Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre

Claire Dupé & Yves Olivier

Qu'est-ce que PISA ?

L'organisation de coopération et de développement économique, l'OCDE, a créé en 1997 le programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA). Ce programme d'évaluation concerne les élèves de 15 ans quel que soit leur parcours scolaire et vise à évaluer dans quelle mesure ces jeunes sont préparés à relever les défis de la vie réelle. Cette évaluation mesure non pas des connaissances au sens strict, mais des capacités à mobiliser et appliquer des connaissances dans des situations diverses. Les exercices posés font l'objet d'une concertation au niveau international sur ce qui est considéré comme nécessaire au futur citoyen.

L'évaluation PISA ne vise pas à évaluer les compétences acquises par les élèves dans les programmes de mathématiques à un niveau donné comme le font par exemple, en France, les évaluations EVAPM en prise avec un niveau de classe précis (sixième, troisième ou seconde) ou comme le pratiquent certaines évaluations de la DEP en travaillant sur des échantillons représentatifs (comme les évaluations en fin de troisième par exemple). Cette évaluation, qui rappelons-le, vise à évaluer une certaine « culture » mathématique à un niveau d'âge donné (15 ans) indépendamment de la classe ou des programmes que suit l'élève, apporte donc des informations complémentaires aux autres évaluations menées par la DEP (Direction de l'évaluation et de la prospective). Ce protocole permet de révéler les points forts et les points faibles de nos élèves dans un contexte international indépendamment des choix de formation des programmes nationaux.

Tous les trois ans, un domaine est principalement évalué :
– PISA 2000 - compréhension de l'écrit ;
– PISA 2003 - culture mathématique ;
– PISA 2006 - culture scientifique.

Outre des items relevant de la compréhension de l'écrit et de la culture scientifique, des items rattachés à un domaine transversal nommé « Problem Solving » ont été proposés en 2003. Il s'agit d'analyse et d'organisation de systèmes complexes tirés de la vie courante. Cette dénomination anglo-saxonne sera conservée dans ce document. La traduire par « Résolution de problèmes » serait bien trop éloigné du sens mathématique associé à cette dernière dénomination.

La culture mathématique selon PISA.

La culture mathématique selon PISA est « l'aptitude d'un individu à identifier et comprendre le rôle des mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques en fonction des exigences de sa vie, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi ».

Il faut remarquer qu'en 2003, la répartition des exercices en culture mathématique s'est portée sur un découpage en quatre champs disciplinaires décrits ci-dessous, plutôt que par compétences générales(1), contrairement aux autres domaines d'évaluation de PISA, comme la compréhension de l'écrit et la culture scientifique.

Description des quatre champs

- ***Change and relationship*** (« **Variations et relations** »). Les compétences évaluées sous cet intitulé sont très variées parmi lesquelles : lire, interpréter, exploiter une représentation graphique ; appliquer ou établir une formule.
- ***Quantity*** (« **Quantité », nombres et grandeurs**). Les items proposés mettent en jeu la proportionnalité ainsi que des compétences telles que : s'informer, trier en fonction de critères donnés. Ils peuvent aussi faire appel à des méthodes de dénombrement à l'aide, par exemple, d'arbres.
- ***Space and shape*** (« **Espace et formes** »). Les compétences évaluées reposent sur l'interprétation des configurations, sur des calculs d'aires et de périmètres ou l'appréhension de figures de l'espace.
- ***Uncertainty*** (« **Incertitude », statistiques et probabilités**). En statistique, les compétences évaluées concernent la lecture et/ou l'interprétation de relevés statistiques présentés sous différentes formes, l'utilisation de caractéristiques de position d'une série statistique, la lecture critique d'une représentation graphique. En probabilité, les supports utilisés sont classiques : tirages aléatoires, lancers de dés, ...

