dans l'autre. Pour que $T_n$ soit pavable par des sphinx, non seulement $n^2$ doit être multiple de 6, soit $n = 6k$, mais $\dfrac{n(n+1)}{2}=3k(6k+1)$ doit être pair, donc $k$ lui aussi pair. Il est donc nécessaire que $n$ soit multiple de 12, et réciproquement, si $n$ est multiple de 12, $T_n$ étant pavable par des triangles $T_{12}$, il suffit de trouver un pavage du triangle $T_{12}$ pour prouver que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Pierre Duchet et moi tenions le stand commun MATh.en.JEANS - Animath lorsqu'il m'a soumis ce problème. Les élèves qui l'ont cherché ont compté le nombre de triangles unités, dans des cas particuliers, sans remarquer que $T_n$ était $n^2$ fois plus grand qu'un triangle unité. La difficulté était le cas $n = 6$ ; un père a dit à son fils d'une dizaine d'années : « on ne bouge pas d'ici tant que tu n'as pas trouvé ». Pour

$n = 12$, Pierre Jullien et Pierre Bornsztein proposent le même pavage, invariant par rotation de 120°, mais Michel Lafond en trouve un autre.



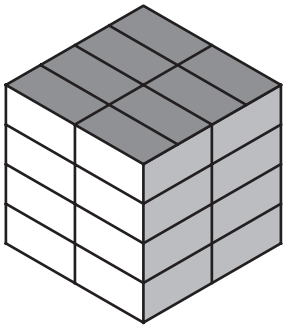
Pavage de Michel Lafond



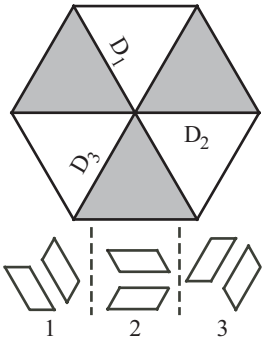
Pavage de Pierre Bornsztein et Pierre Julien

Les problèmes de pavage sont généralement solubles par des coloriages. Pour cette première question, on n'avait guère le choix, les trois solutions justes reçues sont identiques. Mais pour la seconde question, Pierre Bornsztein et moi proposons des solutions en noir et blanc (pardon : en rouge et bleu pour Pierre Bornsztein) alors que Michel Lafond et Pierre Jullien préfèrent la quadrichromie.

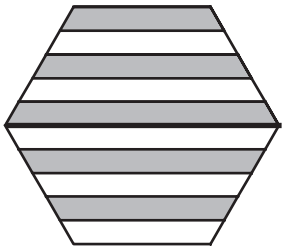
Il est clair pour tout le monde que, le quadrilatère couvrant quatre triangles alors que l'hexagone de côté $n$ (réunion de 6 triangles équilatéraux de côté $n$) en couvre $6n^2$, le pavage de tout l'hexagone n'est possible que si $n$ est pair : en divisant l'hexagone en trois losanges (qui peuvent être vus comme trois faces d'un cube en perspective), il est facile de réaliser un pavage dans ce cas. Lorsque $n$ est impair, $6n^2$ n'étant pas divisible par 4, au moins deux cases (triangles unités) ne seront pas couvertes, et tout le problème consiste à prouver qu'en réalité, 6 cases au moins ne seront pas couvertes.



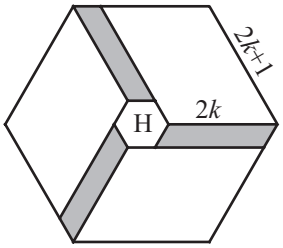
Pierre Bornsztein distingue trois types de parallélogrammes, 1, 2 et 3 selon que leur grand côté est parallèle à l'une des trois grandes diagonales $D_1$, $D_2$ et $D_3$. Comme les nombres $k_1$, $k_2$ et $k_3$ de parallélogrammes de chaque type ne peuvent pas être de trois parités distinctes, on peut supposer, par exemple, que $k_1$ et $k_3$ sont de même parité. On découpe alors l'hexagone en bandes parallèles à $D_2$, larges d'une case, alternativement bleues et rouges : ces bandes s'échangent par symétrie par rapport à $D_2$, il y a donc $3n^2$ cases bleues et $3n^2$ cases rouges. Chaque parallélogramme de type 1 ou 3 couvre obligatoirement deux cases rouges et deux cases bleues, donc ces deux



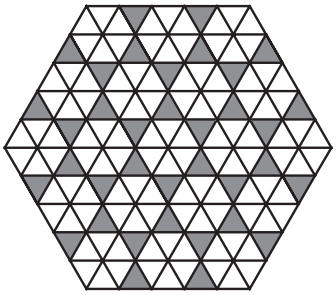
types réunis couvrent $2(k_1 + k_3)$ cases rouges et autant de cases bleues : comme $k_1$ et $k_3$ sont de même parité, $2(k_1 + k_3)$ est multiple de 4. Chaque parallélogramme de type 2 couvre soit quatre cases rouges, soit quatre cases bleues. Donc le nombre de cases rouges couvertes par l'ensemble des parallélogrammes est multiple de 4, et comme $3n^2$ est congru à 3 modulo 4, il y a au moins 3 cases rouges non couvertes. De même, il y a au moins 3 cases bleues non couvertes, donc en tout 6 cases au moins non couvertes.



