Études de régularité et logiciel GEOSPACW

Jean-Pierre Daubelcour et Anne-Marie Marmier(*)

Introduction

Nous vivons dans un espace, que les Éléments d'Euclide nous ont appris à décrire par un discours rationnel permettant de comparer sans en faire une expérience réelle des objets solides définis à l'aide de surfaces planes, de droites et de points. À partir du XVII^{e} siècle le discours s'est enrichi, les méthodes analytiques et vectorielles s'y sont introduites, puis les groupes de transformations.
L'enseignement secondaire met en avant une présentation de la géométrie à partir des transformations, et il distille une « géométrie spatiale » dès la sixième à travers l'étude des corps solides simples ; au lycée, l'objectif change, l'espace s'organise et les objets vont s'y coordonner entre eux.

Nous avons choisi d'offrir un petit périple sous le thème de la régularité, conjuguant étude-découverte des objets de l'espace et transformations, cela à travers deux exemples de construction : le dodécaèdre régulier et les formes cristallines du système cubique.
Dans le premier cas, le polyèdre régulier est défini comme un solide ayant toutes ses faces égales et tous ses angles polyèdres égaux, la construction effective montre l'existence et l'unicité (en un sens à préciser) d'un tel solide, dans la construction duquel apparaissent des rotations qu'on manipule empiriquement.
Dans le deuxième cas, la régularité est définie via des groupes d'isométries du cube et la construction fait découvrir les formes.
Nous nous plaçons dans le cadre d'un exposé suivant la tradition euclidienne, où l'égalité signifie avoir même forme et même grandeur, l'égalité des figures rectilignes découlant de l'égalité des segments et des angles qui la composent. Le principe d'égalité par superposition qui fonde le discours s'adapte sans difficulté aux constructions de trièdres avec lesquels nous aurons à travailler.

Construire est un acte qui amène à la réalisation d'un objet ; il est contingent aux instruments utilisés, l'ensemble du processus peut rester dans le discours de ce qu'il est possible de faire, une expérience de pensée en quelque sorte, ou bien aboutir à la réalisation matérielle d'un objet donné à voir, à toucher, …
Le point de vue est architectural : on construit un solide en assemblant des pièces selon un ordre nécessaire avec un certain nombre de connaissances a priori. Nous faisons l'hypothèse qu'une telle pratique expérimentale et personnelle contribue à forger l'espace comme une entité, car il s'agit pour avancer d'arriver à se penser par

(*) IREM de Lille, Groupe de travail : Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens (E.M.T.A).

rapport à l'objet et de penser comment il est intimement fait, quelle est la coordination de ses éléments entre eux.
Nous avons choisi comme instrument le logiciel *geospacw* ; il permet de réaliser de belles représentations de figures solides que la construction manuelle à ce niveau ne permet pas.
Nous n'avons donné qu'un minimum de commentaires pour éclairer la démarche et les dessins obtenus ; c'est au lecteur d'accomplir pour lui le va-et-vient entre le raisonnement et l'action à commander à l'outil, d'en escompter les effets et de les constater.

Ce logiciel construit par une équipe d'enseignants du CREEM dans le cadre plus général du CNAM a un grand intérêt pédagogique et conjugue simplicité et performance. Il est conçu pour l'apprentissage de la géométrie, la figure est construite par étapes et réaliser ces étapes demande de mobiliser des connaissances géométriques.

Au-delà de la constatation sur l'écran de l'ordinateur, on trouvera le détail de certains points théoriques dans la bibliographie. Les faiblesses du logiciel obligent à penser une méthode de construction en rapport avec son économie et influent sur les méthodes géométriques, nous expliciterons cela au fil du texte.

En conclusion nous voudrions montrer comment le thème de la régularité des solides et l'informatique introduisent à un espace structuré et initient aux transformations spatiales, conduisent à des méthodes analytiques simples et sont moteurs de découverte.

CONSTRUCTION DU DODÉCAÈDRE RÉGULIER

Les Éléments d'Euclide tels qu'ils nous sont parvenus s'achèvent au livre XIII dont l'objectif est l'exhibition des cinq solides platoniciens. Ces constructions amènent à l'existence des objets définis dès l'entrée du livre XI ; cube, tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre sont définis comme figures solides comprises sous des figures égales, équilatérales et équiangles : carrés, triangles et pentagones. En conclusion du livre, il est noté qu'excepté ces cinq figures « *on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles* ». Il est implicite que les figures considérées sont supposées convexes.
Nous nous sommes intéressés à la construction du dodécaèdre régulier, parce que, comme l'icosaèdre qui peut lui être associé par dualité, sa construction demande plus d'engagement que les autres. Certes, c'est une figure mythique, en témoigne le dialogue de Platon du *Timée* ou *La Divine Proportion* de Luca Paccioli ; elle en appelle au partage en extrême et moyenne raison et aux multiples relations entre grandeurs qu'il génère, donc aux irrationnelles. La construction euclidienne exploite ces proportions pour accrocher des pentagones réguliers et égaux sur chacune des douze arêtes d'un cube de manière qu'ils s'ajustent entre eux ; nous ne reviendrons pas sur cette construction.
Nous avons retravaillé les constructions données par A.M. Legendre dans ses *Éléments de géométrie* et J. Hadamard dans ses *Leçons de géométrie élémentaire*

parce qu'elles offrent matière à réfléchir et à exécuter dans un cadre qui est celui d'un enseignement secondaire soucieux de construire sans formalisme l'espace euclidien. En effet s'il est facile de montrer qu'il y a au plus cinq types de polyèdres réguliers, leur construction raisonnée prouvera leur existence et leur unicité, elle fournira une connaissance simple et profonde sinon complètement consciente sur l'espace habituel.

