Géométrie de la « boite à chaussures » : un solide simple et des problèmes pouvant s'avérer très complexes.

J.-P. Massola

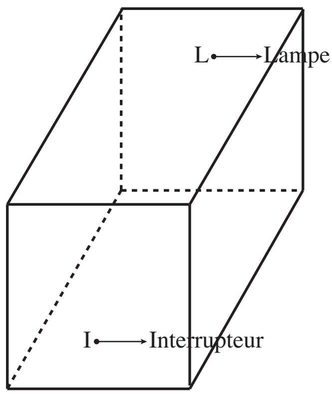
Cet article traite de trois problèmes de distances sur la surface extérieure d'un parallélépipède rectangle. Le point commun à ces trois problèmes est que, quand ils me furent posés ou quand je les ai proposés à des élèves ou même à des collègues, la question renvoyait à une évidence qui ne justifiait pas une quelconque recherche. Savoir que ces évidences étaient trompeuses impliquait de ma part de trouver des moyens qui permettraient de mener des élèves sur la voie d'une solution à ces questions.

Je vais donc exposer mon cheminement, avec ses hésitations mais aussi des outils que je pourrais proposer dans une classe.

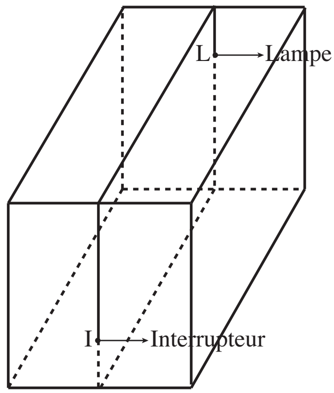
- Le premier propose la recherche du plus court chemin entre deux points situés sur deux faces opposées d'un parallélépipède rectangle (en cheminant sur la surface extérieure de ce solide).
- Le second cherche le plus court chemin entre deux points « diagonalement » opposés d'un parallélépipède rectangle.
- Le troisième interroge sur l'existence de points, de ces mêmes parallélépipèdes rectangles, plus éloignés d'un sommet que le sommet « diagonalement » opposé.

Premier problème

On considère une pièce parallélépipédique de 10m × 4m × 4m et on souhaite placer un interrupteur électrique et une lampe sur deux murs opposés. Le problème consiste à savoir comment dépenser le moins de fil électrique pour joindre la lampe et l'interrupteur.
Voici une représentation de cette pièce qui donnera plus de clarté au problème.
L'interrupteur et la lampe sont symétriques par rapport au centre de symétrie du parallélépipède, l'interrupteur étant placé à 1m du sol et la lampe à 3m du même sol.

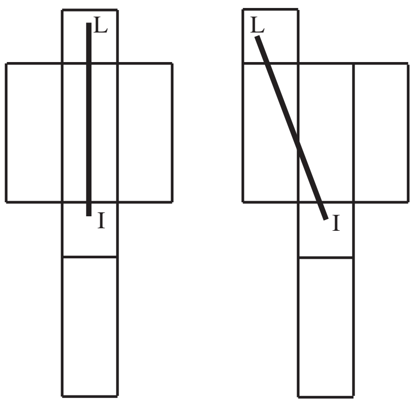


À ce problème, beaucoup de réponses relèvent de l'évidence « perceptive », mais une évidence si suffisamment dénuée de doutes qu'elle se suffit à elle-même.Le plus court chemin est « bien entendu » un des deux chemins dessinés (l'un passant par le plafond de cette pièce, l'autre passant par le plancher) ci-contre. J'ai toujours été étonné de constater même chez mes collègues et néanmoins amis (incluons-nous dans ce groupe, car si je n'avais pas passé un temps certain à réfléchir sur cette géométrie de la « boîte à chaussures », mes réactions eussent probablement été identiques) la force de cette évidence. Voyons comment se justifie cette réponse.

