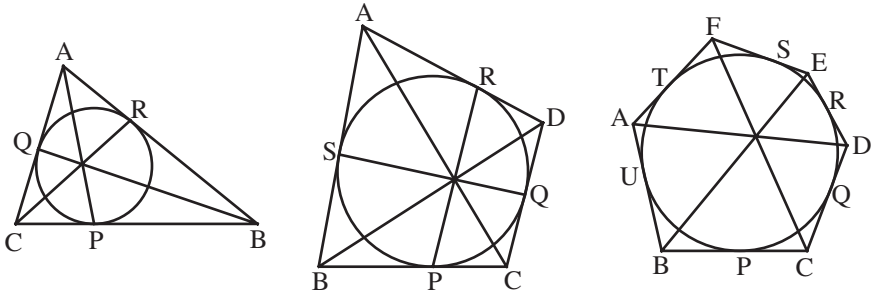


Concours et perspectives

Georges Lion

Introduction



Bon nombre de géomètres seront charmés par l'observation des trois figures ci-dessus ; il s'agit d'illustrer les propriétés de concours :

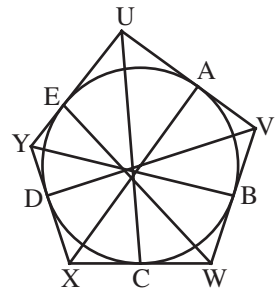
- des droites joignant les sommets d'un *triangle circonscrit* à un cercle aux points de contact des cotés, c'est-à-dire aux sommets du triangle correspondant *inscrit* dans le même cercle,
- des diagonales d'un *quadrilatère* circonscrit à un cercle et des diagonales du quadrilatère des points de contact, inscrit dans le même cercle,
- des diagonales d'un *hexagone* circonscrit à un cercle (Théorème de **Brianchon**).

On a rapproché ces trois propriétés car ce sont les seules propriétés de ce type à être vraies en général. Bien sûr les polygones réguliers à un nombre quelconque de côtés donnent lieu à des propriétés de concours mais il s'agit là de cas particuliers comme on l'explique ci-dessous pour le pentagone :

Initialement on a circonscrit au cercle un pentagone régulier ;

Puis on a modifié le côté (YU) en le maintenant tangent au cercle si bien que les droites (VD) et (XA), inchangées, continuent de se couper au centre du cercle tandis que les autres droites du même type ne passent plus par ce point.

On pourrait raisonner de même pour les diagonales de l'hexagone inscrit.



Notons que seront aussi démontrées les propriétés de parallélisme analogues aux résultats de concours établis ci-dessous.

Nous avons choisi de donner les démonstrations les plus simples et les plus directes possibles. Ce but est aisément atteint pour les triangles par application du

théorème de Céva et pour les quadrilatères sachant cependant que pour ces derniers la méthode choisie implique l'examen de *cinq* cas de figure.

Pour l'hexagone il faut travailler davantage : on s'appuie d'abord sur quelques résultats (redémontrés ici) relatifs aux pôles et polaires par rapport à un cercle puis sur un calcul « basique » concernant les nombres complexes.

La seconde partie de cet article traite des mêmes propriétés dans le cas des *coniques propres* (au lieu des cercles). Rappelons qu'on appelle ainsi toute courbe plane non vide définie par l'annulation d'un polynôme du deuxième degré en (x,y) et qui n'est ni un point ni une réunion de droites. Il est classique qu'une conique propre non circulaire est nécessairement une ellipse, une parabole ou une hyperbole et peut donc être définie de la manière suivante :

Un réel $e > 0$, une droite D et un point F hors de D étant donnés, l'ensemble des points M tels que $MF = e d(M,D)$ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que e est inférieur, égal ou supérieur à 1, et réciproquement.