Le trièdre apparaît vite comme élément de base de la construction et il est nécessaire de s'adjoindre quelques outils simples, presque matériels, permettant de comparer deux trièdres. Pour Legendre et Hadamard, le plan de construction consiste à construire un sommet et les trois pentagones réguliers et égaux accolés à ce sommet puis à compléter le solide par itération ; mais la mise en œuvre est différente. Chez Legendre, on reproduit de place en place une situation spatiale, chez Hadamard, on effectue des rotations et le lecteur peut apprécier la clarification que cela introduit en le soulageant d'avoir à penser de plus près l'organisation de l'objet. Nous avons réalisé cette dernière construction avec le logiciel *geospacw*.
L'usage que l'on fait des rotations spatiales est porté par l'image d'une porte qui tourne autour de ses gonds, la rotation est visuellement associée à un mouvement qui déplace les solides en laissant leur organisation interne inchangée. Commander à la machine demande de traduire cette vision de l'ordre du quotidien ; le logiciel agit comme boîte noire, il ne va pas économiser un cours sur les rotations qui d'ailleurs serait inutile, mais il permet d'en faire l'expérience et de les introduire non comme un but d'enseignement sans enjeu perceptible, mais comme un instrument pour aller plus loin.
On aura à manipuler : rotation d'axe construit et d'angle donné pour construire une première face pentagonale régulière, et rotation d'axe construit envoyant un point construit sur un point construit (ce qui nécessite une disposition spécifique à reconnaître) qui entraîne une partie construite de la figure sur une nouvelle figure dont il faut être sûr qu'elle fait bien partie du tout. Dans tous les cas, l'image première du mouvement disparaît derrière celle d'un état initial et d'un état final, comme effet d'une commande. La rotation étant perçue comme transport d'une figure rigide, les invariants « distance » et « angle » vont de soi.

I. *Les préalables à la construction*

Considérons sans formalisation qu'un dodécaèdre régulier serait un polyèdre dont les faces sont des pentagones réguliers égaux, les faces adjacentes étant également inclinées l'une par rapport à l'autre. Il s'ensuit qu'en chaque sommet confluent trois faces dont les angles sont égaux à $3\pi/5$.

1. Remarque

Réaliser un trièdre dont les trois angles des faces sont égaux à $3\pi/5$ est aisé. En suivant Euclide, livre XI, prop. 23, il suffit de prendre un triangle isocèle d'angle au sommet $3\pi/5$, soit d sa base et c l'autre côté, de réaliser un triangle équilatéral de côté d et d'élever sur l'axe de ce triangle la hauteur h, telle que $h^2 = c^2 - d^2/3$; ce n'est pas ainsi que nous opérerons avec *geospacw*, mais nous utiliserons autrement cette configuration. Que la réalisation de ce trièdre aboutisse à un objet unique en un sens à préciser est conséquence du raisonnement qui le construit et est précisé par les considérations ci-dessous.

2. Comparaison des trièdres

Un trièdre est un objet géométrique auquel sont associés divers éléments : trois demi-droites de même origine, limitant trois secteurs angulaires plans, les faces, et donc aussi trois angles dièdres (ou inclinaisons de chacune des faces sur une face adjacente). Des trièdres seront dits égaux, entendez superposables, quand ils auront même disposition, mêmes angles de faces et mêmes angles dièdres. Sans revenir sur les analogies triangles/trièdres (Euclide et Legendre) puis trièdres/triangles sphériques (Hadamard), trois résultats sont énoncés (Hadamard, livre V, chap. VI) :

(1) « *Deux trièdres sont égaux ou symétriques lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun.* »

(2) « *Deux trièdres sont égaux ou symétriques quand ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.* »

(3) « *Deux trièdres sont égaux ou symétriques quand ils ont les trois faces égales chacune à chacune.* »

Dans le cas qui nous préoccupe, les faces étant toutes égales, il ne se pose aucune question de disposition. Ces considérations résultent élémentairement de l'application des cas d'égalité des triangles (à condition de bien vouloir les considérer dans l'espace !) et du théorème de Pythagore.
Que cette position d'artisan ne déconsidère pas l'ensemble ! On peut également se convaincre de ces résultats par le calcul vectoriel et analytique. La construction de base est portée par le théorème dit « des trois perpendiculaires » : dans un trièdre de sommet O, d'arêtes OA, OB, OC, le point A et sa projection orthogonale A′ sur le plan (O,B,C) se projettent en un même point H sur la droite OB. L'angle dièdre d'arête OB est l'angle $\angle$AHA′ ou son supplémentaire suivant que A′ est intérieur ou extérieur à l'angle $\angle$BOC.