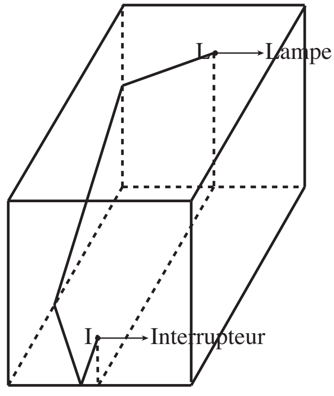


Dans ce chemin « le plus court » apparaît nettement l'idée d'alignement renvoyant à « ligne droite » et renvoyant donc à « plus court chemin ».Voici des explications souvent proposées par des élèves. Les adultes restent plus prudents. Créer le doute à ce moment est extrêmement difficile. Vérifier sur un patron la validité de ces justifications exige une forte autorité. Essayons cependant et voyons comment le patron peut jouer le rôle de « vérificateur », mais aussi comment un autre patron peut jouer le rôle de « contradicteur ».

Ces patrons renvoient au chemin passant par le plancher de cette pièce.



Ce deuxième patron montre qu'il existe un chemin plus court que celui que nous avait dicté notre évidence. Cependant cette explication est difficile « à digérer » pour beaucoup d'élèves. Que plusieurs chemins « rectilignes » que l'on peut même qualifier de « rectilignes par morceaux » puissent être de mesures différentes pose de grandes difficultés. Je pense qu'ici il faudrait que le travail sur les patrons soit un travail mené avec de très nombreux allers et retours entre solide (parallélépipède rectangle) et



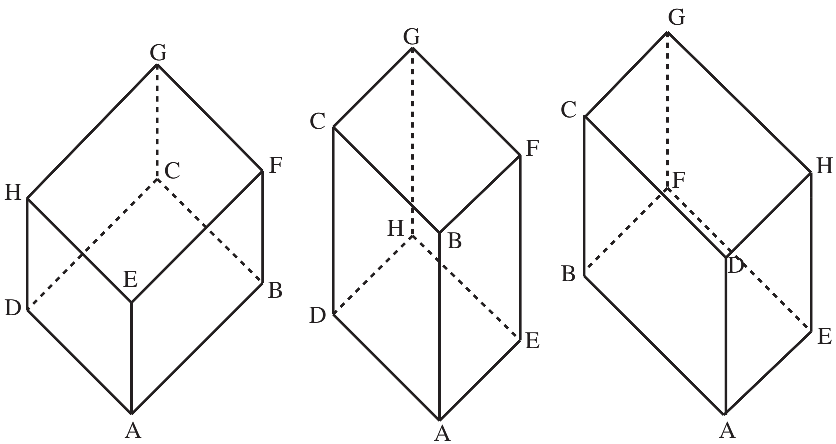
patrons mais aussi entre patrons et travailler comment passer d'un patron à un autre. Car si la comparaison des deux chemins sur les patrons peut emporter la conviction, le retour aux perspectives cavalières peut remettre en cause le travail effectué précédemment.

Le chemin en traits pleins est-il plus court que celui en pointillés ? En êtes vous persuadés ?

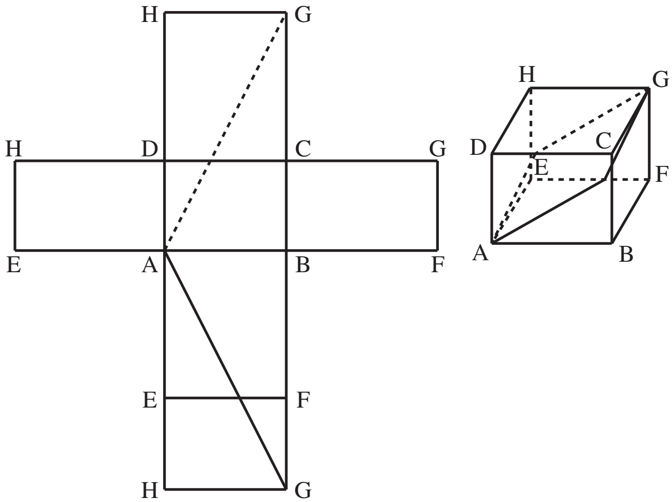
Deuxième problème

Une fourmi court sur une boîte de la forme d'un parallélépipède rectangle. De son point de vue, la distance entre deux points est la plus petite distance qu'elle doit parcourir pour les relier. Si l'on prend deux sommets diagonalement opposés, quel est le plus court chemin ?

