La démonstration par Argand du théorème fondamental de l'algèbre

Odile Kouteynikoff(*)

Résumé : *L'idée qu'une équation polynomiale de degré n ait exactement n racines ne pouvait pas émerger avant que les racines négatives et les racines imaginaires ne soient jugées acceptables. Argand publie au début du XIXe siècle un traité décisif pour valider leur existence mathématique. Grâce à sa méthode des lignes dirigées, en lesquelles le lecteur moderne peut reconnaître des ancêtres des vecteurs, Argand donne une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre qui a le mérite d'être simple parce qu'elle se voit. Il se réjouit que la géométrie ait montré le chemin de calculs difficiles.*

Le théorème fondamental de l'algèbre

Il existe plusieurs formulations de ce résultat, qui sont classiquement équivalentes :

[A] Tout polynôme sur **C** de degré n est le produit de n facteurs du premier degré, distincts ou non.

[B] Tout polynôme sur **C** (sur **R** en particulier) admet au moins une racine dans **C**.

[C] Tout polynôme sur **R** est le produit de polynômes sur **R** de degré un ou deux au plus.

L'idée qu'une équation polynomiale de degré n ait exactement n racines ne pouvait pas émerger avant que l'on n'envisage comme recevables les racines négatives, puis les racines imaginaires, et la propriété ne pouvait non plus être démontrée complètement ni avant que les nombres imaginaires n'acquièrent un statut d'objets mathématiques non contesté, ni même avant que les nombres réels eux-mêmes ne fassent l'objet d'une construction axiomatique dans la seconde moitié du XIX^e siècle.

Le petit ouvrage du mathématicien suisse Jean-Robert Argand (1762-1822), *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Paris, 1806), est décisif pour la visualisation des nombres imaginaires dans le plan et donc pour la validation de leur existence mathématique effective. L'auteur en déduit une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre qui atteste de l'efficacité de son invention. Cette démonstration a le mérite d'être simple, puisqu'elle « se voit » dans le plan, et l'originalité efficace d'être la première à établir le théorème pour un polynôme à coefficients imaginaires.

(*) Groupe M.:A.T.H. de l'IREM de Paris VII.

Quelques études remarquables ayant précédé celle d'Argand

Albert Girard

Le géomètre flamand Albert Girard (1595-1632) publie à Amsterdam en 1629 un ouvrage (réédité à Leyde en 1884) dont le titre complet informe sur ses préoccupations :

> *Invention nouvelle en l'algèbre, PAR ALBERT GIRARD MATHÉMATICIEN. Tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de cette divine science.*

Girard énonce sans démonstration que toutes les équations d'algèbre, excepté les équations incomplètes dans un premier temps (c'est-à-dire celles dont les coefficients ne sont pas tous non nuls), ont autant de solutions que le degré du polynôme le montre. Il explique que les coefficients du polynôme réduit ordonné sont égaux respectivement,

le premier à l'opposé de la somme de toutes les racines,
le second à la somme de tous leurs produits deux à deux,
le troisième à l'opposé de la somme de tous les produits trois à trois,
jusqu'au dernier qui est égal au produit de toutes les racines ou à son opposé, selon la parité du degré du polynôme.

Il précise ensuite que les résultats précédents restent vrais pour les équations incomplètes à la condition d'introduire des zéros à la place des coefficients manquants.

Le théorème de Girard a une double conséquence :

1. Il est normal d'accepter les solutions négatives des équations.

Ainsi l'équation $x^3 = 300x + 432$ admet les trois solutions 18, $-9+\sqrt{57}$ et $-9-\sqrt{57}$ et l'équation $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 24$ admet les quatre solutions 1, 2, –3 et 4.

Comme réponse à la question : « à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a », Girard avance une explication dont l'intérêt a, depuis, été confirmé :

« La solution par moins s'explique en Geometrie en rétrogradant, & le moins recule, là où le + avance ».

2. Il est également normal d'accepter les « solutions impossibles » des équations.

Ainsi l'équation $x^4 = 4x - 3$ admet les quatre solutions 1, 1, $-1+\sqrt{-2}$ et $-1-\sqrt{-2}$.

À la question : « *à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il ny a point d'autre solutions, & pour son utilité* »

Pour appuyer ces affirmations, Girard reprend chez ses prédécesseurs fameux plusieurs exemples de résolution dont il pointe les solutions oubliées et pour lesquels il souligne les certitudes que sa règle apporte :

Pour l'équation $x^3 = 6x^2 - 12x + 8$ dont la résolution par Simon Stevin (*Arithmétique*, 1585) conduit à la solution 2, Girard, lui, donne les solutions 2, 2, 2, en étant sûr qu'il n'en omet aucune.

Pour l'équation $x^3 = 7x - 6$ dont Stevin donne les solutions 2 et 1, Girard ajoute qu'il y a aussi la solution −3.

De même, pour l'équation $124x - x^3 = 240$ résolue par François Viète, qui ne donne jamais que les solutions positives (*Art analytique, v. De Recognitione Æquationum*, ~1600), Girard indique que, outre les solutions 2 et 10, il y a aussi la solution −12.