En conclusion, comme pour le triangle, dans un trièdre, la donnée de trois éléments convenablement choisis détermine les trois autres.
Dans le cas particulier dont nous traitons, celui du dodécaèdre régulier, tous les angles des faces sont égaux à $3\pi/5$ et tous les angles dièdres sont égaux à un même α que le calcul précédemment suggéré permet de préciser : $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (notez que les formules de trigonométrie sphérique allègent la méthode).

3. Deux dodécaèdres dont une face de l'un est égale à une face de l'autre sont égaux (mettre les deux faces en superposition de manière que les deux faces coïncident ainsi que deux angles dièdres associés, les faces contiguës à la première coïncideront et ainsi de proche en proche). Il suffit donc d'exhiber une construction d'un seul dodécaèdre.

II. La construction de Legendre

Soient trois pentagones réguliers et égaux accolés en un sommet A suivant leurs arêtes AB, AE, AF. Notons ABCDE l'un des pentagones et $\mathcal{T}$ le trièdre de sommet A ; les trois angles de faces sont égaux à $3\pi/5$, donc les trois angles dièdres sont égaux à α.

On construit très matériellement le dodécaèdre en ajustant des pièces : le discours rationnel qui utilise les règles d'égalité 1, 2, 3 rappelées ci-dessus, montre précisément que les pièces s'ajustent bien.

Initions le processus pour donner une idée de son fonctionnement. (2) implique que le trièdre de sommet B est égal à $\mathcal{T}$. On peut donc ajuster le pentagone BHIJC. (3) implique que l'angle dièdre d'arête BC vaut α, et (2) implique alors que le trièdre de sommet C est égal à $\mathcal{T}$, donc qu'on peut ajuster un pentagone CJKLD, etc. jusqu'au pentagone $EDLMN_1$. En bout de course, on a deux trièdres de sommet E, avec une face commune (AED) adjacente à deux dièdres égaux à α, donc, d'après (1), N_1 est confondu avec N et on a obtenu un polyèdre P ouvert à 6 faces pentagonales égales.

On construit un polyèdre P′ de la même façon : le second temps de l'opération consiste à montrer qu'on peut l'ajuster au précédent. Le discours servira encore, non pas à paraphraser seulement le geste opéré sur l'objet matériel réalisé ou sur le dessin plan comme ici, mais à expliquer pourquoi les coïncidences ont lieu, en jouant des propriétés (1), (2), (3) comme règles.

Notons les sommets de P′ avec les mêmes lettres que les sommets de P, mais assorties d'un « ′ ». L'angle $\angle H'G'F'$ est égal à $3\pi/5$, donc il s'ajuste sur l'angle $\angle GFO$. Le trièdre de sommet F = G′, F(O = F′,A,G) est d'après (3) égal à $\mathcal{T}$ et l'angle dièdre d'arête FO vaut α. Les deux trièdres de sommet O, O(F,A′,O′) et O(F,A′,N), sont alors égaux d'après (1), d'où N = O′, etc.

Démonstration ? Sans doute pas d'un point de vue strictement formaliste ; le raisonnement ne peut se développer qu'à partir d'un support, et le fait d'ajuster « deux bols » bien réels fait éviter de vérifier qu'à chaque ajout d'une face, l'objet tout entier reste d'un même côté du plan de cette face (on pourrait évidemment faire encore des phrases pour justifier cela) ; mais peut-on mieux comprendre comment l'objet est fait sinon en l'édifiant ainsi pièce par pièce ?