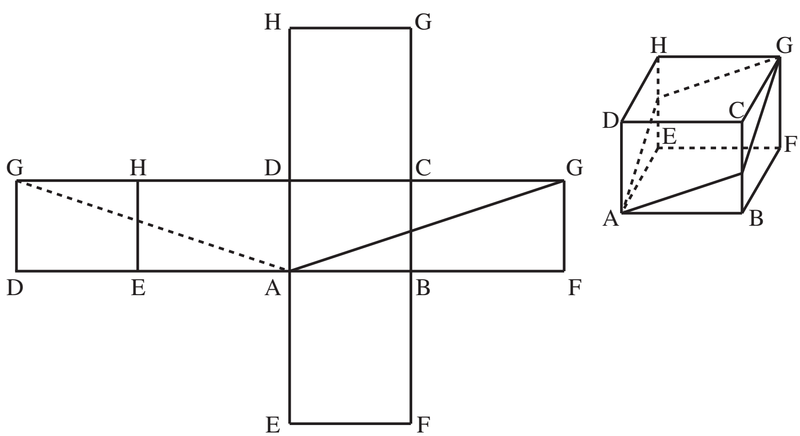
Nous donnerons des noms aux sommets de cette boîte ABCDEFGH et nous chercherons à trouver le chemin le plus court entre A et G. Voyons tout d'abord les évidences les plus fortes et donc fréquemment proposées : celles correspondant à de possibles quasi-alignements visuels. Sur les représentations ci-dessous nous proposons les trois alignements « visuels » AEG, ADG et ABG. Nous aurions pu aussi représenter les alignements « visuels » suivants : AFG, AHG et ACG, mais ces alignements sont équivalents aux trois précédents et suivre une arête donne plus d'« évidence » à la réponse proposée. Le fait de proposer la question sur un objet rend beaucoup plus délicate la mémorisation de la position des sommets et le passage d'une disposition à une autre, ce qui peut amener à donner deux réponses distinctes au même problème sans en avoir pleinement conscience. La mise en contradiction de ces diverses réponses est assez difficile. Passer tout de suite par les patrons renvoie à d'autres réponses mais n'explicitent pas l'erreur induite par l'évidence. Jouons de modernité. Cabri3D permet de voir la possible rotation de notre boîte autour de l'axe (AG), ce qui pourrait nous montrer la contradiction de nos trois hypothèses

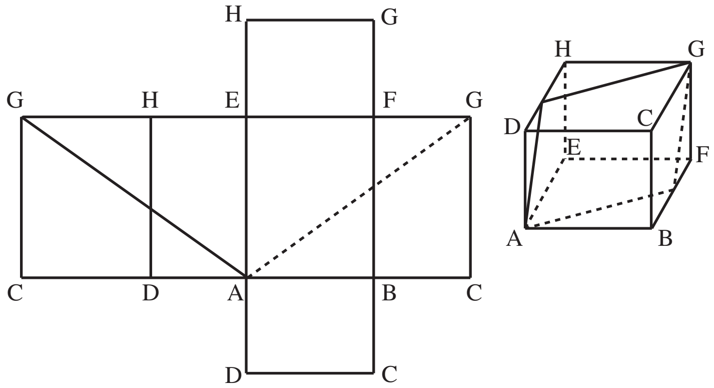


Voyons maintenant en quoi les patrons peuvent nous aider à nous approcher de la solution.