Il conclut en ces termes :
Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, seu qu'il y en a qui sont plus que rien ; d'autres moins que rien ; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$ *, comme des* $\sqrt{-3}$ *, ou autres nombres semblables.*

Après les travaux des algébristes italiens sur la résolution algébrique des équations de degré 3 et 4, particulièrement de Jérôme Cardan (*Ars magna*, 1545), de son élève Ludovico Ferrari (1522-1565) et de Raffaele Bombelli (*Algebra*, 1572), les mathématiciens avaient admis que l'on peut calculer avec ces nombres fictifs, racines de nombres négatifs, dont l'intérêt pratique est indéniable. Girard franchit la nouvelle étape importante, seulement esquissée par Cardan, qui consiste à ouvrir aussi le champ des solutions algébriques recevables et pas seulement celui des nombres avec lesquels on peut calculer. Il a, pour la théorie des équations algébriques à laquelle il contribue, l'intuition du champ aux contours encore incertains dans lequel les équations algébriques de degré n ont n racines.

René Descartes (1596-1650) n'énonce pas de résultats différents dans sa *Géométrie* publiée en 1637. Il introduit le terme « imaginaire » pour désigner les « solutions enveloppées » de Girard et il écrit :
Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est à dire de valeurs de cette quantité. […] Mais souvent il arrive, que quelques unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien [IV, p. 158].
Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine [IV, p. 174].

Un siècle et demi de questionnements

Pendant plus d'un siècle, la situation est donc la suivante.

D'une part, les mathématiciens calculent efficacement avec les symboles $a + b\sqrt{-1}$ où a et b sont réels et où $\sqrt{-1}$ désigne l'opération impossible qu'est l'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif. D'autre part l'existence, pour une équation de degré n, de n racines réelles ou de type imaginaire s'installe comme une évidence. La question qui se pose alors est celle de la nature des racines qu'on nomme imaginaires. Y a-t-il des racines à imaginer autres que les $a+b\sqrt{-1}$ apparues lors de la résolution des équations quadratiques ?

Jean Prestet (*Nouveaux Elemens des mathematiques*, Paris, 1689) pourrait le penser, qui échoue dans sa tentative de résolution de l'équation $z^4+a^4=0$, parce qu'il se heurte au problème de l'extraction d'une racine carrée de racine de grandeur négative.

Jean Bernoulli (1667-1748) lui, qui, dans le cadre de ses recherches sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, réussit la factorisation du polynôme $z^4+a^4=0$ en le produit $\left(z^2-\sqrt{2}az+a^2\right)\left(z^2+\sqrt{2}az+a^2\right)$, acquiert l'intuition du théorème fondamental de l'algèbre.

Ainsi la conviction se répand chez les mathématiciens que les racines imaginaires sont bien de la forme $a+b\sqrt{-1}$, comme le sont les racines des équations quadratiques, et c'est le résultat auquel s'attachent presque toutes les démonstrations du théorème fondamental, élaborées au cours du XVIII^{e} siècle, sans que soit remis en cause le principe admis de l'existence de n racines réelles ou imaginaires pour un polynôme de degré n.

Leonhard Euler (1706-1783) présente deux tentatives de démonstrations, l'une et l'autre algébriques, dans l'article « Recherches sur les racines imaginaires des équations », écrit dès 1746 et publié, en 1749 seulement, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Ces démonstrations contiennent beaucoup d'idées qui seront exploitées par ses successeurs.

Euler explique que toute équation algébrique peut être ramenée à la forme :

$$x^n+\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}+\mathrm{C}x^{n-3}+\mathrm{D}x^{n-4}+\ldots+\mathrm{N}=0,$$

où A, B, C, D, … , N désignent des constantes (réelles) positives, négatives, ou nulles, que chercher les racines de l'équation revient à chercher les facteurs simples du polynôme, et qu'il y en a n puisque le produit

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)\ \text{\&c}$$

doit redonner le polynôme proposé de degré n.

Il utilise alors une méthode de coefficients indéterminés pour démontrer que toute équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, se résout en des facteurs réels de degré 1 ou 2. La démonstration comporte des insuffisances dont il a peut-être l'intuition partielle, puisqu'il propose lui-même une seconde démonstration.

Celle-ci consiste à établir, par des calculs bien maîtrisés sur les imaginaires de la forme $\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1}$, que, si l'on connaissait des formules de résolution par radicaux opérant sur les coefficients pour toutes les équations algébriques, comme c'est déjà le cas pour celles de degré inférieur ou égal à quatre, les calculs prescrits par ces formules (additions, soustractions, multiplications, divisions et extractions de racines d'un degré quelconque) conduiraient tous à des résultats de la forme $\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1}$, M et N étant des nombres réels.

Il revient à Carl Friedrich Gauss (1777-1855) d'être le premier, en 1799, à dénoncer dans sa thèse de doctorat la faute logique qui consiste à admettre l'existence de *n* racines avec lesquelles on sait calculer pour prouver qu'elles sont toutes de la forme $a+b\sqrt{-1}$, alors qu'on ne pourrait pas s'autoriser les mêmes calculs sur des formes qu'on viendrait à imaginer autres.

Gauss produit alors la première des quatre démonstrations différentes qu'il consacrera successivement au théorème fondamental de l'algèbre. Lui élabore une démonstration de l'existence des *n* racines, en mobilisant des arguments topologiques, logiquement indépendants de, mais vraisemblablement déjà sous-tendus par, la visualisation des nombres imaginaires dans le plan, dont il ne publiera le principe qu'en 1831. Il utilise, entre autres, la propriété intuitivement évidente qu'une fonction continue doit s'annuler quand elle change de signe. C'est la lecture de cette démonstration encore imparfaite qui, en 1817, incitera Bernhard Bolzano (1781-1848) à entreprendre les travaux arithmétiques rigoureux devant aboutir au théorème des valeurs intermédiaires.