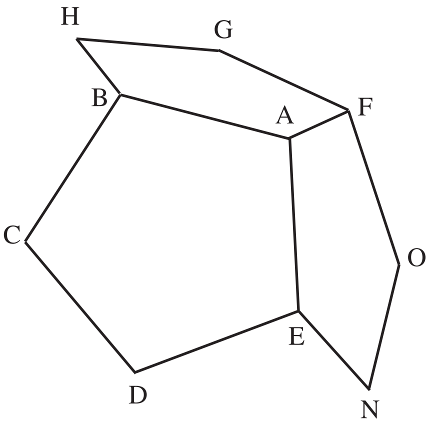

Fig. 0 : Le trièdre de sommet A

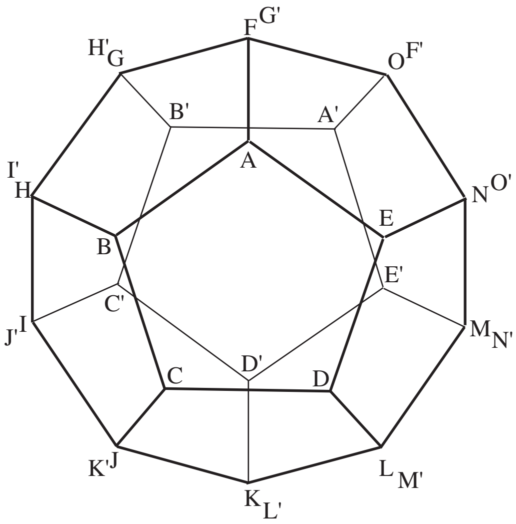

Fig. 1 : On distingue le polyèdre P ouvert (ABCDEFGHIJKLMNO), en avant de la figure, trait épais à 6 faces pentagonales égales et son ajustement avec le polyèdre ouvert P′ (A′B′C′D′E′F′G′H′I′J′K′L′M′N′O′) en arrière, en trait fin.

III. La construction d'Hadamard

Hadamard donne deux démonstrations d'existence du dodécaèdre régulier, la première, pas complètement satisfaisante, en le construisant à l'aide de rotations (dans le chapitre V de ses « Leçons de géométrie » consacré à la formule d'Euler et aux polyèdres réguliers), l'autre à caractère algébrique (en Note à la fin du livre) où le polyèdre est associé à un pavage de la sphère en polygones sphériques réguliers et égaux, lui-même lié au sous-groupe fini des rotations de la sphère contenant des rotations d'ordre 5.

Nous suivons ici le déroulement de la première construction.

On part encore de trois pentagones réguliers et égaux accolés suivant les arêtes AB, AE, AF ; on note les faces pentagonales F_1, F_2, F_3 selon la figure contre. L'outil rotation est utilisé pour

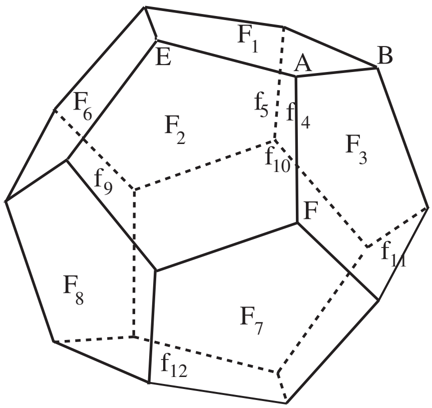

Fig. 2 : les faces « cachées » sont dessinées en pointillé.Pour une meilleure lisibilité de la figure, les 6 faces « avant » sont notées F_1, F_2, F_3, F_6, F_8, F_7 et les faces cachées sont notées f_4, f_5, f_9, f_{10}, f_{11} et f_{12}.

satisfaire à la nécessité de reproduire en chaque sommet un trièdre tel que le trièdre originel de sommet A. Ainsi, et sans que cela soit explicité dans le texte d'Hadamard, pour construire le trièdre de sommet B contenant BA, la seule possibilité est d'utiliser la rotation R qui envoie E en A et A en B (rotation dont l'axe est l' axe du pentagone F_1).
R envoie le demi-plan limité par la droite AE et contenant le pentagone F_2 sur le demi-plan limité par la droite AB et contenant le pentagone F_3, puisque ces faces sont également inclinées sur la face F_1. R envoie donc le pentagone F_2 sur F_3 (un pentagone régulier étant complètement déterminé par l'un de ses côtés et sa disposition par rapport à la droite contenant ce côté).

Il en résulte immédiatement qu'en itérant cette rotation, on obtiendra trois nouveaux pentagones numérotés f_4, f_5, F_6 adjacents à F_1, chacun étant adjacent au précédent et le pentagone F_6 à F_2.
De même la rotation autour de l'axe du pentagone F_2 , qui envoie E en A et A en F, envoie F_1 sur F_3, et permet de construire les pentagones F_7 (image de F_3) et F_8 (image de F_7), F_6 étant l'image de F_8.
L'inverse de R, envoie F_7, adjacent à F_3 et F_2, sur F_8, adjacent à F_2 et F_6 (un pentagone régulier étant complètement déterminé par la donnée de trois sommets successifs) ; en itérant cette rotation on obtient trois nouveaux pentagones : f_9 (adjacent à F_6 et f_5), f_{10} (adjacent à f_5 et f_4), f_{11} (adjacent à f_4 et F_3).
Les sommets libres de F_7 et F_8 dérivent les uns des autres par cette rotation donc sont les sommets d'un pentagone régulier qui est la face f_{12} du polyèdre et de même axe que F_1.
Que l'on obtienne bien un polyèdre convexe et borné, si ce raisonnement rapidement tracé n'est pas complètement probant, la construction pas à pas des paragraphes suivants vise à nous en convaincre.

IV. La construction avec géospacw

1. Construction d'une face pentagone régulier

L'espace étant rapporté au repère orthonormé *oxyz*, soit Z le plan ($z = 1$) qui coupe l'axe *oz* en q_1 et le point *a* de coordonnées (0,1,1). (Fig. 3 ci-contre).
On prédéfinit par le logiciel la rotation r_1 d'axe *oz* et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.
L'itération de r_1 sur *a* donne les autres sommets du pentagone régulier F_1 : *b*, *c*, *d* et *e*. En conséquence r_1 conserve le pentagone F_1.