L'énoncé seul du mot conique fournit la clé du passage des cercles aux coniques propres. En effet toute telle courbe peut être considérée comme l'intersection d'un plan avec un cône de révolution bien choisi. Connue dès l'antiquité cette propriété a reçu une démonstration particulièrement simple du géomètre belge **Dandelin** il y a 150 ans. Nous en rendons compte ici car ces considérations peuvent intéresser les enseignants actuels de terminale S.

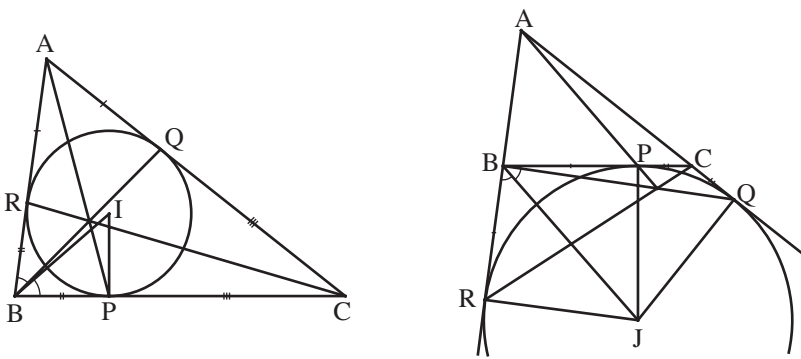
Le théorème de Dandelin permet ainsi de considérer toute conique propre comme l'image d'un cercle par perspective. Pour être tout à fait correct, il ne faut pas oublier d'inclure dans toute hyperbole (resp. parabole) les (resp. le) points à l'infini qui sont les images par perspective de points du cercle à distance finie. Par ailleurs, nous considérerons comme acquises les propriétés de préservation par perspective des relations d'alignement, de concours (qui peut devenir parallélisme) et de contact ; dans ce dernier cas une tangente au cercle peut avoir pour image une asymptote à l'hyperbole image (ou la droite de l'infini pour une parabole). Chaque propriété démontrée dans la première partie aura donc une traduction pour toute conique propre et nous en dessinerons quelques exemples.

On l'a compris, le contenu de cet article n'apporte aucun résultat nouveau. Mais les ouvrages classiques démontrent souvent les propriétés ici présentées comme corollaires de propriétés d'alignement ; en particulier le théorème de Brianchon est déduit de celui de Pascal. Il m'a semblé utile de rompre avec cette tradition car les figures de concours me semblent plus naturelles que les figures d'alignement et sont de ce fait plus faciles à mémoriser et de sens plus accessible. Cette préférence, peut-être personnelle, m'a conduit à débiter mon introduction de la manière insolite qu'on a pu constater ci-dessus. Elle m'a aussi contraint à trouver des démonstrations directes notamment pour le théorème de Brianchon. On me dit qu'une telle démonstration figure dans Coxeter (« Redécouvrons la géométrie », p. 88) mais l'isolement m'a interdit d'en prendre connaissance. Quoiqu'il en soit la démonstration donnée ci-dessous reste élémentaire tout en mettant en œuvre des notions disparues depuis longtemps des programmes des lycées. Je remercie le Bulletin de me donner l'occasion d'en montrer l'intérêt.

1. Triangle circonscrit à un cercle

Théorème 1.1 : Soit un triangle dont les côtés (BC) , (CA) , (AB) sont tangents à un même cercle respectivement en P , Q , R . Alors les droites (AP) , (BQ) , (CR) sont concourantes.

Démonstration : Nous devons distinguer deux cas de figure selon que le centre du cercle est situé sur les trois bissectrices intérieures (cercle inscrit) ou sur une seule bissectrice intérieure et sur les bissectrices extérieures des deux autres angles (cercle exinscrit, dans le secteur (BAC) sur notre figure).