La démonstration de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), écrite dès 1746, et celle d'Argand dont la première version date de 1806 se distinguent de celles précédemment présentées par le caractère résolument analytique de leur démarche et par le choix de la formulation [B] qui s'y attache. Voici ce qu'écrit d'Alembert :

Soit un multinome quelconque $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+fx+g$, *tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui etant substituée à la place de x, y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p+q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de x, et qui rendra ce multinome egal à zero* [I, p.].

Grâce au choix de cette formulation et bien que, à l'instar des autres mathématiciens du XVIII^e siècle, il ne remette pas en question le principe de l'existence des *n* racines, d'Alembert élabore une démonstration qui a le mérite de ne pas requérir ce postulat implicite. Il utilise des arguments topologiques et des sommations de séries convergentes qui, certes, conduisent à des imperfections inévitables à son époque (les résultats sur les nombres réels sont encore à venir) mais présentent un intérêt certain relevé par Gauss lui-même.

Dans le même esprit, Argand énonce en 1806 :

On se propose, dans ce dernier article, de démontrer que tout polynôme de la forme $\mathrm{X}^m+a\mathrm{X}^{m-1}+b\mathrm{X}^{m-2}+\ldots+f\mathrm{X}+g$ *est décomposable en facteurs du premier degré* X + *a. Il faut observer que les lettres a, b, …, g ne sont point restreintes ici à ne représenter que des nombres primes (c'est-à-dire des nombres réels, comme la suite de l'étude va le faire apparaître) comme cela a lieu à l'ordinaire. On sait que la question se réduit à prouver qu'on peut toujours trouver un nombre qui, pris pour* X, *rende égal à zéro le polynôme proposé, que nous faisons* = Y [II, p. 58].

Et lui conteste explicitement, dans l'introduction de son traité de 1814, le présupposé selon lequel : « si une question dans laquelle il s'agit de déterminer une inconnue peut être résolue de n manières elle doit conduire à une équation de degré n ».

Le succès d’Argand tient donc à deux points principaux, le choix qu’il fait de démontrer la propriété [B], et la possibilité toute nouvelle qu’il se donne de considérer un polynôme à coefficients imaginaires qui ne soit pas un objet dépourvu de sens.

Il maîtrise le champ, dont Girard avait l’intuition, à l’intérieur duquel toute équation de degré n admet n racines.

L’invention d’Argand

L’historique

On sait peu de choses de la vie de Jean-Robert Argand, né à Genève le 18 juillet 1768, longtemps libraire à Paris où il mourut le 13 août 1822. Il n’appartenait à aucun cercle mathématique avant 1813 et le travail qui l’a finalement rendu célèbre aurait pu passer définitivement inaperçu sans des circonstances anecdotiques, intéressantes à relater quand on prête attention aux conditions de diffusion des inventions, au rôle des courriers et des revues, à l’importance de la notoriété des auteurs.

Argand publie, en 1806, sans nom d’auteur, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, et le petit livre passe inaperçu malgré l’originalité et l’importance pratique et théorique de l’invention qu’il contient, la méthode des « lignes dirigées ». En 1813, Jacques-Frédéric Français (1775-1833), qui publie *Nouveaux principes de Géométrie de position et interprétation géométrique des symboles imaginaires* dans les Annales de mathématiques pures et appliquées [VII, t. IV, p. 61-71], termine son article en indiquant avec honnêteté qu’il a trouvé ces idées nouvelles dans une lettre d’Adrien Marie Legendre (1752-1813) à son frère décédé. Ne revendiquant pour lui-même que l’amélioration des notations et la valeur démonstrative de la nouvelle présentation, Français exprime le souhait que se fasse connaître le premier auteur, dont Legendre a eu la communication. Des discussions s’engagent alors, dans le cadre du journal, entre François-Joseph Servois (1767-1847), Joseph Gergonne (1771-1859), Français et Argand lui-même. Elles donnent lieu à deux nouvelles publications d’Argand : en 1813, sous le même titre, un résumé de l’essai de 1806, augmenté de plusieurs applications [VII, t. IV, p. 133-147], et en 1814, *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d’une application à la démonstration d’un théorème d’analyse* [VII, t. V, p. 197-209].

La méthode des lignes dirigées

La méthode des « lignes dirigées » qu’invente Argand repose particulièrement sur deux points importants que sont la notion de moyenne proportionnelle et la redécouverte des nombres négatifs comme des nombres imaginaires particuliers. Argand ouvre un champ géométrique dans lequel il introduit, en même temps qu’une généralisation de l’idée de quantité, une extension des définitions des opérations sur ces quantités. Les expressions imaginaires, qui étaient jusqu’alors des résultats d’opérations « impossibles », deviennent visuellement compréhensibles, et se trouvent ainsi reliées au réel. Elles peuvent, à ce titre, accéder au statut incontesté d'objets mathématiques [Voir aussi VIII, p. 198-216].

Pour la présentation qui suit, nous nous référons à l'essai de 1806 dont l'exposé et les figures sont clairs.

Les lignes dirigées comme moyennes proportionnelles

Fig. 1

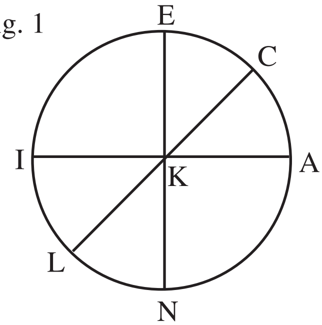
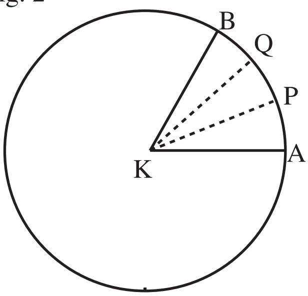


Fig. 2



Argand fixe un point K et adopte comme unité positive la ligne KA, dirigée de K vers A, notée $\overline{\text{KA}}$ pour la distinguer de la « grandeur absolue » KA. L'unité négative est alors la « ligne dirigée » $\overline{\text{KI}}$ (Fig. 1).