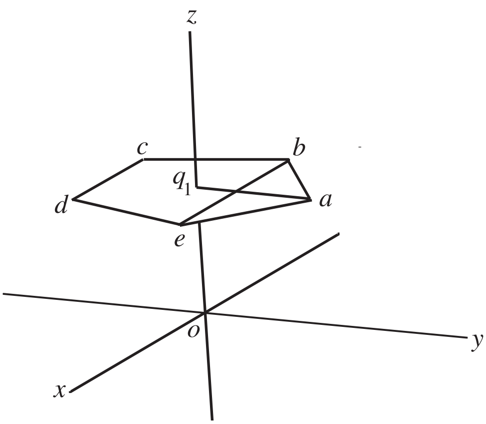

Fig. 3

2 - Construction d’un trièdre régulier $t = a(bef)$, dont les faces sont égales à $3\pi/5$.

La construction d’un trièdre régulier d’arêtes *ab* et *ae* données a évidemment deux solutions symériques par rapport au plan (*abc*). On en choisira une, où il est direct par exemple, ce qui fixera les constructions suivantes :

ANALYSE. Supposons construit l’angle trièdre régulier *a*(*bef*) de sommet *a*, dont les faces sont égales à $3\pi/5$. La face F_1 est alors un pentagone régulier, donc les cinq arêtes sont égales: $ab = ae = af$, et $eb = ef = fb$. Soit s_1 la sphère de centre *a* et de rayon *ab*, s_2 la sphère de centre *b* et de rayon *be* ; enfin le plan *p* médiateur du segment [*be*]. Le plan *p* passe par *a*, q_1 et *f*. Donc *f* appartient nécessairement aux surfaces s_1, s_2 et *p*. (Fig. 4)

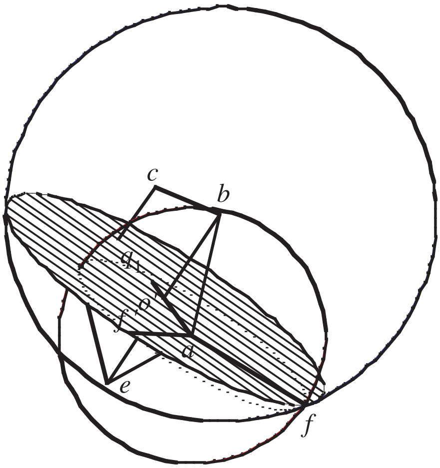

Fig. 4

SYNTHÈSE

Construisons s_1, s_2 et *p* (Fig. 4bis). La sphère s_1 et le plan *p* sont sécants selon un grand cercle c_1 de centre *a* puisque le plan *p* passe par le centre *a*.

La sphère s_2 et le plan *p* sont sécants également selon le cercle c_2 puisque la distance du centre *b* au plan *p* égale la moitié du rayon : *be*/2. Le point *o*′ (Fig. 4 bis) milieu de [*eb*] est la projection orthogonale du centre *b* de la sphère s_2 sur le plan *p*, *o*′ est donc le centre du cercle c_2.

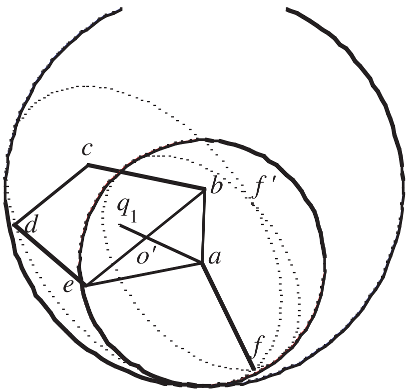

Fig. 4 bis

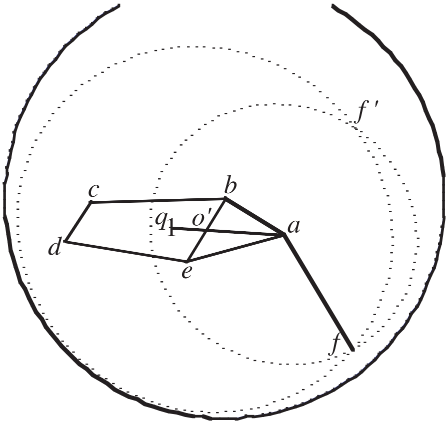

Fig. 4 ter

Les cercles $c_1(a, ab)$ et

$$c_2\left(o', \sqrt{(be)^2 - \frac{1}{4}(be)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}be\right)$$

situés dans le même plan p sont donc sécants puisque que la distance des centres ao' répond aux conditions. En effet dans le triangle rectangle $eo'a$ on a : $ao' < ae$ (l'hypoténuse) donc a fortiori $ao' <$ rayon de c_1 + le rayon de c_2.
De même $ao' > ae - o'e$, soit

$$ao' > ae - \frac{be}{2}$$

et a fortiori

$$ao' > \left|ae - \frac{\sqrt{3}}{2}be\right| \;;$$

ainsi $ao' >$ |rayon de c_1 + le rayon de c_2|.
Donc les points d'intersection f et f' de c_1 et c_2 dans le plan p existent.
Considérons (Fig. 4 bis) le trièdre $a(efb)$ de sens direct : $fb = fe = eb$ est le rayon de la sphère s_2 ; les triangles isocèles eab, baf et eaf sont égaux puisqu'ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. Il en résulte que $baf = eaf = 3\pi/5$ et ainsi le trièdre $a(bef)$ répond à la question (voir Fig. 6)