On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a + b + c = 2p$. Dans le cas du cercle inscrit dont le centre est noté I , les angles \widehat{BCI} , \widehat{CAI} , etc. étant aigus, les points P , Q , R sont intérieurs à $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement et l'on a :

$$2a = 2(BP + PC) = RB + BP + PC + CQ = 2p - (AR + AQ) = 2p - 2AR,$$

d'où $AR = AQ = p - a$ et de même pour $BR = BP = p - b$ et $CP = CQ = p - c$. Finalement :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{p-b}{p-c}, \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{p-c}{p-a}, \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{p-a}{p-b},$$

et le théorème 1.1 s'en déduit par multiplication et en appliquant le théorème de Ceva.

Le point de concours de (AP) , (BQ) , (CR) s'appelle point de **Gergonne**.

Dans le cas du cercle exinscrit dans l'angle \widehat{A} dont le centre est noté J , le point P est intérieur à $[BC]$ pour la même raison que ci-dessus, le point R est sur $[AB] \setminus [AB]$ car \widehat{ABJ} est obtus, de même Q est sur $[AC] \setminus [AC]$, et l'on a :

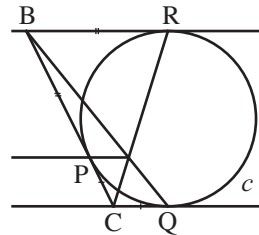
$$2AR = AR + AQ = AB + BR + QC + CA = AB + BP + PC + CA = 2p,$$

d'où $AR = AQ = p$, $BR = BP = p - c$, $CQ = CP = p - b$. Finalement :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{p-c}{p-b}, \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{p-b}{p}, \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{p}{p-c},$$

et le théorème 1.1 s'en déduit comme ci-dessus sachant que (BQ) et (CR) ne sont pas parallèles puisque C et R sont de part et d'autre de (BQ) .

Pour être complet nous devons noter que la procédure utilisée n'exclut pas le cas où l'un des sommets, A par exemple, est « à l'infini » comme sur la figure ci-contre. On laisse alors au lecteur le soin d'achever la démonstration en appliquant le théorème de Thalès.

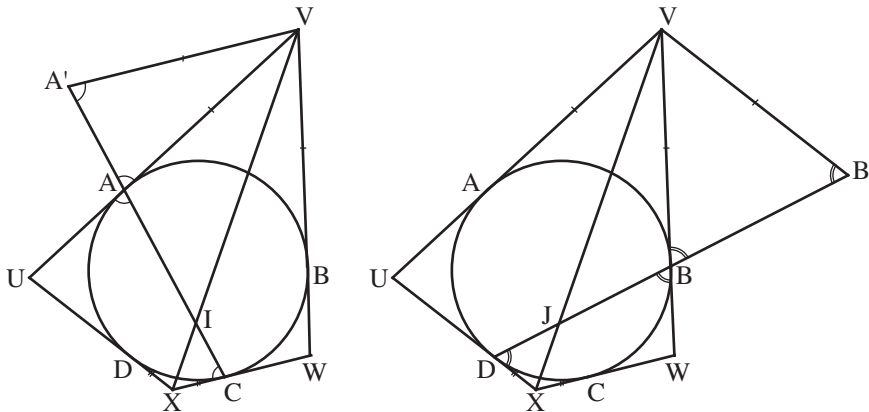


2. Quadrilatères inscrit et circonscrit à un cercle

Théorème 2.1 : Soit un quadrilatère dont les côtés (UV) , (VW) , (WX) , (XA) sont tangents à un même cercle respectivement en A , B , C , D . Alors les diagonales (UW) et (VX) sont concourantes ou parallèles avec les diagonales (AC) et (BD) .

Démonstration : Nous supposons d'abord que les deux quadrilatères sont convexes.