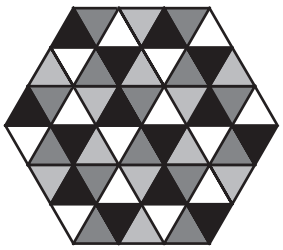
Trouver un pavage de l'hexagone moins 6 cases n'est pas difficile : si $n = 2k + 1$, on peut isoler un hexagone central H de côté 1 (non couvert) et diviser le reste en trois bandes de grand côté $2k$ et trois losanges de côtés $2k$ et $(2k + 1)$, facilement pavables. Appelons P ce pavage.




L'autre approche du problème, assez différente, fait appel au coloriage que voici. Comme dans toute bande (large d'une case) parallèle à une grande diagonale, une case sur quatre est noire, chaque parallélogramme (nécessairement inclus dans une telle bande) contient une et une seule case noire : il y a donc autant de cases noires couvertes que de parallélogrammes. Or le pavage P couvre toutes les cases noires : on ne peut pas en couvrir davantage, donc on ne peut pas placer davantage de parallélogrammes, d'où, en définitive, on ne peut pas couvrir davantage de cases. Quel que soit le pavage, 6 cases au moins seront non couvertes.



J'étais très fier de cette démonstration jusqu'à ce que Pierre Jullien et Michel Lafond en proposent une très voisine, mais en quadrichromie. Le coloriage ci-contre – obtenu en faisant basculer, proprement mais dans tous les sens, sur notre triangulation de l'hexagone un tampon encreur tétraédrique – est tel que le parallélogramme (qui est un patron plan du tétraèdre), quelle que soit sa position, couvre une case de chaque couleur. Le pavage P prouve que dans l'hexagone de côté $n$ privé de H (les six cases centrales), il y a autant de cases de chaque couleur. Comme une couleur n'est pas présente dans H, l'hexagone contient $\frac{6n^2-6}{4}$ cases de cette couleur et $\frac{6n^2+2}{4}$ cases de chacune des



trois autres couleurs. Quel que soit le pavage, celui-ci couvre donc au plus $(6n^2 - 6)$ cases.

Ces deux dernières démonstrations s'appliquent au pavage de l'hexagone régulier de côté $2k + 1$ par des triangles équilatéraux de côté 2 : au moins 6 cases seront non couvertes. Mais dans ce dernier cas, existe-t-il des pavages où moins de 14 cases sont non couvertes ?

# Exercices de ci, de là

*Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.*

Serge PARPAY

*Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :*
*APMEP (Groupe du Clain)*
*IREM, Faculté des Sciences,*
*40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex*
*ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr*

## Exercices :

1) Résoudre dans **R** le système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=0 \\ xyz+xyt+xzt+yzt=0 \\ xyzt=0 \end{cases}$$

*Corol'aire nº 27 – janvier 1997*

2) Pour quelles valeurs de $k$ le coefficient du binôme de Newton $\binom{2k-1}{k}$ est-il impair ?

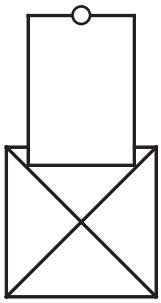
*Claude Marcy (Chatellerault) – Corol'aire nº 59 – décembre 2004*

3) Soit S le point d'intersection des tangentes extérieures à deux cercles extérieurs. Par S on trace une droite qui coupe les deux cercles en quatre points. Les tangentes en ces quatre points forment un quadrilatère.
Montrer que :

1. ce quadrilatère est un parallélogramme,
2. une de ses diagonales passe par S,
3. l'autre diagonale est l'axe radical des deux cercles.

*Miguel Amengual Covas (Mallorca)*

4) Lors du séminaire de rentrée de l'IREM de Poitiers, le 16 septembre dernier, Nathalie Chevalarias nous a présenté un outil de menuisier servant à dessiner des ellipses. Cet outil est constitué de deux pièces en bois ; l'une de forme carrée dans laquelle l'artisan a pratiqué deux rainures selon les diagonales ; l'autre de forme rectangulaire dont les deux sommets d'une largeur vont pouvoir coulisser dans les rainures. Un crayon est fixé au milieu de l'autre largeur.