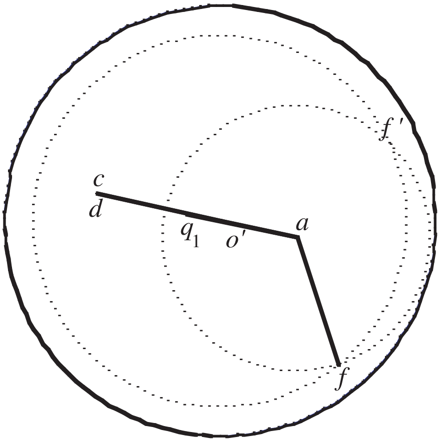

Fig. 5
Projection orthogonale
de la FIGURE 4 sur le plan médiateur *p*.

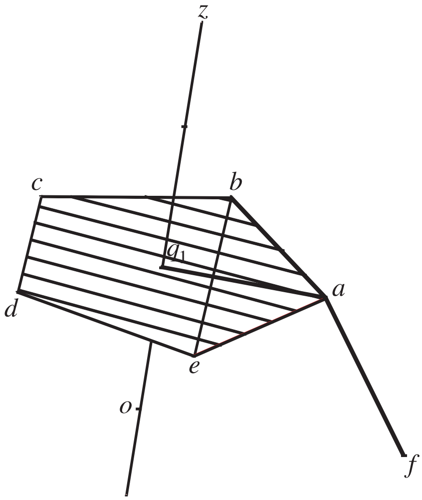

Fig. 6

3. Construction des trois pentagones accolés au sommet *a* du dodécaèdre

Dans ce paragraphe, nous noterons F_i (i entre 1 et 12) les faces du dodécaèdre et q_i leurs centres respectifs.

Pour l'instant, S désigne un point de l'axe du triangle équilatéral *efb* situé dans le demi-espace limité par le plan (*eab*) et contenant le point *f*. La rotation *r* d'axe (S*a*) et d'un tiers de tour qui transforme *b* en *e*, transforme *e* en *f* et *f* en *b* (Fig. 7 et 8).
Remarque : le logiciel geospacw permet en effet de construire une droite orthogonale à un plan.

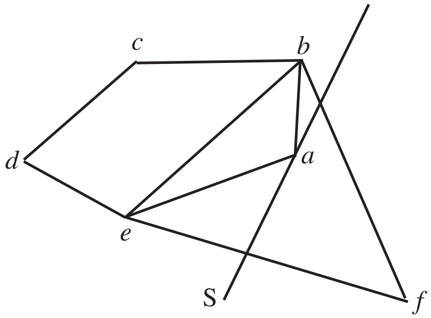

Fig. 7

De plus , il permet de construire l'image d'un polygone par certaines transformations de l'espace dont la rotation. L'image par *r* du pentagone F_1 (*abcde*) est un pentagone régulier construit nécessairement sur *ae* et *af* (Fig. 9). Posons $r(c) = h$, $r(d) = g$: c'est le pentagone régulier F_2 (*ehgfa*). Cette même rotation transforme F_2 en un pentagone régulier F_3 construit sur *af* et *ab*. Posons $r(h) = m$ et $r(g) = n$: F_3 est le pentagone (*afmnb*).

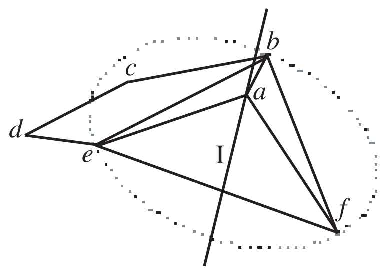

Fig. 8

L'image par *r* du pentagone F_3 est le pentagone F_1 et ces trois pentagones sont également inclinés entre eux (propriété de la rotation).
Les axes des trois pentagones réguliers sont concourants en un point de l'axe du triangle équilatéral *efb* ; désormais nous appelons ce point « S » (Fig. 9).