L'égalité $(+1)^2 = (-1)^2$, qui s'écrit aussi $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$, peut se lire « +1 est à −1 ce que −1 est à +1 », ou encore « la direction de $\overline{\text{KA}}$ est à la direction de $\overline{\text{KI}}$ ce que la direction de $\overline{\text{KI}}$ est à la direction de $\overline{\text{KA}}$ ». L'introduction de la notion de direction modifie le point de vue sur les nombres négatifs.

Si l'on cherche alors une quantité x vérifiant $x^2 = -1$, soit $\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$, qu'il faut donc chercher en dehors de la droite réelle, la condition est remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes, dirigée de K vers E, et notée $\overline{\text{KE}}$. En effet, la ligne dirigée $\overline{\text{KA}}$ est à la ligne dirigée $\overline{\text{KE}}$ ce que la ligne dirigée $\overline{\text{KE}}$ est à la ligne dirigée $\overline{\text{KI}}$. Et cette condition est aussi remplie par la ligne dirigée $\overline{\text{KN}}$. Les lignes dirigées $\overline{\text{KE}}$ et $\overline{\text{KN}}$ sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

Pour insérer à nouveau une moyenne proportionnelle entre les lignes $\overline{\text{KA}}$ et $\overline{\text{KE}}$, il suffit de tracer CKL qui divise l'angle AKE en deux parties égales. Les lignes $\overline{\text{KC}}$ et $\overline{\text{KL}}$ répondent à la question.

Et si l'on veut insérer deux moyennes proportionnelles $\overline{\text{KP}}$ et $\overline{\text{KQ}}$ entre deux quantités données $\overline{\text{KA}}$ et $\overline{\text{KB}}$ (Fig. 2), il suffit pour les définir d'écrire, en utilisant les notations d'Argand, que

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB} \quad \text{soit} \quad 3 \times \text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{AKB},$$

et le problème admet trois solutions construites par Argand (Fig. 2, 2 bis et 2 ter).

Fig. 2 *bis*

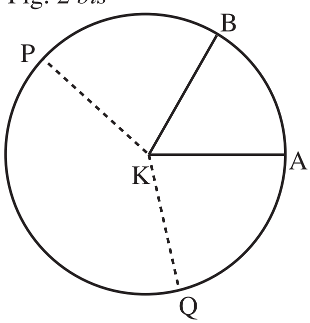
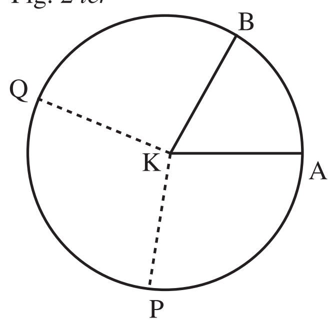


Fig. 2 *ter*



Les trois espèces de lignes dirigées

Argand montre que la quantité $\overline{KA}$ est indépendante du point origine K qui la fixe et choisit d'appeler plus généralement « ligne dirigée » une ligne caractérisée par une longueur, une direction et un sens, sans origine précisée. Il distingue les lignes dirigées qui sont des unités de celles qui n'en sont pas. Ces dernières peuvent s'écrire comme produit d'une ligne dirigée unité par un réel positif qui est leur grandeur absolue :

$$\overline{KN} = KN \cdot \overline{KA}, \text{ où } KA = 1.$$

Fig. 3

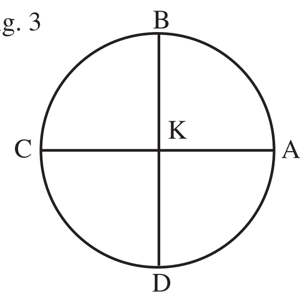
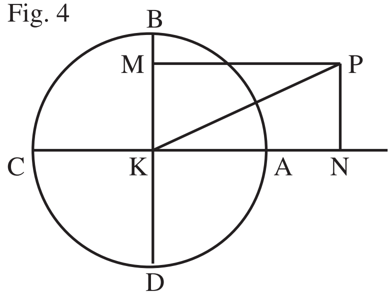


Fig. 4



Si $\overline{KA}$ est prise comme unité primitive ou positive, $\overline{KC}$ est l'unité négative, $\overline{KB}$ et $\overline{KD}$ sont les unités moyennes (Fig. 3). On peut reconnaître trois espèces de lignes dirigées :

- les parallèles à la direction primitive qui sont exprimées par des nombres réels,
- les perpendiculaires à la direction primitive qui sont exprimées par des quantités dites imaginaires mais tout aussi réelles que l'unité primitive,
- et celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes et se composent d'une partie réelle et d'une partie imaginaire (Fig. 4).

Argand procède alors à la définition géométrique des opérations d'addition et de multiplication sur les lignes dirigées ; ce sont des constructions.