Sur ce dessin nous avons choisi deux chemins possibles pour aller de A à G. Nous pouvons aussi, et ceci n'est guère évident pour des élèves, voir que, si la fourmi montait le long de l'arête [AD] puis allait vers G en suivant le segment [DG], son chemin serait plus long. Il faudra probablement mesurer sur le parallélépipède puis sur le patron pour saisir où sont les plus courtes distances. Mais il y a d'autres chemins possibles.
En voici quatre autres (deux à deux égaux) explicités comme les deux chemins précédents :





Sur chacun de ces six chemins (deux à deux égaux), j'ai proposé à côté du chemin de la fourmi une vision horizontale de ces déplacements. Sur chacun de ces patrons, on peut voir d'autres chemins pour aller de A à G. Ceci nous permet un premier travail sur la comparaison de ces chemins. Que ce soit par perception, utilisation d'instruments de mesure ou de comparaisons (ficelle) ou en utilisant Pythagore nous devons nous rendre à l'évidence. Les trois chemins représentés sur ces dessins sont distincts et le plus court est le dernier. En prenant un parallélépipède dont les mesures des côtés sont 3, 4 et 5, les différentes mesures seront $\sqrt{90}$, $\sqrt{80}$ et $\sqrt{74}$.

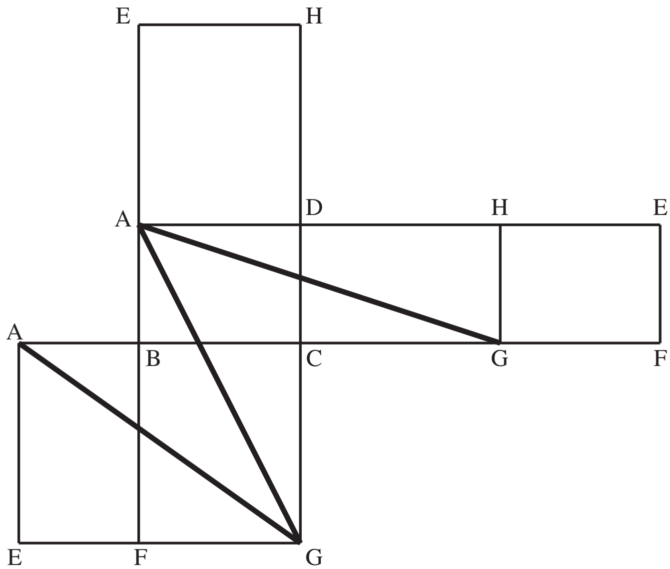
Si les côtés du parallélépipède étaient notés a, b et c avec $a < b < c$, alors les trois mesures seraient $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$, $\sqrt{b^2+(c+a)^2}$, $\sqrt{c^2+(a+b)^2}$ avec

$$\sqrt{c^2+(a+b)^2} < \sqrt{b^2+(c+a)^2} < \sqrt{a^2+(b+c)^2}.$$

En annexe est proposée une preuve géométrique de ces inégalités qui m'a été proposée par un collègue de l'APMEP et que je trouve tout à fait élégante.

On aurait aussi pu découper un carton à chaussures et découvrir ces relations d'inégalité de façon plus économe de nos neurones.

On peut encore en utilisant un patron particulier comparer ces trois longueurs sur un seul et même patron. Il est à noter que, pour la plupart de nos élèves, s'ils ont entendu parler de patrons, leur expérience s'est limitée aux patrons de cubes qui sont beaucoup plus simples quant à leurs propriétés (par exemple ces trois mesures seraient égales sur un cube), ce qui justifie une généralisation qu'il nous faut mettre en contradiction.