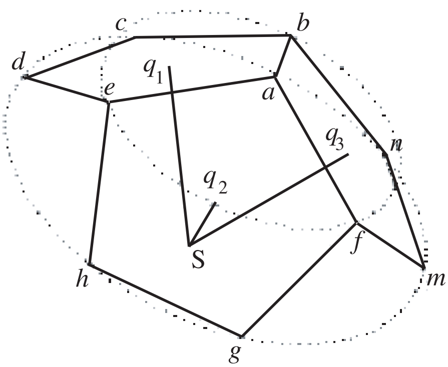

Fig. 9

4. Action de r_1 et de ses itérés sur les pentagones F_2 et F_3

Reprenons la rotation r_1 (§1) d'axe Oz = Sq_1 et d'angle $2\pi/5$. La remarque ci-dessus entraîne que le pentagone F_3 est l'image de F_2 par r_1. L'image de F_3 est un pentagone régulier F_4 construit sur b, c, n, etc. Alors F_6 est le pentagone régulier construit sur e, d, v (Fig. 10). Comme son plan est celui de (deh) à cause de l'inclinaison, il s'ajuste sur le pentagone F_2. On obtient un polyèdre ouvert Σ' à six faces pentagonales égales et dont tous les angles dièdres sont égaux. Notons que $r_1(h) = f$, $r_1(g) = m$, $r_1(f) = n$, $r_1(m) = s$, $r_1(n) = t$, $r_1(s) = u$, $r_1(t) = v$ et $r_1(u) = w$. Ceci définit les 15 sommets du polyèdre ouvert Σ'.

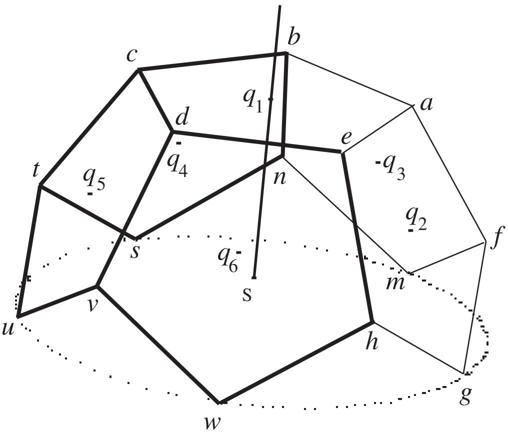

Fig. 10 : en traits épais les trois nouveaux pentagones réguliers F_4, F_5 et F_6 de centres respectifs q_4, q_5 et q_6.

La projection orthogonale sur le plan de la face F_1 (Fig. 11) illustre l'action de la rotation sur les six polygones réguliers.

S, équidistant des 15 sommets cités, est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre Σ'.

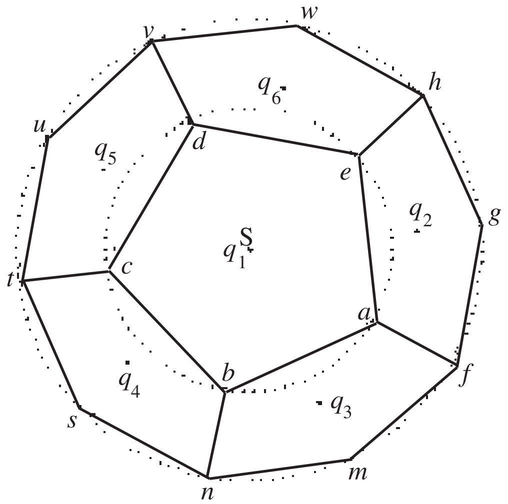

Fig. 11. Projection orthogonale de Σ' sur le plan de la face 1

5 – Action de r_2, rotation d'axe celui de F_2 transformant *a* en *e*

Soit r_2 la rotation d'axe la demi-droite Sq_2 et d'angle $2\pi/5$. Elle conserve le pentagone F_2.
Rappelons que q_i désigne le centre du pentagone régulier F_i. Cette rotation r_2 transforme F_3 en F_1, F_1 en F_6, F_6 en F_7 et F_7 en F_8. Sur la Figure 12 sont en traits épais les polygones F_2 , F_7 et F_8. r_2 envoie n sur c, b sur d et c sur v (Fig. 12). Par conséquent F_4 est envoyé sur le pentagone passant par c, d et v et également incliné sur F_1 que F_4 sur F_3 : c'est donc le pentagone F_5. De plus r_2 envoie s sur t et t sur u, et F_5 est le pentagone ($cdvut$).

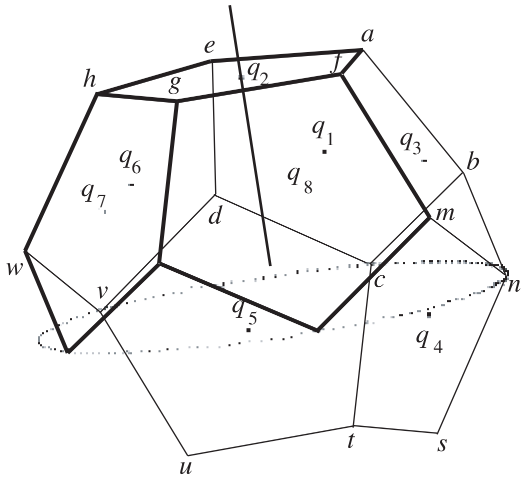

Fig. 12 : Action de r_2 sur F_4

Les transformés successifs de F_5 par r_2 sont le pentagone F_9 de centre q_9, puis F_{10} et F_{11} qui s'ajusteront avec le pentagone F_4 pour les mêmes raisons que ci-dessus (Fig. 13). Enfin les sommets libres des pentagones F_4, F_5, F_9, F_{10}, et F_{11} se correspondant par r_2 sont les sommets de la face pentagonale régulière F_{12}. (Fig. 13)
Les notations choisies définissent ainsi les nouvelles faces pentagonales : F9 ($uvwv'u'$), F10 ($u'u''v''w'v'$), F11 ($snmv''u''$), enfin F12 ($stuu'u''$).

