Exercices de ci, de là

Les propositions d'exercices et les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain),
IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Nous n'avons pas la prétention d'apporter des idées très originales, mais de répercuter des exercices (pas trop sophistiqués ni trop techniques), piochés de-ci de-là, souvent dans COROL'AIRE (journal de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes), qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous cherchons et acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans cet état d'esprit.

Serge Parpay

Exercices

1) Résoudre l'équation $x^3 + 3x = a^3 - \dfrac{1}{a^3}$ sans avoir recours à la formule de Cardan, c'est-à-dire en la mettant sous une forme particulière.

(Ch. de Comberousse, Cours de Mathématiques 1923).

2) Peut-on construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, un triangle équilatéral ABC tel que les coordonnées de A, de B et de C soient des nombres entiers ?

3) Soit l'équation $x^2 + 2x - 10^{10} = 0$. À l'aide d'une calculatrice, trouver, avec la meilleure approximation possible, des valeurs approchées des deux racines.

Guy Canevet (Le calcul scientifique. Que sais-je n° 1357).

Solutions d'exercices du bulletin 457 :

Exercice n° 1 :

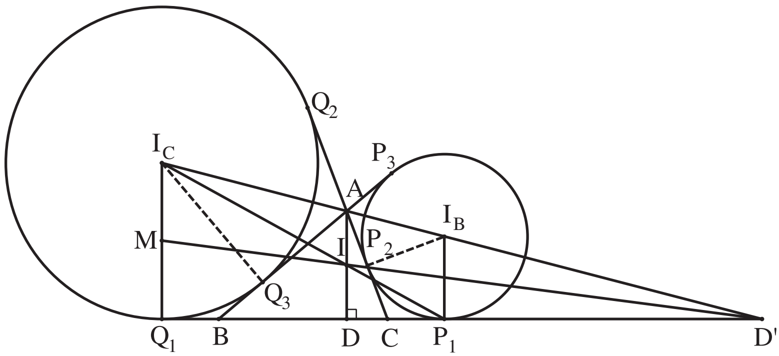
Soit un triangle ABC. On considère le trapèze rectangle ayant pour sommets les centres I_B et I_C des cercles ex-inscrits dans les angles B et C et les points de contact avec la droite (BC) de ces cercles.

1°) Montrer que le point d'intersection I des diagonales du trapèze est sur la hauteur issue du sommet A.

2°) Si D′ désigne le pied de la bissectrice extérieure issue du sommet A, montrer que la droite (D′I) coupe les bases du trapèze en leur milieu.

3º) Montrer que dans tout triangle ABC, la hauteur issue du sommet A est moyenne harmonique des rayons des cercles ex-inscrits dans les angles B et C.

Solution de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca, España)



El vértice A es el punto de intersección de las tangentes interiores a las circunferencias de centros I_B y I_C y está, por tanto, sobre la línea de centros I_BI_C.

Sean P_1, P_2, P_3 y Q_1, Q_2, Q_3, respectivamente, los puntos de contacto de la circunferencia de centro I_B y de la circunferencia de centro I_C con BC, CA, AB.

Pues $\angle P_2AI_B = \angle I_BAP_3$ y $\angle P_2AI_B + \angle I_BAP_3 = \angle P_2AP_3 = \angle B + \angle C$ (teorema del ángulo exterior), resulta

$$\angle P_2AI_B = \angle I_BAP_3 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

de donde se sigue que I_BI_C es la bisectriz exterior del ángulo A.

Sea D el pie de la altura correspondiente al vértice A.

Sea I′ el punto de intersección de la diagonal I_BQ_1 con AD.