L'addition

Il est inutile de s'attarder sur la définition de l'addition qui ne peut nous surprendre et qu'Argand conduit par étapes, pour dégager cette règle qu'il énonce :

Or le principe de ces constructions est de regarder le point d'arrivée P *de la ligne* $\overline{\mathrm{KP}}$ *comme le point de départ de la ligne à ajouter, et de prendre respectivement, pour points de départ et d'arrivée de la somme, le point de départ de* $\overline{\mathrm{KP}}$ *et le point d'arrivée de la ligne à ajouter.* […] *on conclura que, les points* K, P, R *étant quelconques, on a toujours*

$$\overline{\mathrm{KP}}+\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{KR}}\ ;$$

et, comme chacune des lignes $\overline{\mathrm{KP}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$ *peut également être la somme de deux lignes, comme* $\overline{\mathrm{KM}}+\overline{\mathrm{MP}}$, $\overline{\mathrm{PN}}+\overline{\mathrm{NR}}$, *les points* M, N *étant à volonté, on tirera de là cette conclusion générale, que,* A, B, M, N, O, …, R, S, T *étant des points quelconques, on a*

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MN}}+\overline{\mathrm{NO}}+\overline{\mathrm{O}\ldots}+\overline{\ldots\ldots}+\overline{\ldots\mathrm{R}}+\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{ST}}+\overline{\mathrm{TB}}.$$

Les points A, B, M, ... *peuvent coïncider, ou être tellement placés que les lignes* $\overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{MN}}$, … *passent plusieurs fois par la même trace, se croisent entre elles, etc. Toutes ces circonstances sont indifférentes* [II, p. 18-19].

Ce résultat complètement explicité est central dans la démonstration du théorème fondamental que donne Argand. Notons au passage que, par construction, la grandeur absolue de la somme est inférieure ou égale à la somme des grandeurs absolues des termes de la somme.

La multiplication

La définition de la multiplication, elle aussi entièrement géométrique, est fondée sur la notion de moyenne proportionnelle, telle qu'on la connaît entre grandeurs absolues, et telle qu'Argand vient de la définir entre lignes dirigées.

Il commence par construire le produit de deux lignes dirigées, unités, non primitives, $\overline{\mathrm{KB}}$ et $\overline{\mathrm{KC}}$ (Fig. a).

Fig. a

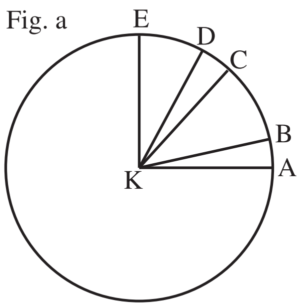
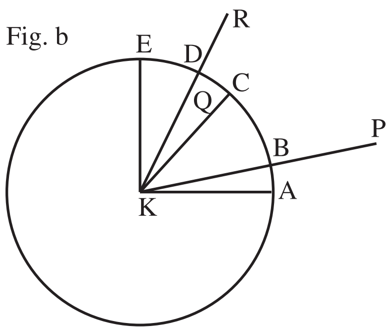


Fig. b



Il place D sur le cercle, de façon que $\text{angle}\,\overline{AKB} = \text{angle}\,\overline{CKD}$, et remarque que, puisqu'on a à la fois,

pour les grandeurs absolues, KA est à KB ce que KC est à KD,

et pour les directions, $\text{angle}\,\overline{AKB} = \text{angle}\,\overline{CKD}$,

alors on peut écrire « $\overline{KA}$ est à $\overline{KB}$ ce que $\overline{KC}$ est à $\overline{KD}$ », soit

$$\overline{KA} \cdot \overline{KD} = \overline{KB} \cdot \overline{KC}.$$

La ligne $\overline{KA}$ étant le nombre +1, la relation devient : $\overline{KD} = \overline{KB} \cdot \overline{KC}$.

Donc, le produit des deux lignes unités $\overline{KB}$ et $\overline{KC}$ est la ligne unité $\overline{KD}$ définie par :

$$\text{angle}\,\overline{AKD} = \text{angle}\,\overline{AKB} + \text{angle}\,\overline{AKC}.$$

Si les facteurs du produit ne sont pas des unités (Fig. b), on peut écrire

$$\overline{KP} = KP \cdot \overline{KB} \text{ et } \overline{KQ} = KQ \cdot \overline{KC}, \text{ où } \overline{KB} \text{ et } \overline{KC} \text{ sont des unités.}$$

On a alors $\overline{KR} = \overline{KP} \cdot \overline{KQ} = (KP \cdot KQ) \cdot (\overline{KB} \cdot \overline{KC})$, avec $\overline{KB} \cdot \overline{KC} = \overline{KD}$.

La ligne $\overline{KR}$ est donc définie en grandeur et en position respectivement par

le produit : $KR = KP \cdot KQ$

et la somme : $\text{angle}\,\overline{AKR} = \text{angle}\,\overline{AKP} + \text{angle}\,\overline{AKQ}.$

Argand juge superflu de détailler les opérations inverses.

En 1806, il termine l'exposé de sa méthode en indiquant que, sans la préconiser comme outil démonstratif tout à fait rigoureux, il la propose comme moyen de recherche efficace puisqu'elle repose sur des constructions géométriques propres à faciliter les raisonnements en les rendant visibles. Il a déjà à cette époque une idée assez avancée de la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dont il donnera la forme achevée en 1814.

La démonstration d'Argand

La démonstration de 1814

Du premier titre : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806), au second : *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse* (1814), le chemin parcouru est important. Argand, mathématicien amateur, non connu en 1806, rencontre des mathématiciens de renom, Français, Gergonne qui s'intéressent à ses idées, favorisent leur diffusion, s'en font les défenseurs. Son essai devient une théorie. Servois reste un de ses détracteurs. En 1814, Argand écrit douze pages

– pour convaincre du bien fondé de la théorie des lignes dirigées qui, si surprenante qu'elle soit pour certains, ne contredit aucune des définitions ou règles qui existaient déjà, mais au contraire les consolide en en donnant des extensions,

– pour convaincre aussi de l'efficacité de la méthode, puisqu'elle permet d'offrir une « démonstration à la fois directe, simple et rigoureuse » de ce théorème d'Algèbre dont « l'importance et la difficulté » ont « exercé la sagacité des géomètres du premier ordre ».