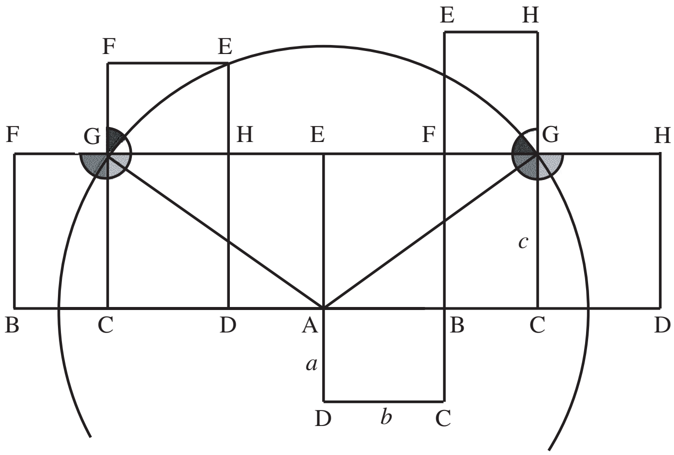


Il est souvent difficile pour des élèves de comprendre que ces chemins « qui relèvent de la ligne droite » peuvent avoir des mesures différentes et il serait bon de faire mesurer sur les boites pour s'en convaincre peu à peu. Selon les patrons, on peut voir ces chemins rectilignes comme « vraiment rectilignes » ou comme « rectilignes par morceaux ».

Troisième problème

On reprend la boîte parallélépipédique et, sachant le chemin le plus court entre A *et* G*, on se pose la question de savoir s'il existe des points situés sur la boîte et plus éloignés de* A *que* G.

Ici, l'évidence dont je parlais au début de cet article est, bien sûr, qu'il n'existe pas de points plus éloigné d'un sommet que le sommet « diagonalement » opposé.
Précisons que si nous trouvons des points plus éloignés de A que G, il faudra, bien sûr, que la distance entre A et ces points soit la plus petite possible sur la boîte.
Ce problème se heurte tout d'abord au fait que, spontanément, nous pouvons penser que G est nécessairement le point le plus éloigné de A. J'ai souvent entendu dire comme justification de cette affirmation que la sphère de centre A et de rayon AG contenait complètement la boîte considérée.
Une autre difficulté est que le cube ne poserait pas ce genre de difficultés. Je ne le traiterai pas ici, mais je vous affirme que cette évidence se justifie pour le cube.
Sachant que les chemins qui joignent A à G sont différents, je vais me placer en G et construire un cercle centré en G et s'appuyant sur les trois faces qui contiennent G. Je suis bien sûr d'accord avec vous, ce n'est pas un vrai cercle, mais tout de même cela lui ressemble. Comme nous devons envisager les deux cheminements symétriques par rapport au centre du cube, je vais placer les trois faces contenant G avec ces deux chemins.



Donc pour aller de A à G, nous avons deux chemins « les plus courts » :

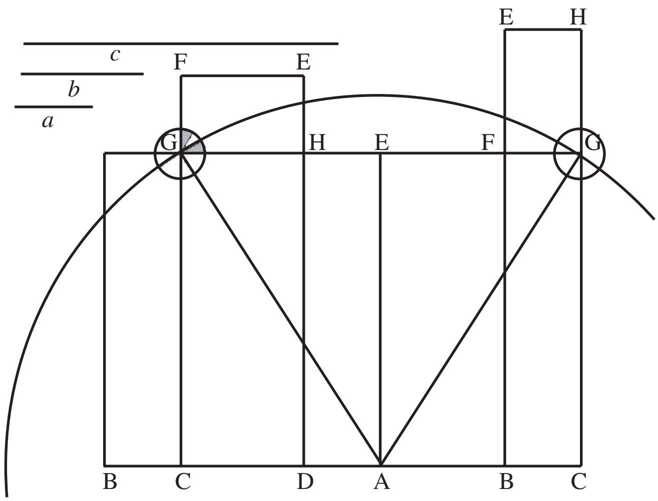
- soit en passant d'abord par la face ABEF puis par la face BCGF :
- soit en passant d'abord par la face AEHD puis par la face CDHG.

Le « disque » lieu de promenade minimaliste autour de G se traduit sur le patron par trois quarts de disque de couleur différents.