Vous devez savoir aussi que la largeur de la pièce rectangulaire vaut exactement la moitié de la diagonale du carré.
Pourriez-vous montrer simplement que le crayon a effectivement dessiné une ellipse quand la planche rectangulaire a effectué un mouvement complet ?
*Nathalie Chevalarias (Saint-Georges Les Baillargeaux) – Corol'aire nº 63 – décembre 2005*

## Solutions d'exercices du bulletin nº 460 :

**Exercice 1** : Résoudre l'équation $x^3+3x=a^3-\dfrac{1}{a^3}$ sans avoir recours à la formule de Cardan, c'est-à-dire en la mettant sous une forme particulière.
*(Ch. de Comberousse, Cours de Mathématiques 1923).*

**Solution d'Albert Marcout (Sainte-Savine)**

$$a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

L'équation s'écrit donc :

$$x^3-\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(x-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right)=0.$$

Le premier membre se factorise :

$$\left[x-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]\left\{\left[x^2+x\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right]+3\right\}=0.$$

Outre la racine $x_1=a-\dfrac{1}{a}$, l'équation a les racines de l'équation du second degré suivante :

$$x^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)x+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+3=0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a-\frac{1}{a}\right)^2-12=-3\left(\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right)=-3\left(a+\frac{1}{a}\right)^2.$$

Les autres racines sont donc :

$$x_2 = \frac{-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\mathrm{i}\sqrt{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{2} \text{ et } x_3 = \frac{-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\mathrm{i}\sqrt{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{2}$$

qu'on peut écrire

$$x_2 = \frac{a\left(\mathrm{i}\sqrt{3}-1\right)}{2}+\frac{1}{a}\times\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_3 = \frac{-a\left(\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{1}{a}\times\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Solutions semblables de Loïc Pomageot (Creil), Georges Lion (Mata Utu - Wallis) et Jean-Claude Carréga (Lyon).

**Exercice 2 :** Peut-on construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, un triangle équilatéral ABC tel que les coordonnées de A, de B et de C soient des nombres entiers ?

**Solution de Bruno Alaplantive (Saint-Jean du Falga)**

Triangle équilatéral de coordonnées entières, existes-tu ou pas ?

1. Si tel était le cas, lui ou son double (en longueur) aurait une aire mesurée par un nombre entier de carrés unités. *Soit la formule de Pick, soit simplement le fait de pouvoir lui circonscrire un rectangle du quadrillage.*
2. Si les coordonnées sont entières, alors $c^2$ – où $c$ désigne la longueur du côté – est entier par Pythagore !
3. On sait par ailleurs que l'aire du triangle équilatéral est donnée par la formule

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

On aurait ainsi $\dfrac{\text{nombre entier}\times\sqrt{3}}{4} = \text{nombre entier.}$

Finalement, si tel était le cas, $\sqrt{3}$ pourrait s'écrire comme quotient de deux entiers…
**Ce qui ne saurait être !**

*Remarque* : Sur une feuille A4 à petits carreaux, une base horizontale de 30 carreaux sur une hauteur de 26 carreaux rendent, à vue d'œil !, un splendide triangle équilatéral…

**NDLR :**

1) Formule de Pick :
« L'aire A d'un polygone de réseau quelconque (sommets de coordonnées entières) est donnée en fonction du nombre de points frontières B et de points intérieurs C par la formule A = B/2 + C − 1. »
Voir en particulier l'excellent livre de Ian Stewart : Visions géométriques (Bibliothèque « Pour la science » / Belin – 1994), page 99.
2) Les autres solutions transmises utilisent soit les nombres complexes et les systèmes : A. Marcout (Sainte-Savine), J.-C. Carréga (Lyon), J. Chayé (Poitiers),

M.A. Covas (Mallorca), R. Vidal (Narbonne), G. Lion (Mata Utu - Wallis), soit la géométrie et la trigonométrie : M. Lahaie-Hitier.

*Compléments*

Jean-Claude Carréga apporte les précisions suivantes :

1) Même résultat pour un hexagone régulier car, en prenant un sommet sur deux de l'hexagone, on obtient un triangle équilatéral.
2) Même résultat pour un polygone régulier ayant $3n$ côtés
3) En fait, on peut démontrer que le carré est le seul polygone régulier pouvant avoir tous ses sommets à coordonnées rationnelles dans un repère orthonormé.

Robert Vidal signale une solution géométrique, basée sur la descente infinie, de Jean Brette parue dans le nº 276 (mars 2000) de la Revue du Palais de la Découverte.