Pour assurer une meilleure lisibilité de la démonstration dont nous entamons l'exposé, nous choisissons d'adapter légèrement l'écriture d'Argand, particulièrement d'utiliser les notations actuelles $|a|$ et arg a associées à la quantité imaginaire $a = m + n\sqrt{-1}$.

Soit donc le polynôme proposé $y(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + fx + g$, *n étant un nombre entier ; a, b, …, f, g peuvent être de la forme* $m + n\sqrt{-1}$. *Il s'agit de prouver qu'on peut toujours trouver une quantité de cette même forme qui, prise pour x, rende* $y(x) = 0$ [II, p. 118-123].

Argand explique son projet : pour une valeur quelconque de x, le polynôme peut être construit par les règles d'addition et de multiplication des lignes dirigées. En nommant K le point initial et P le point final, ce polynôme sera exprimé par la ligne dirigée $\overline{\mathrm{KP}}$ et il faut montrer que l'on peut trouver x tel que le point P associé coïncide avec le point K. Pour ce faire, Argand construit un raisonnement par l'absurde : s'il était impossible de trouver x tel que la ligne $\overline{\mathrm{KP}}$ devienne nulle, alors, dit-il, de toutes les valeurs de la grandeur absolue KP non nulles, il y en aurait une qui serait plus petite que toutes les autres. C'est donc ici que se situe le maillon faible de la démonstration d'Argand puisque ce résultat intuitif ne sera définitivement validé qu'après les travaux de Karl Weierstrass, vers 1863. Argand note z la valeur de x qui produirait ce minimum et précise qu'on ne pourrait donc avoir $|y(z+h)| < |y(z)|$ pour aucune quantité h. Pour pointer la contradiction, il fabrique alors, par une construction en trois temps, une quantité h pour laquelle on a, de fait, $|y(z+h)| < |y(z)|$.

Argand développe $y(z+h)$ en fonction de h et obtient :

$$y(z+h) = y(z) + \mathrm{R}\,h^r + \mathrm{S}\,h^s + \ldots + \mathrm{V}\,h^v + h^n \qquad [\mathrm{B}]$$

« de manière qu'aucun des coefficients R, S, …, V ne soit nul, et que les exposants r, s, …, v, n aillent en augmentant ».

Si l'équation [B] se réduisait à $y(z+h) = y(z) + h^n$, en choisissant $h = \sqrt[n]{y(z)}$, ainsi qu'il l'écrit exactement, on aurait $y(z+h) = 0$ et le théorème serait démontré.

On suppose donc que le second membre de l'équation [B] a au moins trois termes et l'on construit $y(z+h)$ en prenant

$$\overline{\mathrm{KP}} = y(z)\ ;\ \overline{\mathrm{PA}} = \mathrm{R}\,h^r\ ;\ \overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{S}\,h^s\ ;\ \ldots\ ;\ \overline{\mathrm{FG}} = \mathrm{V}\,h^v \text{ et } \overline{\mathrm{GH}} = h^n.$$

La quantité $y(z+h)$ est représentée par la ligne, brisée ou droite, $\overline{\mathrm{KPAB\ldots FGH}}$, soit $\overline{\mathrm{KH}}$.

On a, entre les grandeurs absolues, les égalités suivantes :

$$\mathrm{KP}=|y(z)|\,;\ \mathrm{PA}=|\mathrm{R}\,h^r|\,;\ \mathrm{AB}=|\mathrm{S}\,h^s|\,;\ldots;\ \mathrm{FG}=|\mathrm{V}\,h^v|\,;\ \mathrm{GH}=|h^n| \text{ et } \mathrm{KH}=|y(z+h)|$$

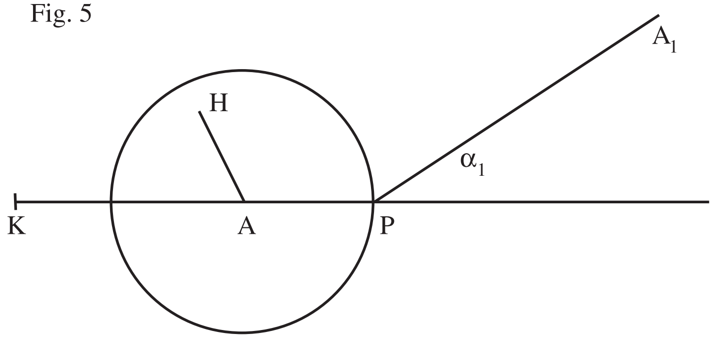
et l'inégalité : $\mathrm{KH}\leq\mathrm{KP}+\mathrm{PA}+\ldots+\mathrm{FG}+\mathrm{GH}$.

On est ramené à trouver h tel que $\mathrm{KH}<\mathrm{KP}$. Or la quantité h peut varier en direction et en grandeur.

1. Si l'on a $\overline{\mathrm{KP}}=y(z)$ et $\overline{\mathrm{PA}_1}=\mathrm{R}(h_1)^r$, on peut choisir la direction de h de façon que le point A défini $\overline{\mathrm{PA}}=\mathrm{R}\,h^r$ par appartienne à la demi-droite [PK).