Soit I (resp. J) le point où (AC) (resp. (BD)) rencontre le segment $[VX]$. Par V



menons les parallèles à (WX) et (UX) qui rencontrent (AC) et (BD) respectivement en A' et B' . Par Thalès et les angles nous pouvons écrire :

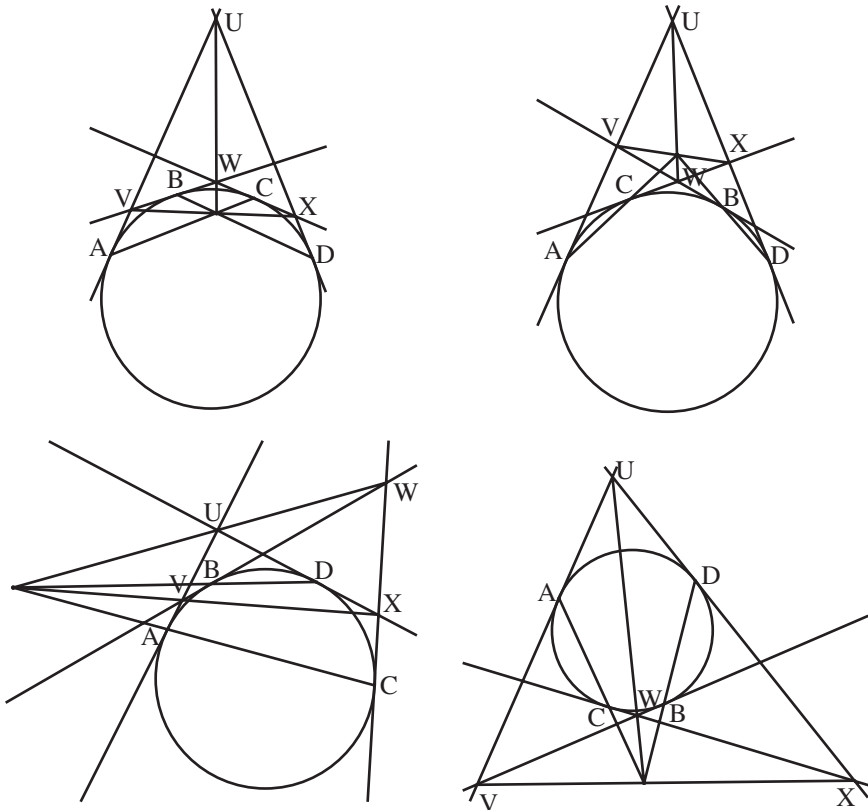
$$\frac{IV}{IX} = \frac{A'V}{CX} = \frac{AV}{CX} = \frac{BV}{DX} = \frac{B'V}{DX} = \frac{JV}{JX},$$

d'où l'on déduit que les points I et J sont identiques, c'est-à-dire que (VX) contient le point d'intersection de (AC) et (BD) . Par la même méthode on montre que (UW) en fait autant.

Abordons maintenant les autres cas de figure en remarquant qu'un quadrilatère peut être convexe, croisé ou bien avoir la forme d'une pointe de flèche (cela ne peut concerner ABCD inscrit dans c). A priori nous aurions donc 2×3 cas de figure qui en fait se réduisent à cinq, car ABCD ne peut être convexe en même temps que UVWX est croisé. Sachant que le cas où les deux quadrilatères sont convexes vient d'être étudié, les quatre figures restantes sont tracées ci-dessous. Plutôt que d'infliger au lecteur la corvée de lire quatre démonstrations assez semblables nous avons pensé que ce dernier aurait plus de plaisir à adapter lui-même aux quatre cas la méthode présentée ci-dessus en remarquant qu'à présent l'égalité algébrique

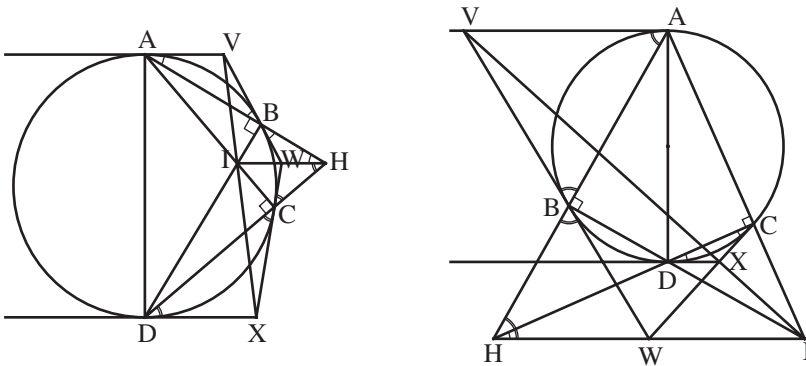
$$\frac{\overline{IV}}{\overline{IX}} = \frac{\overline{JV}}{\overline{JX}}$$