**Exercice 3 :** Soit l'équation $x^2 + 2x - 10^{-10} = 0$. À l'aide d'une calculatrice, trouver, avec la meilleure approximation possible, des valeurs approchées des deux racines. Guy Canevet (Le calcul scientifique - Que sais-je nº 1357).

L'énoncé donné dans le bulletin nº 460 comportait une erreur. Les lecteurs voudront bien nous en excuser. L'équation proposée par Guy Canevet était celle du texte ci-dessus.

Voici les précisions de l'auteur :

« La racine positive de cette équation peut s'écrire $x = \sqrt{1+10^{-10}} - 1$. C'est un nombre très petit qui vaut environ $5 \cdot 10^{-11}$ ; or, par son expression, il est obtenu en faisant la différence de deux nombres très voisins, $\sqrt{1+10^{-10}}$ d'une part et 1 d'autre part. Si l'on travaille avec une machine ne comportant que dix chiffres significatifs, le résultat peut être complètement erroné. Mais on peut remarquer que cette même racine peut s'écrire $x = \dfrac{10^{-10}}{1+\sqrt{1+10^{-10}}}$. Dans cette formule, on effectue la division de $10^{-10}$ par un nombre très voisin de 2 : on travaille donc à précision relative constante, et le résultat est correct. »

Guy Canevet

NDLR : Le « Que sais-je » de Guy Canevet aborde beaucoup de questions tant théoriques que pratiques, et, détail important, il est facile et agréable à lire.

Notre collègue *Loïc Pomageot* (Creil) nous a transmis une solution pour l'équation donnée dans le bulletin nº 460 : $x^2 + 2x - 10^{10} = 0$. Il utilise les développements limités de $\sqrt{1+n}$ et trouve les solutions de l'équation à $10^{-42}$ près. Voici la solution qu'il propose en utilisant la calculatrice.

Tout d'abord $x_1 \approx -1 + \sqrt{10^{10}} = -1 + 10^5 = 99\,999$ (avec une erreur très faible).

À l'aide de la table de valeurs de la calculatrice, on trouve (après affinements successifs) la valeur approchée suivante $x_1 \approx 99\,999{,}000\,005$ (pour laquelle la calculatrice renvoie exactement 0 … mais nous savons que $x_1$ est irrationnel, donc non décimal !).

Cherchons donc $x_1$ sous la forme $x_1 = 99\,999 + y_1$ (où $y_1 > 0$).
On a alors :

$$x^2 + 2x - 10^{10} = 99\,999^2 + 199\,998y + y^2 + 199\,998 + 2y - 10^{10} = y^2 + 2\times 10^5 - 1$$

car

$$99\,999^2 = \left(10^5 - 1\right)^2 = 10^{10} - 200\,000 + 1 = 10^{10} - 199\,999$$
$$\Rightarrow 99\,999^2 + 199\,998 - 10^{10} = -1.$$

On doit donc résoudre l'équation $y^2 + 2\times 10^5 y - 1 = 0$.

La solution positive de cette équation est $y_1 = -10^5 + \sqrt{10^{10} + 1}$.

On a $y_1 = -10^5 + 10^5\sqrt{1 + \dfrac{1}{10^{10}}} \approx -10^5 + 10^5\left(1 + \dfrac{1}{2\times 10^{10}}\right) = \dfrac{1}{2\times 10^5} = 5\times 10^{-6}$.

On va donc chercher $y_1$ sous la forme $y_1 = z_1 \times 10^{-6}$.

Ce qui donne $y^2 + 2\times 10^5 y - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 \times 10^{-12} + 2\times 10^{-1} z - 1 = 0$.

À l'aide de la table de valeurs, on obtient : $z_1 \approx 4{,}999\,999\,999\,87$.
Cherchons $z_1$ sous la forme : $z_1 = 5 - t_1$.
Ce qui donne :

$$z^2 \times 10^{-12} + 2\times 10^{-1} z - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(25 - 10t + t^2\right)\times 10^{-12} + 1 - 2\times 10^{-1} t - 1 = 0.$$

Après simplification, on doit résoudre

$$t^2 \times 10^{-12} - \left(2\times 10^{-1} + 10^{-11}\right)t + 25\times 10^{-12} = 0.$$

À l'aide de la table de valeurs, on obtient $t_1 \approx 1{,}249\,999\,999\,937\times 10^{-10}$.
Finalement, on a :

$$z_1 = 5 - t_1 \approx 5 - 0{,}000\,000\,000\,124\,999\,999\,993\,7$$
$$= 4{,}999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$

D'où

$$x_1 \approx 99\,999 + 4{,}999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3\times 10^{-6}$$
$$= 99\,999{,}000\,004\,999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$

Ensuite, on a

$$x_2 \approx -100\,001{,}000\,004\,999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$