   Posant $\text{angle}\left(\overline{\mathrm{KP}},\overline{\mathrm{PA}_1}\right)=\alpha_1$, on prend $\arg h=\arg h_1+\dfrac{\pi-\alpha_1}{r}$, ce qui donne $\arg h^r=\arg(h_1)^r+(\pi-\alpha_1)$, $\text{angle}\left(\overline{\mathrm{PA}_1},\overline{\mathrm{PA}}\right)=\pi-\alpha_1$ et $\text{angle}\left(\overline{\mathrm{KP}},\overline{\mathrm{PA}}\right)=\pi$, et assure le résultat cherché.

   Fig. 5

2. La direction de h étant ainsi fixée, on peut alors choisir sa grandeur de façon que le point A de la demi-droite [PK) appartienne plus précisément au segment [PK].

   Pour avoir PA < PK, il suffit de prendre $|h|<\sqrt[r]{\dfrac{\mathrm{PK}}{|\mathrm{R}|}}$.

3. On peut encore réduire la grandeur de h de façon que PA > AH.

   En effet $\overline{\mathrm{KH}}=\overline{\mathrm{KP}}+\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AH}}$, avec $\overline{\mathrm{AH}}=\mathrm{S}\,h^s+\ldots+\mathrm{V}\,h^v+h^n$, dont la grandeur absolue vérifie l'inégalité $\mathrm{AH}\leq|\mathrm{S}||h|^s+\ldots+|\mathrm{V}||h|^v+|h|^n$. Argand indique sans autres précisions que l'inégalité $|\mathrm{R}||h|^r>|\mathrm{S}||h|^s+\ldots+|\mathrm{V}||h|^v+|h|^n$ est possible parce que les exposants s, v, n sont tous plus grands que r.

   Pour entrer dans le détail, il suffit de noter que pour $|h|<1$, on a $\mathrm{AH}\leq|h|^s\left(|\mathrm{S}|+\ldots+|\mathrm{V}|+1\right)$, que la condition suffisante cherchée s'écrit alors $|h|^s\left(|\mathrm{S}|+\ldots+|\mathrm{V}|+1\right)<|\mathrm{R}||h|^r$, et qu'elle est vérifiée si $|h|<\sqrt[s-r]{\dfrac{|\mathrm{R}|}{\left(|\mathrm{S}|+\ldots+|\mathrm{V}|+1\right)}}$.

Il ne reste plus qu'à montrer comment l'inégalité KH < KP résulte des choix qui viennent d'être faits pour *h*. Pour des points K, H, A quelconques, on a toujours KH ≤ KA + AH.

Or on a construit H tel que AH < AP, donc on a KH < KA + AP.

On a aussi construit A sur le segment [KP], ce qui assure l'égalité : KA + AP = KP. Il en résulte que KH < KP. C'est la contradiction cherchée, qui permet de dire qu'il est possible de trouver *x* tel que *y*(*x*) = 0. [IX, p. 255 à 261].

Argand prolonge sa démonstration de quelques remarques :

Il invite le lecteur à faire la figure qu'il ne fait pas lui-même (Fig. 5), soulignant que toutes les étapes de la démonstration, autres que le développement algébrique « se font, pour ainsi dire, à vue ».

Il confirme que la démonstration qu'il vient de conduire est la démonstration d'un théorème d'existence et que ce n'est pas une méthode d'approximation de la racine.

Il répond ensuite à une objection de Servois :

Le scrupule de M. Servois tire sans doute sa source de la considération de l'équation à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$*. Il est certain, en effet, que, bien qu'on puisse, dans cette équation, trouver pour y une valeur inférieure à toute limite donnée, y ne peut néanmoins devenir zéro qu'autant qu'on supposera x infini. Mais cette circonstance n'a point lieu dans notre démonstration : car ce n'est certainement pas par une valeur infinie de x qu'on rendra nul le polynôme* $|y(x)|$ [II, p. 122].

Cette remarque invite à penser que, en dehors du résultat manquant à son époque, selon lequel une fonction continue sur un compact atteint ses bornes (point 2 de la démonstration moderne qui suit), Argand aurait en main tous les moyens d'une démonstration complète, y compris la propriété qu'une fonction polynôme n'est pas bornée (point 1 de la démonstration moderne).

Argand termine son mémoire en soulignant l'efficacité de la géométrie pour la résolution d'un problème d'algèbre délicat. Se demandant s'il y aurait une traduction possible, dans le « langage ordinaire de l'analyse », de la démonstration géométrique qu'il vient de conduire, il ouvre lui-même des pistes. Il suggère d'appeler module dans le registre algébrique ce qui correspond dans le registre géométrique à la grandeur absolue des lignes dirigées et propose une écriture des expressions imaginaires s'approchant de leur future écriture trigonométrique. Il entrevoit des calculs difficiles dont il laisse le soin à des « calculateurs plus habiles », se réjouissant pour sa part que la géométrie ait pu en montrer facilement le chemin. Ce qu'il ne prévoit sans doute pas, c'est que l'autorité du calculateur habile sera telle qu'elle occultera le talent inventif du géomètre l'ayant précédé.

En 1847, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) écrit plusieurs mémoires à quelques mois d'intervalle, dont un « *Mémoire sur les quantités géométriques* ». Dans un paragraphe où il résume et explique ses positions antérieures sur la question, il annonce :

Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$ *, et de remplacer la théorie des expressions* imaginaires *par la théorie des quantités que j'appellerai* géométriques [III, p. 157].