est nécessaire pour prouver l'identité des points I et J.



Dans le cas extrême où les droites (AC) et (BD) sont parallèles, l'axe de symétrie de la figure rend évidente la propriété de parallélisme des quatre droites.

Comme dans 1, n'oublions pas le cas où deux côtés successifs du quadrilatère circonscrit sont parallèles, ce qui donne lieu à une démonstration assez différente :



Le concours de (AC), (BD), (VX) est du ressort de la démonstration donnée ci-dessus, mais il reste à prouver que (WI) est perpendiculaire à (AD). Si H est le point d'intersection de (AB) et (CD), alors I est l'orthocentre du triangle HAD et (HI) est perpendiculaire à (AD), d'où les égalités d'angles marquées sur la figure. Il en découle que (CX) et (BV) sont médianes dans les triangles rectangles IBH et ICH et se coupent en le milieu de l'hypoténuse [IH] ; ce milieu est donc identique à W et (WI) est bien perpendiculaire à (AD).

3. Hexagone circonscrit à un cercle

Préliminaires : Dans ce qui suit c est un cercle de centre O et de rayon 1 ; pour alléger on omettra d'en faire la référence explicite lorsqu'il s'agira d'objets qui s'y rapportent évidemment (pôles et polaires, inversions préservant c).

Soit Δ une droite ne passant pas par O . Dans un repère d'origine O , l'équation de Δ est $\alpha x + \beta y = 1$, où ces coefficients ne sont pas tous deux nuls. Pour $S \in \Delta$, de coordonnées (a, b) , on a : $a\alpha + b\beta = 1$. Les coordonnées (x, y) des points M de c en lesquels (SM) est tangente à c vérifient la relation $ax + by = 1$; notant M et M' ces points lorsqu'il existent et Σ le point de coordonnées (α, β) , on obtient que les points M , M' et Σ sont alignés sur la droite D d'équation $ax + by = 1$.

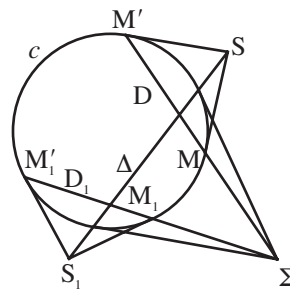
On dit que S et Σ sont les *pôles* respectifs de D et Δ tandis que D et Δ sont les *polaires* respectives de S et Σ .

Pour qu'un point appartienne à sa polaire, il faut et il suffit qu'il appartienne au cercle c .

La polaire D de S est perpendiculaire à (OS) en un point T tel que $OT \cdot OS = 1$; supposant $OS > 1$, (OS) coupe c en deux points A et A' tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{OS+1}{OS-1} = \frac{1+OT}{1-OT} = \frac{TA'}{TA}.$$

Pour que A soit sur la polaire de B , il faut et il suffit que B soit sur la polaire de A .



Pour que trois points soient alignés il faut et il suffit que leurs polaires soient concourantes ou parallèles.

Revenant aux points M et M' , on dit qu'ils se correspondent dans une involution appelée *inversion* de pôle Σ .