- Réglons tout d'abord le cas de la partie gris clair se trouvant sur la face CDHG : l'utilisation du chemin de gauche montre que tous les points de ce quart de disque sont plus près de A que G. G reste donc le point le plus lointain.
- Pour la partie gris légèrement plus foncée, partie de la face BCGF, le cheminement par le chemin de « droite » montre que tous les points de ce quart de disque sont plus prêts de A que G. G maintient son statut de point le plus éloigné.
- Un cercle de centre A et de rayon AG divise notre troisième quart en deux parties, l'une en noir et l'autre en blanc. Le dessin ci-dessus montre les correspondances entre ces deux parties suivant que l'on emprunte le chemin de gauche ou le chemin de droite.

La conclusion est bien triste : le point G semble donc bien le point le plus éloigné de A.

Ai-je vraiment fini ma quête ? Serait-ce ma boite de chaussure qui serait en cause ? Ces 3, 4, 5 si pythagoriciens, mais si trompeurs. Je recommence grâce à Cabri avec des longueurs différentes mais dynamiquement différentes, je pourrai ainsi d'un glissement de souris faire varier un côté par rapport aux autres. Et voici le résultat : il existe bien pour certaines boites à chaussures des points plus éloignés de A que le point G. Ce sont les points de cette zone blanche encadrée de gris que j'ai indiquée sur le dessin ci-dessous.



La fourmi pour s'éviter un excès de doliprane (ou plutôt d'un générique) ferait mieux de s'acheter une boîte à chaussures cubique là où ces curiosités n'arrivent jamais. Cette recherche suppose que le rayon du « cercle » contenant ou non des points plus éloignés de A que G doit être choisi de façon à ne pas permettre à la fourmi de choisir d'autres chemins que ceux que nous avons signalés avant. À la fin de cet exercice, je suis content d'avoir beaucoup essayé, mais je n'arrive pas à me convaincre que ce problème est ainsi résolu. N'aurions-nous pas assez souvent des élèves qui pour des tâches plus simples se retrouvent dans cette situation ?

Et de toutes façons, d'autres problèmes se posent :

- À partir de quelle valeur de r, serait-il judicieux de proposer à la fourmi un changement de cap ?
- r fixé, quelle serait la relation entre a, b, c pour que le point opposé à A soit le plus éloigné de A et à partir de quel moment est-il possible de trouver des points plus éloignés de A que G ?

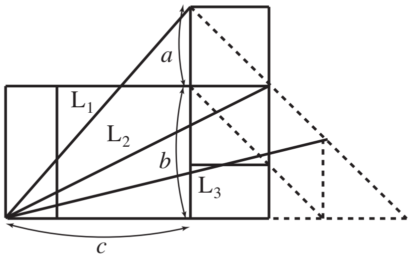
Quelles conclusions tirer de ces exercices ?

- Les représentations doivent être travaillées dans les deux sens objet → représentation, et reconstruction de l'objet à partir de la représentation.
- Raisonner sur des représentations est tout à fait dangereux, si le travail indiqué ci-dessus n'a pas été réalisé.
- Il faut cerner l'intérêt d'une représentation et voir quels problèmes elle permet de résoudre, mais aussi quels problèmes elle risque de complexifier.
- La perception sur des objets est très difficile à réinvestir sur une vue bidimensionnelle.

ANNEXE
(due à Bruno Alaplantive)

Si $0 < a < b < c$, alors $\sqrt{c^2+(a+b)^2} < \sqrt{b^2+(c+a)^2} < \sqrt{a^2+(b+c)^2}$.

Une démonstration géométrique possible en Quatrième :



On a bien :

$L_1 = \sqrt{c^2+(a+b)^2}$,

$L_2 = \sqrt{b^2+(c+a)^2}$,

et

$L_3 = \sqrt{a^2+(b+c)^2}$.

(Pythagore)

On peut alors « facilement » argumenter le fait que BA < BC < BD.