Exercices de ci, de là

Cette rubrique comporte des exercices piochés de-ci de-là, qui nous ont plu ou nous ont intrigués. Nous acceptons avec plaisir des propositions d'exercices et des solutions dans le même esprit.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :
APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices :

1) Trouver les valeurs entières de x et de y qui satisfont aux deux équations :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 468 \\ x^5 + y^5 = 19932 \end{cases}$$

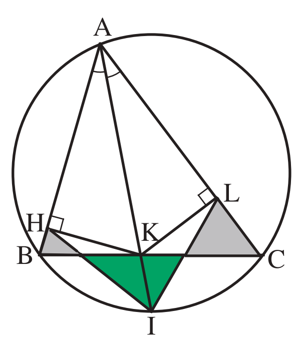
(*Charles de Comberousse 1923*)

2) « La somme des volumes des pyramides ayant pour bases les faces latérales d'un prisme et pour sommet commun un point quelconque intérieur au prisme, est constante. Dans quel rapport est-elle avec le volume du prisme ? »
(*Jacques Hadamard – Leçons de géométrie élémentaires – Armand Colin 1901*)

3) Corol'aire n° 32 (Mars 1998 – page 6)
Curiosités :
a) Calculer 8 589 934 592 × 116 415 321 826 934 814 453 125 (Ogilvy-Anserson)

b) Calculez à la machine le nombre $n = \left[\ln\left(\dfrac{640\,320^3 + 744}{\pi}\right)\right]^2$. Si le résultat vous surprend — ce qui serait normal ! — alors consultez, à la page 100, le merveilleux bouquin de François Le Lionnais, « Les nombres remarquables » (Éditions Hermann 1983).

4) Problème proposé par Gérard Macombe, IPR à Rennes.
ABC est un triangle inscrit dans un cercle. La bissectrice de l'angle BAC coupe le cercle en I et [BC] en K. H et L sont les projetés orthogonaux de K sur (AB) et (AC). Comparer l'aire du triangle vert à la somme des aires des deux triangles gris



Solutions d'exercices :

Exercice n° 2 (Bulletin n° 455) – Proposé par Jacques Chayé, de Poitiers

Soit ABC *un triangle quelconque. Soient* A′, B′ et C′ *les pieds des hauteurs respectivement sur* (BC), (CA) *et* (AB) *; soit* I, J *et* K *les milieux respectifs de* [BC], [CA] *et* [AB] *; soit* U, V *et* W *les milieux respectifs de* [AA′], [BB′] *et* [CC′]. *Démontrer que les droites* (IU), (JV) *et* (KW) *passent par un même point.*

Solution de Georges Lion (Mata Utu – Wallis) :

Soit P, Q, R les pieds des hauteurs dans le triangle IJK. Par le théorème des milieux, AKIJ est un parallélogramme et U et P sont symétriques par rapport au milieu de [JK]. D'où $\dfrac{\overline{UK}}{\overline{UJ}} = \dfrac{\overline{PJ}}{\overline{PK}}$, et de même $\dfrac{\overline{VI}}{\overline{VK}} = \dfrac{\overline{QK}}{\overline{QI}}$, $\dfrac{\overline{WJ}}{\overline{WI}} = \dfrac{\overline{RI}}{\overline{RJ}}$. Par produit, on obtient :

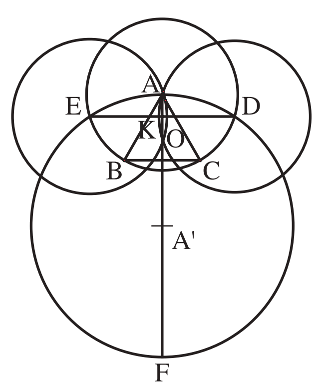
$$\frac{\overline{UK}}{\overline{UJ}} \times \frac{\overline{VI}}{\overline{VK}} \times \frac{\overline{WJ}}{\overline{WI}} = \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \times \frac{\overline{QK}}{\overline{QI}} \times \frac{\overline{RI}}{\overline{RJ}}.$$

Les hauteurs de IJK étant concourantes, le second produit vaut -1 (Céva direct) ; le premier vaut donc aussi -1, ce qui assure le concours, ou le parallélisme, de (IU), (JV), (WK) (Céva réciproque). L'élimination du parallélisme ne m'a pas paru évidente, je propose :
1) Si ABC a trois angles aigus, U,V,W sont sur [JK], [KI], [IJ] respectivement et les trois droites étudiées ne peuvent pas être parallèles.
2) Si A, par exemple, est obtus, alors U est toujours sur [JK]. Supposons aussi, par exemple, AB ≤ AC. Alors par rapport à la droite (IU), B et K sont d'un côté, A et C donc aussi W sont de l'autre, et [KW] rencontre (IU).

Exercice n° 2 (Bulletin n° 457 – Proposé par Madame Fathi Drissi (Comité de la Régionale APMEP de Lorraine)

1°) *À l'aide du seul compas, construire le centre d'un triangle équilatéral dont on connaît les sommets* A, B *et* C.
2°) *À l'aide du seul compas, construire un point situé au tiers d'un segment* [AB] *donné.*

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon) :



1°) On note a la longueur d'un côté du triangle équilatéral ABC ; on sait alors que la longueur d'une hauteur du triangle est $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ et que le rayon du cercle circonscrit est $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

– On construit A′ symétrique de A par rapport à la droite (BC), A′ est point d'intersection des cercles de centres B et C et passant par A. On notera $\mathscr{C}$ cette construction du symétrique d'un point par rapport à une droite passant par deux points donnés.