Dans un repère complexe quelconque du plan notons z, z' et σ les affixes de M, M' et Σ . Si K est la puissance de Σ par rapport à c on a la relation :

$$(z' - \sigma) \cdot (\bar{z} - \bar{\sigma}) = K.$$

La démonstration du théorème 3-1 nécessitera l'usage du résultat suivant :

Lemme : Soit c un cercle de centre O , p et q deux inversions préservant c , de pôles P et $Q \neq O$, r une inversion ayant les mêmes propriétés et de pôle $\in (PQ)$ ou la symétrie d'axe la perpendiculaire à (PQ) menée par O . Alors :

- a) $r \circ q \circ p$ est involutive,
- b) $q \circ p \circ r \circ q \circ p = r$.

En effet on peut sans restriction supposer le rayon de c égal à 1 ; prenons (PQ) pour axe réel et pour origine le projeté orthogonal de O sur (PQ) ; notant $i\omega$ l'affixe de O , soit σ (réel) l'affixe du pôle d'une inversion préservant c . On a :

$$(z' - \sigma) \cdot (\bar{z} - \bar{\sigma}) = \sigma^2 + \omega^2 - 1,$$

d'où

$$z' = \frac{\sigma\bar{z} + \omega^2 - 1}{\bar{z} - \bar{\sigma}},$$

tandis que $r(z) = -\bar{z}$ si r est une symétrie.

On fait les calculs pour vérifier a).

Ensuite on remarque qu'alors $r \circ q \circ p$ est égale à sa réciproque $p \circ q \circ r$ et b) en découle aussitôt.

Théorème 3-1 (Brianchon) : Soit $UVWXYZ$ un hexagone circonscrit au cercle c . Alors les droites (UX) , (VY) , et (WZ) sont concourantes ou parallèles.

Démonstration : Soit A, B, C, D, E, F les points de contact des droites (UV) , (VW) , (WX) , (XY) , (YZ) , (ZU) . Chaque diagonale de l'hexagone circonscrit définit par son pôle une inversion préservant c ou bien une symétrie axiale si elle passe par O . Supposons, par exemple, que (VY) et (WZ) définissent deux transformations p et q du même type, appelons Ω (éventuellement à l'infini) l'intersection de (VY) et de (WZ) et soit r la transformation définie par (Ω) . On a :

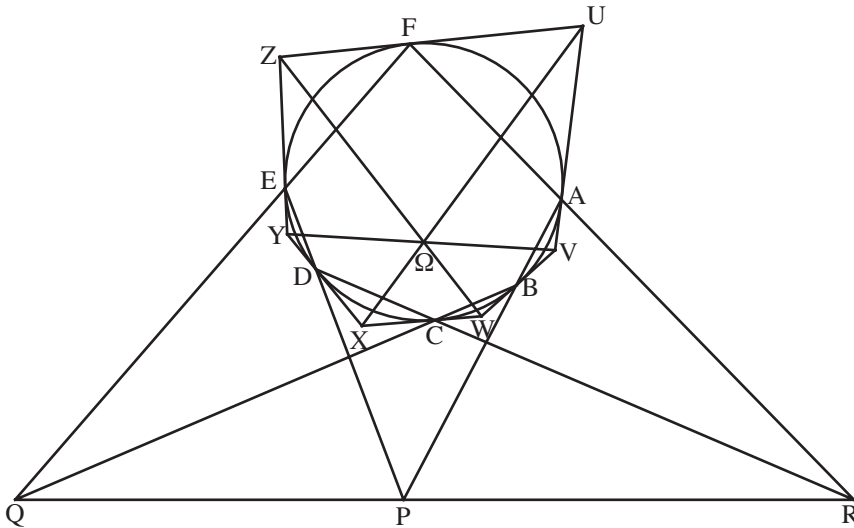
$$p(A) = B, q(B) = C, r(C) = D, p(D) = E, q(E) = F.$$

En appliquant le lemme ou la composition de trois symétries d'axes concourants, on obtient :

$$q \circ p \circ r \circ q \circ p = r,$$

c'est-à-dire $r(A) = F$; sachant $r(C) = D$:

- si r est une symétrie, son axe $(X\Omega)$ est a priori la médiatrice de $[CD]$, mais c' est aussi celle de $[AF]$ qui passe par U , donc (UX) passe par Ω ,
- si r est une inversion de pôle R , la polaire de R est a priori $(X\Omega)$, mais nous venons d'obtenir que c' est aussi (UX) , d'où la même conclusion.