Pues $\Delta AI_BP_3 \approx \Delta AI_CQ_2$, tenemos

$$\frac{I_BA}{I_BP_1} = \frac{I_BA}{I_BP_3} = \frac{AI_C}{I_CQ_2} = \frac{AI_C}{I_CQ_1}$$

de donde

$$\frac{I_BA}{I_BP_1} \cdot \frac{AI_C}{I_CQ_1} = 1 \tag{1}$$

Pues $\Delta I_BAI' \approx \Delta I_BI_CQ_1$, tenemos

$$\frac{AI'}{I_CQ_1} = \frac{I_BI'}{I_BQ_1} \tag{2}$$

Pues $\Delta I_BP_1Q_1 \approx \Delta I'DQ_1$, tenemos

$$\frac{I'D}{I_BP_1} = \frac{I'Q_1}{I_BQ_1} \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) resulta

$$\frac{AI'}{I'D}=\frac{I_BI'}{I'Q_1}\cdot\frac{I_CQ_1}{I_BP_1}=\frac{I_BA}{AI_C}\cdot\frac{I_CQ_1}{AI_C}=1$$

de donde

$$AI' = I'D$$

es decir, I_BQ_1 biseca el segmento AD.

Análogamente se prueba que I_CQP_1 también biseca AD.

Luego las diagonales del trapecio se cortan en el punto medio I de la altura AD. Esto prueba 1º) .

2º Obsérvese que al ser I_BI_C la bisectriz exterior del ángulo A, el punto D′ es, precisamente, el punto de intersección de I_BI_C con BC.

Si M es el punto de intersección de D′I con I_BP_1, se verifica que

$$\frac{I_BM}{AI}=\frac{D'M}{D'I}=\frac{MP_1}{ID}$$

de donde $I_BM = MP_1$ porque AI = ID. Así, pues, M es el punto medio de la base I_BP_1. Análogamente se prueba que D′I biseca la otra base del trapecio.

3º Sean r_B y r_C, respectivamente, los radios de las circunferencias de centros I_B y I_C.

Sea s el semiperímetro de ΔABC y h_A la longitud de la altura correspondiente al vértice A.

Con la notación habitual, se sabe que

$$r_B(s-b)=r_C(s-c)=\frac{1}{2}ah_A \quad (= \text{area de } \Delta ABC)$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=\frac{s-b}{\frac{1}{2}ah_A}+\frac{s-c}{\frac{1}{2}ah_A}=\frac{2s-b-c}{\frac{1}{2}ah_A}=\frac{a}{\frac{1}{2}ah_A}=\frac{2}{h_A}.$$

Esto prueba 3º).

Solution de R. Raynaud (Digne)

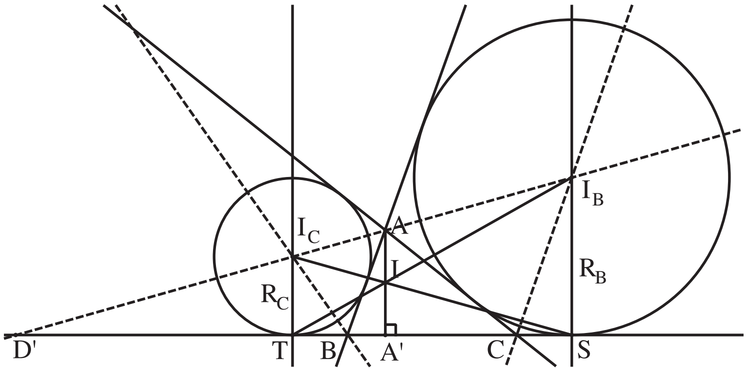
Soit b et c les deux cercles exinscrits, R_b et R_c leurs rayons, S et T leurs points de contact avec (BC).

Désignons par s et t les deux droites SI_b et TI_c.

l) A et D′ sont les centres d'homothétie de b et c. La division (D',A,I_b,I_c) est harmonique.

A et I sont deux conjugués de D′ par rapport à s et t.

(AI), polaire de D′ par rapport à la paire {s, t} est perpendiculaire à (BC).



2) Désignons par A′ le point où (AI) coupe (AB) et par O le point à l'infini de (AA′).
La polaire de O pour les droites (D′A) et (D′ A′) est la droite (D′I).
I conjugué de O par rapport à A et A′ est le milieu de [AA′].
Et la droite (D′I) coupe les segments$[SI_s]$ et $[TI_t]$ en leur milieu.

