L'exponentielle en environnement informatique

André Stoll(*)

Voila comment j'organise mon cours en début de terminale S :

Chapitre I *: théorème de dérivation des fonctions composées* et en parallèle en salle info *le TD numéro 1* (fichier joint).

Pourquoi ? Ce chapitre me permet de reprendre rapidement la notion de dérivée vue en première – c'est rassurant pour les élèves –, de la compléter et d'introduire un nouveau théorème indispensable pour la suite.

Chapitre II *: la fonction exponentielle.*
Préliminaires : le TD d'info, le cours d'électronique où on cherche une fonction $t \to i(t)$ *qui vérifie une relation de la forme* $qi'(t)+ri(t)=e$ *d'où la notion d'équation différentielle.*
§ I *: Définition.*

1. *Problème. Résoudre l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0)=1. \end{cases}$$

Théorème.
Le problème ci-dessus admet une solution.
Cette solution est unique.

Démonstration(1) *: la première partie du théorème est admise (parce qu'on n'a pas les éléments nécessaires pour démontrer l'existence). Par contre l'unicité est démontrée ainsi que le fait que, pour tout x,* $f(x) > 0$.

Définition de la fonction exponentielle. C'est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0)=1. \end{cases}$$

À partir de là, on a suffisamment d'éléments pour étudier la fonction exponentielle et démontrer la propriété fondamentale (avec, il est vrai, quelques problèmes comme l'existence du nombre e par exemple – le théorème des valeurs intermédiaires ne sera vu que quelques chapitres plus tard).

Je laisse passer une semaine et j'attaque le TD numéro 2 (fichier joint).
Et cette fonction est immédiatement mise en œuvre en électronique et physique.

(*) Lycée Couffignal à Strasbourg.

(1) Cette démonstration est d'ailleurs à connaître et fait l'objet d'une question de cours lors d'un devoir en classe.

TD 1

Terminale S – Maths en environnement info 1 –

Existe-t-il une fonction égale à sa dérivée ?

Dans ce TD on cherche une fonction f, dérivable sur **R**, qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Comme on ne sait pas si une telle fonction existe ou non, on procède de la manière suivante : dans un premier temps, ON ADMET son existence et on cherche un certain nombre de propriétés et ce n'est qu'après que l'on essaie de démontrer son existence.

ON ADMET QUE f EXISTE

A. Construction d'une représentation graphique approchée de f par la méthode d'Euler sur l'intervalle $[-2 , 2]$:

1. On découpe l'intervalle $[0 , 2]$ en segments de longueur h (h est le pas du découpage) : $[x_0 , x_1]$, $[x_1 , x_2]$, …, $[x_n , x_{n+1}]$, …
   Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et de h.
2. On pose $y_n = f(x_n)$. Démontrer à l'aide de l'approximation affine de y_{n+1} que
   $$y_{n+1} \approx y_n(1+h)$$
   et en déduire une approximation de y_n en fonction de n et de h.
3. Prendre $h = 0{,}1$ et, à l'aide du logiciel Excel (par exemple), construire une représentation graphique approchée de f sur $[0 , 2]$.
4. Recommencer pour d'autres valeurs de h (sur la même figure).
5. Procéder de manière identique sur l'intervalle $[-2 , 0]$.

B. Recherche de quelques résultats et propriétés (en utilisant les résultats ci-dessus) :

1. Quelle est la valeur de $f(1)$?
2. Soit $a \in [0 , 2]$; trouver une relation (simple) entre $f(a)$ et $f(-a)$.
3. Soit a et b deux nombres de $[-2 , 2]$ de telle sorte que $a + b$ soit également dans $[-2 , 2]$; comparer $f(a + b)$ et $f(a)\,f(b)$.
   Démontrer la relation trouvée (difficile).
4. Soit a un nombre de $[-2 , 2]$ de telle sorte que $2a$ soit également dans $[-2 , 2]$; comparer $f(2a)$ et $[f(a)]^2$.

Peut-on à présent répondre à la question posée au début du TD ?

TD 2

Terminale S – Maths en environnement info 2 –

Équations différentielles et méthode d'Euler

Les deux premières questions sont liées. La troisième est indépendante.

1. Soit l'équation différentielle (E1) : $3y' - y = 0$.
   a. En utilisant la méthode d'Euler donner une représentation graphique (approchée) sur [–2 , 2] de la fonction f solution de (E1) qui vérifie $f(0) = \frac{1}{2}$ (on admet – provisoirement – que f existe).
   b. On pose $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x}$. Montrer que cette fonction g est solution de l'équation différentielle (E1). Représenter graphiquement g sur la même figure que f.
   c. Démontrer que les deux fonctions f et g sont égales.
   d. Conclusion ?

2. Soit l'équation différentielle (E2) : $6y' - 2y + 1 = 0$.
   a. En utilisant la méthode d'Euler donner une représentation graphique (approchée) sur [–2 , 2] de la fonction j solution de (E2) qui vérifie $j(0) = 1$ (on admet – provisoirement – que j existe).
   b. On pose $k(x) = j(x) - \frac{1}{2}$. Montrer que cette fonction k est solution de l'équation différentielle (E1) et démontrer que les deux fonctions k et g sont égales. En déduire une expression de la fonction j à l'aide de le fonction exponentielle.
   c. Conclusion.

3. En utilisant la méthode d'Euler donner une représentation graphique (approchée) sur [−1,5 ; 1,5] de la fonction t solution de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ et $t(0) = 0$ (prendre $h = 0{,}03$).

   Sur la même figure, représenter graphiquement la fonction tangente. Qu'en pensez-vous ?