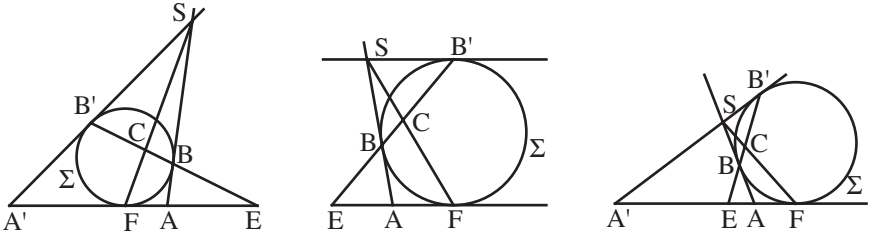
Remarque : Un examen attentif de la démonstration ci-dessus laisse deviner la présence du matériel nécessaire pour prouver l'alignement de $(AB) \cap (DE)$, $(BC) \cap (EF)$, $(CD) \cap (FA)$, c'est-à-dire le théorème de Pascal. Ainsi toute question de priorité de Brianchon sur Pascal (ou l'inverse) est sans doute vaine. Les deux théorèmes se démontrent en même temps grâce à la richesse des problématiques qu'ils expriment.

La géométrie n'aime pas se laisser enfermer dans des tiroirs trop hermétiquement séparés. Naguère certains lecteurs trop superficiels du programme d'Erlangen ont tardé à le comprendre, hélas !

4. Le théorème de Dandelin

Théorème 4.1 : Soit γ une conique propre non circulaire tracée dans le plan P . Il existe alors un cône de révolution dont l'intersection avec P est identique à γ .

Démonstration : On recherche le sommet S du cône dans le plan de symétrie du problème, à savoir le plan Π perpendiculaire à P suivant l'axe focal de γ . On note Σ une sphère tangente à P au point F foyer de γ . Du sommet A on mène dans Π la tangente à Σ au point B . On fait de même du sommet A' si γ a un centre, sinon on mène la tangente parallèle à (AF) ; le point de contact est nommé B' . Si le rayon de Σ est assez petit, les tangentes en B et B' se coupent du même côté que B et B' par rapport à (AF) en un point S que l'on prend pour sommet d'un cône Γ circonscrit à Σ suivant un cercle c et dont le demi-angle au sommet est noté θ .



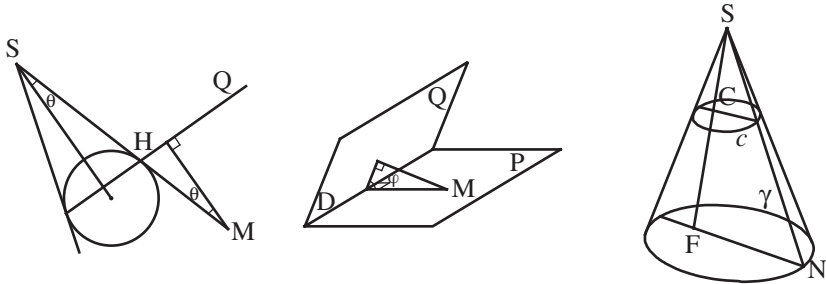
Sachant que F n'est pas le milieu de $[AA']$, le plan Q de c coupe P suivant une droite D dont nous allons montrer qu'elle est la directrice de γ associée à F . En effet appelons E l'intersection de la droite D avec l'axe focal de γ . Par rapport au cercle d'intersection de Σ et de Π , la polaire de E passe par F et par S pôle de (BB') , c'est donc (SF) . Appelant C l'intersection de (SF) et de (BB') , on a que C est sur la polaire de E par rapport au cercle c , d'où la relation :

$$\frac{EB}{CB} = \frac{EB'}{CB'}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{EA}{FA} = \frac{EA'}{FA'}$$

(= 1 si (SB') est parallèle à P) et E est bien sur la directrice de γ .