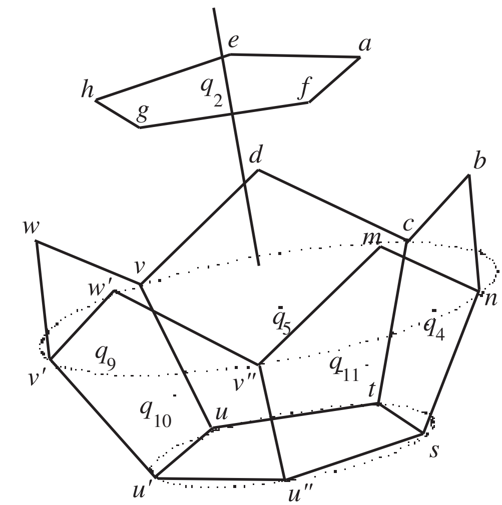

Fig. 13 : Actions itérées de r_2 sur P_4

Nous appelons q_i, $1 \leq i \leq 12$, les centres des pentagones réguliers F_i. Les 20 sommets sont notés a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, s, t, u, u', u'', v, v', v'', w, w'.
Dans la figure 14, les 12 faces F_i sont distinguées par la projection orthogonale q_i de S sur chacune d'elles.

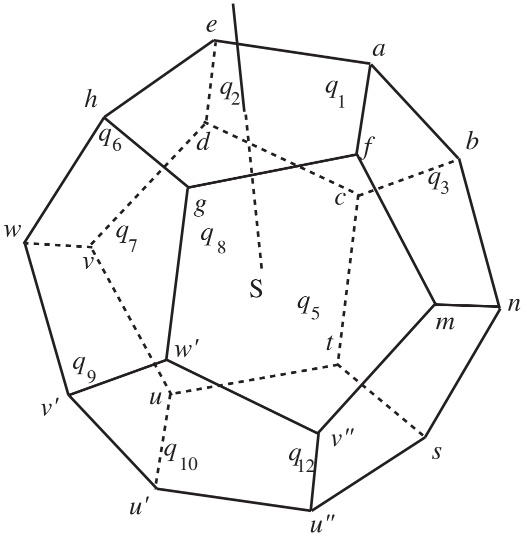

Fig. 14 : polyèdre Σ obtenu après la génération des douze faces pentagonales.

6. Les douze pentagones réguliers ainsi assemblés de F_1 à F_{12} forment un polyèdre convexe et compact. Intersection de deux pyramides.

Soit V le solide (tronc de pyramide) limité par la pyramide régulière pentagonale de sommet I dont l'axe est (Sq_1) et dont la base est dans le plan de la face 10 ($u'v'w'v''u''$) (Fig. 15) ; soit V′ le solide limité par la pyramide régulière de sommet I′ et dont la base est dans le plan de la face 1 ($abcde$).
Ces deux solides sont convexes donc leur intersection est également convexe : c'est le polyèdre Σ dont les faces sont les 12 pentagones réguliers, **il est donc convexe**. Ce polyèdre Σ est **compact** puisqu'il est inscrit dans la sphère de centre S et de rayon Sa.
Nous avons vu, conséquence des propriétés de la rotation, que ses 12 faces sont des pentagones réguliers égaux entre eux ; les angles trièdres en chacun des 20 sommets sont réguliers et tous égaux à $a(efb)$: c'est donc un dodécaèdre régulier.

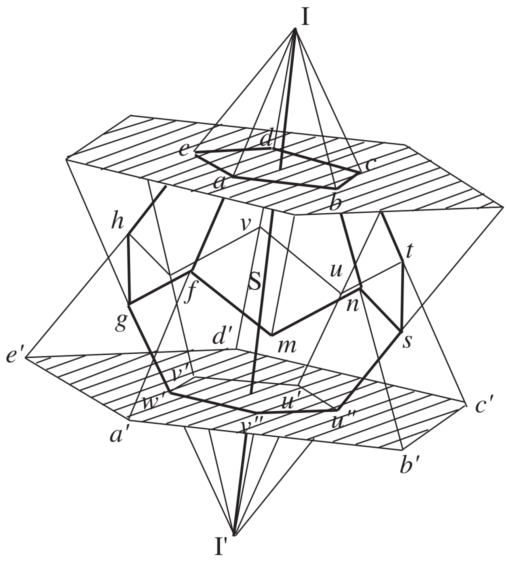

Fig. 15