3) $\dfrac{2}{D'A} = \dfrac{1}{D'I_b} + \dfrac{1}{D'I_c}$. En multipliant les dénominateurs par le sinus de l'angle D', on obtient :

$$\frac{2}{AA'} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$$

Autres solutions : Alain Corrée (Moulins), Jean-Claude Carrega (Lyon), Georges Lion (Mata Utu, Wallis)

Exercice nº 3 :

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus et dans lequel AB ≠ AC. Le cercle de diamètre [BC] rencontre les côtés [AB] et [AC] respectivement en M et N.

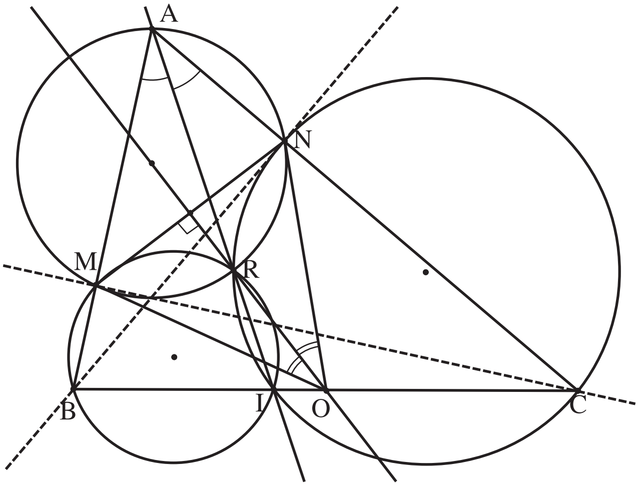
On note O le milieu du côté [BC]. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR se rencontreraient-ils en un point du côté [BC] ?

Solution d'Alain Corrée (Moulins)

Le triangle OMN étant isocèle, la bissectrice intérieure de l'angle en O est aussi médiatrice de [MN].
Dans le triangle AMN, la bissectrice intérieure de l'angle en A et la médiatrice de [MN] se coupent en R sur le cercle circonscrit au triangle AMN.
Le triangle ABC étant acutangle, M appartient au segment [AB], N appartient au segment [AC], A et R sont situés de part et d'autre de la droite (MN).

$$AM \cdot AB = AN \cdot AC = P_{A/C(O,OB)}$$

(puissance de A par rapport au cercle de centre O).
Les triangles AMN et ACB sont donc semblables d'où :



$\widehat{ANM} = \hat{B}$ et $\widehat{AMN} = \hat{C}$ ($\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ représentant les angles dans le triangle ABC).
En utilisant les angles inscrits dans le cercle circonscrit à AMN, on a : $\widehat{ARM} = \widehat{ANM} = \hat{B}$.

Donc $\widehat{MRI} = \pi - \hat{B}$ (I étant le pied de la bissectrice intérieure en A).
Les points M, R, I et B sont donc cocycliques, car R et B sont situés de part et d'autre de la droite (MI), le triangle ABC étant acutangle.
Une démonstration analogue montre que N, R, I et C sont également cocycliques, par conséquent :
Les cercles circonscrits aux triangles MBR et NRC se coupent en I qui est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle en A.

Solution de Georges Lion (Mata Utu, Wallis). Le dessin est celui de A Corré.

Sachant AB distinct de AC, la bissectrice de $\widehat{MRI} = \pi - \hat{B}$ et celle de $\widehat{MRI} = \pi - \hat{B}$ (c'est-à-dire la médiatrice de [MN]) sont sécantes au milieu de l'arc MN du cercle circonscrit au triangle MAN. Ce milieu n'est donc autre que le point R qui est ainsi cocyclique avec M, A, N.
Alors si I désigne le point d'intersection de (AR) et de (BC) on a en utilisant les angles orientés de droites :

$$(RN, RI) = (RN, RA) = (MN, MA) = (MN, MB) = (CN, CB) = (CN, CI).$$

Les points R, C, N, I sont donc cocycliques et de même pour R, B, M, I.

On pourrait aussi employer les angles non orientés, mais ce serait plus long.

Des solutions de l'exercice 2 seront données dans le Bulletin 461.
Précision : Dans le Bulletin 458, l'exercice n° 5, p. 414, « Les désarrois de l'élève Toerless », était proposé par Jean-Pierre Friedelmeyer.