Soit φ l'angle aigu ou droit formé par P et Q . Pour tout point M de Γ si (SM) coupe c en H on a : $MF = MH = \frac{d(M,Q)}{\cos\theta}$ et $d(M,Q) = d(M,D) \sin\varphi$ si M appartient à P . D'où en prenant $M = A$, la constante e de γ vaut $\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}$. Il vient donc que l'intersection de Γ et de P est contenue dans γ .

Inversement soit $N \in \gamma$; le plan SNF coupe Q suivant une droite passant par C donc coupant c en deux points distincts dont les perspectives sont deux points distincts de $(FN) \cap \gamma$ (voir plus haut). L'un de ces points est nécessairement N

puisque (FN) coupe γ en deux points au plus. Finalement γ est bien contenue dans Γ .

5. Généralisation aux coniques

Le théorème de Dandelin ayant été établi, tout ce qui a été dit en 1-2-3 peut l'être aussi en remplaçant « cercle c » par « conique propre γ » à condition d'étendre la signification de certains mots. Ainsi :

Dans la figure 1, on applique le théorème 1.1 à l'hyperbole en remplaçant concours par parallélisme.

Dans la figure 2, on applique le théorème 1.1 à la parabole et les points B, P, C sont à l'infini.

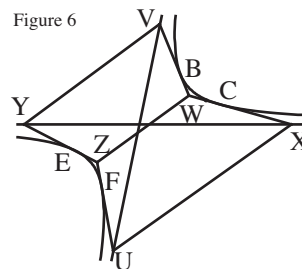
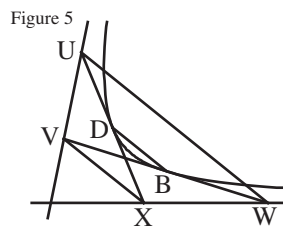
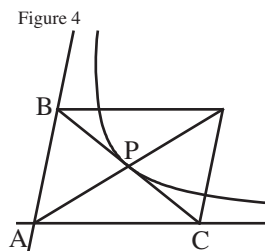
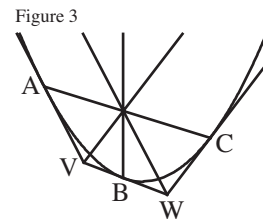
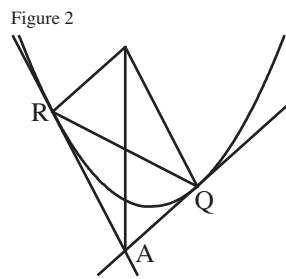
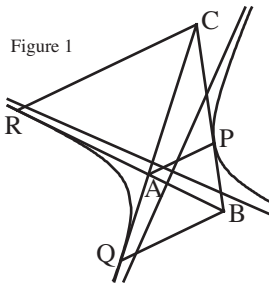
Dans la figure 3, on applique le théorème 2.1 à la parabole et les points U, D, X sont à l'infini.

Dans la figure 4, on applique le théorème 1.1 à l'hyperbole et les points Q et R sont à l'infini.

Dans la figure 5, on applique le théorème 2.1 à l'hyperbole et les points A et C sont à l'infini.

Dans la figure 6, on applique le théorème 3.1 à l'hyperbole et les points A, D, Q sont à l'infini.

Bien entendu les résultats obtenus peuvent l'être aussi par des calculs particuliers plus ou moins compliqués.



Je dois à l'IUFM du Pacifique (antenne de Wallis) et spécialement à Catherine Lamine-Zablocki, agrégée de l'Université, d'avoir pu réaliser la frappe de cet article dans un contexte a priori difficile et je les en remercie chaleureusement.