– Le cercle de centre A′ passant par A et le cercle de centre A passant par B se coupent en D et E.

– Par la construction $\mathscr{C}$, on obtient le point O symétrique de A par rapport à la droite (DE).

Montrons que O est le centre du triangle ABC. Le point O est situé sur le diamètre [AF] du cercle de centre A′ considéré. Dans le triangle rectangle ADF, on a $AD^2 = AK \cdot AF$ où K est le point d'intersection des droites (DE) et (AF). On a

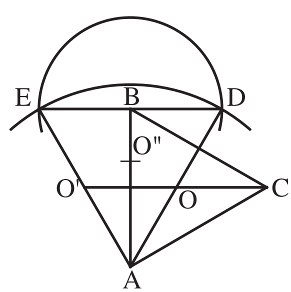
$$AA' = 2h = a\sqrt{3}\,,\quad AF = 2a\sqrt{3}\,,\quad AD = AB = a\ ;\ \text{d'où}\ AK = \frac{AD^2}{AF} = \frac{a^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

et $AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = r$. Puisque O est situé sur une hauteur du triangle ABC, cela montre que O est le centre du triangle.

2°) On note α la longueur du segment donné [AB]. L'idée est de construire un triangle équilatéral de hauteur α ; le côté a de ce triangle est tel que $\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, d'où $a = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}}$. On remarque que le côté a cherché est le double du rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté α. D'où la construction :

– Les cercles de centre A passant par B et de centre B passant par A se coupent en C et ABC est un triangle équilatéral de côté α.

– Par la construction de la question 1°), on obtient le point O, centre du triangle équilatéral ABC. On a $CO = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$.



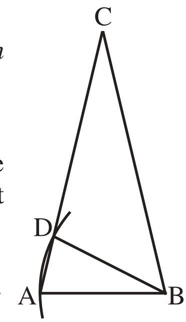
– Par la construction $\mathscr{C}$, on obtient le point O′ symétrique de O par rapport à la droite (AB) ; on a $CO' = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}} = a$.

– Les cercles de centre A et de rayon $CO' = a$ et de centre B et de rayon $CO = \dfrac{a}{2}$ se coupent en D et E. Le triangle ADE est alors équilatéral de côté a et le segment[AB] donné est une hauteur de ce triangle.

– Par la construction de la question 1°), appliquée au triangle ADE, on obtient le point O″, centre du triangle ADE, situé au tiers du segment [AB].

Solution de Michel Blévot (Saint-Denis de la Réunion) :

(*À l'aide du seul compas, construire un point situé au tiers d'un segment* [AB] *donné*).



a) Propriété

Soit un triangle isocèle ABC tel que AC = nAB. Le cercle de centre B et de rayon BA coupe AC en D. Les triangles isocèles CAB et BDA sont semblables.

$\dfrac{AD}{BA} = \dfrac{BD}{CA}$ et puisque BD = AB et CA = nAB, alors $AD = \dfrac{1}{n}AB$.

b) À partir de [AB], on construit la figure 1, ce qui donne le point M tel que AM = 3AB.

À partir du triangle ABC et du point M de la figure 1, on construit la figure 2 : Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre M et passant par A coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en D et E. Les cercles $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ de centres respectifs E et D et passant par A se recoupent en un point T. ADTE est un losange.

Les points A, B, M et T sont alignés. AME est isocèle en M avec AM = 3AB, et AET est isocèle avec EA = ET. En utilisant la propriété a) avec $n = 3$, on a $AT = \dfrac{1}{3}AB$. Le point T répond donc à la question posée.

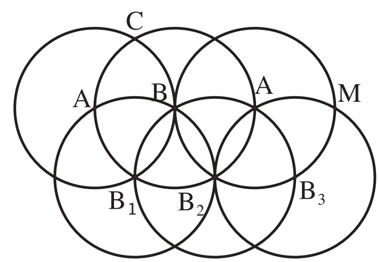


Figure1

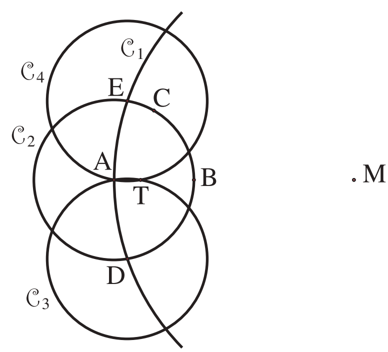


Figure2

Autres solutions de R. Raynaud (à l'aide de l'inversion) et A. Corée (à l'aide de la symétrie).

Rappel : Article de Jacques Fort « *La géométrie du compas* », BV nº 376 de Décembre 1990, article citant par ailleurs Jean-Claude Carréga : « *La règle, le compas et la théorie des corps* », BV nº 315 de septembre 1978.

Une information :

Robert Vidal, de Narbonne, nous signale qu'on peut télécharger, sur le site du rectorat de Montpellier, un document « Mathematica Dinosaurus » (Morceaux choisis) de Jean-Marc Dewasme contenant de nombreux problèmes du style de ceux de cette rubrique. Vous le trouverez à l'adresse suivante :

http://pedagogie.acmontpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/dewasme/Mathematica Dinosaurus.pdf

Serge Parpay