Ce mémoire consacre tardivement le statut mathématique des nombres imaginaires. Et quoique Cauchy attribue explicitement à Argand et à Adrien-Quentin Buée (*Mémoire sur les quantités imaginaires*, Londres, 1806), l'idée que « $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité », il faudra attendre que le mathématicien français Guillaume-Jules Hoüel (1823-1886) republie, en 1874, le mémoire d'Argand de 1806 pour que justice partielle soit rendue à son auteur. Argand est aujourd'hui connu pour sa méthode des lignes dirigées, sans pour autant bénéficier du supplément de gloire qu'aurait pu lui procurer sa démonstration fort pertinente du théorème fondamental de l'algèbre, et ceci malgré l'appréciation très élogieuse qu'en fait Hoüel dans la préface de la réédition :

Cette double publication donna lieu dans les Annales *à une discussion à laquelle prirent part Français, Gergonne et Servois, et qui se termina par un remarquable article, dans lequel Argand expose d'une manière plus satisfaisante divers points de sa théorie, notamment sa démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques, démonstration la plus simple que l'on ait donnée jusqu'ici, et que Cauchy n'a fait que reproduire plus tard sous une forme purement analytique, mais moins saisissante* [II, Avertissement de l'éditeur, p. VII et VIII].

La démonstration telle qu'elle peut être complétée après la construction axiomatique de l'ensemble des nombres réels

Soit f un polynôme à coefficients complexes d'une variable complexe, z' une valeur de la variable dont l'image $f(z')$ est non nulle et P un nombre réel positif strictement supérieur à $|f(z')|$:

$$0 < |f(z')| < \mathrm{P} \qquad [1]$$

1. On peut supposer f unitaire et de degré n et écrire : $f(z) = z^n\varphi(z)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \varphi(z) = 1$

   Il existe un nombre réel strictement positif R_1 tel que

   $$|z| \geq \mathrm{R}_1 \Rightarrow |\varphi(z)| \geq \frac{1}{2}$$

   et un nombre réel strictement positif R_2 tel que

   $$|z| \geq \mathrm{R}_2 \Rightarrow |z^n| \geq 2\,\mathrm{P}\,,$$

   donc un nombre réel strictement positif $\mathrm{R} = \sup\,(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ tel que

$$|z| \geq \mathrm{R} \Rightarrow |f(z)| \geq \mathrm{P}$$

ou tel que, de façon équivalente :

$$|f(z)| < \mathrm{P} \Rightarrow |z| < \mathrm{R} \qquad [2]$$

(la fonction polynôme f n'est pas bornée).
En particulier, de [1] on déduit :

$$|z'| < \mathrm{R} \qquad [3]$$

2. La fonction numérique $|f|$ étant continue sur le compact $\overline{\mathrm{D}}$ de centre O et de rayon R, l'ensemble image $|f|\left(\overline{\mathrm{D}}\right)$ admet un plus petit élément (c'est le résultat qui manquait à Argand).

   Il existe donc z_1 dans $\overline{\mathrm{D}}$ tel que :

$$|z| \leq \mathrm{R} \Rightarrow |f(z_1)| \leq |f(z)| \qquad [4]$$

   En particulier, de [3] on déduit :

$$|f(z_1)| \leq |f(z')| \qquad [5]$$

   De [1] résulte

$$|f(z_1)| < \mathrm{P} \qquad [6]$$

   et de [2],

$$|z_1| < \mathrm{R}.$$

   Il apparaît que z_1 appartient plus précisément au disque D ouvert.

3. Si donc $f(z_1)$ était non nul, on pourrait dans un voisinage de z_1 trouver z_2 tel que :

$$|f(z_2)| < |f(z_1)| \qquad [7]$$

   C'est le résultat dont Argand donne la démonstration géométrique sans faille que nous avons présentée.
   Par [6], on aurait alors

$$|f(z_2)| < \mathrm{P}$$

   donc par [2]

$$|z_2| < \mathrm{R}$$

   et par [4]

$$|f(z_1)| \leq |f(z_2)|$$

   qui est contradictoire avec [7].

   Donc $f(z_1)$ est nul et le théorème d'existence de la racine est démontré.

Bibliographie

[I] d'Alembert J. Le Rond, « Recherches sur le calcul intégral » dans *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1746.

[II] Argand J.-R., *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Deuxième édition préfacée par Jules Hoüel, Paris, 1874. Nouveau tirage de la deuxième édition introduite par Jean Itard, Éd. Blanchard, Paris, 1971.

[III] Cauchy A.-L., « Mémoire sur les quantités géométriques » dans *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, Paris, 1847. t. IV.

[IV] Descartes R., *La géométrie*, Appendice au *Discours de la Méthode*, Leyde, 1637. Dover Publications, New-York, 1954.

[V] Dhombres J., « Tours de main et méthodes. Un cheminement historique sur la valeur épistémologique de la concision en mathématiques » dans *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, Troisième Université d'été Animath, Saint Flour, 22-27 août 2004, www.animath.fr.

[VI] Ebbinghaus H.-D., & alii, *Les Nombres, leur histoire, leur place et leur rôle*, Springer-Verlag, 1983, Vuibert, 1998, p. 91-117.

[VII] Gergonne J., *Annales de Mathématiques*, t. IV, 1813-1814 ; t. V, 1814-1815.

[VIII] Houzel C., *Analyse mathématique : cours et exercices*, Paris, Belin, 1996.

[IX] I.R.E.M. (commission Inter-Irem), *Images, Imaginaires, Imaginations*, Ellipses, Paris, 1998.

[X] Petrova S., dans *Historia Mathematica*, 1974, nº 1.