Cependant, cette culture mathématique ne couvre pas entièrement les contenus mathématiques habituellement enseignés en France. En particulier certains champs, considérés en France comme essentiels, en sont absents : algèbre, calcul littéral, trigonométrie (angles), étude des objets géométriques (formes et transformations). Il en est de même pour certaines compétences dans le domaine du raisonnement hypothético-déductif et de la logique (utiliser un contre-exemple, distinguer propriété directe et propriété réciproque, …).

Les modalités de l'évaluation

Les élèves doivent résoudre des exercices avec des supports étroitement liés à la vie quotidienne (prévisions météo, dés à jouer, télésiège, notes à un examen, etc.), ou mettant en jeu des compétences très variées comme : utiliser un langage et des opérations mathématiques, donner une argumentation mathématique, savoir

(1) Ceci en raison du peu de stabilité observé de ces compétences lors des pré-tests.

identifier une question à caractère mathématique, savoir modéliser une situation pour poser un problème mathématique, etc.

Ainsi PISA, n'est pas directement lié aux programmes scolaires français, mais est, en revanche, plus proche de certains programmes anglo-saxons. Dans l'exemple suivant la phrase en gras en est une illustration.

TREMBLEMENT DE TERRE

On a diffusé un documentaire sur les tremblements de terre et la fréquence à laquelle ils se produisent. Ce reportage comprenait un débat sur la prévisibilité des tremblements de terre.

Un géologue a affirmé : « Au cours des vingt prochaines années, **la probabilité qu'un tremblement de terre se produise à Zedville est de deux sur trois**. »

Parmi les propositions suivantes, laquelle exprime le mieux *ce que veut dire ce géologue* ?

A Puisque $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, il y aura donc un tremblement de terre à Zedville dans 13 à 14 ans à partir de maintenant.

B $\frac{2}{3}$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, on peut donc être certain qu'il y aura un tremblement de terre à Zedville au cours des 20 prochaines années.

C La probabilité d'avoir un tremblement de terre à Zedville dans les vingt prochaines années est plus forte que la probabilité de ne pas en avoir.

D On ne peut pas dire ce qui se passera, car personne ne peut être certain du moment où un tremblement de terre se produit.

Il est aussi important de remarquer que même lorsque les exercices correspondent à des contenus des programmes français, les supports employés et les tâches demandées ne sont pas toujours familiers aux élèves.

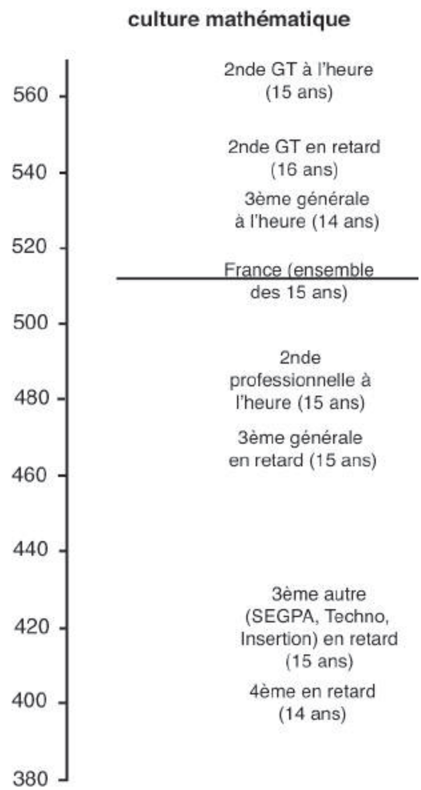
Il est regrettable qu'aucun des exercices proposés par l'équipe française n'ait été retenu par le consortium international dans les livrets de l'évaluation, alors que certains de ces exercices ont été utilisés par l'OCDE pour illustrer la présentation générale de l'opération !

Les performances des élèves français lors de PISA 2003

Pour permettre les comparaisons internationales, le score moyen des pays de l'OCDE est arbitrairement fixé à 500, avec un écart-type de 100 : deux-tiers des pays sont placés entre 400 et 600.

Au sein des 30 pays de l'OCDE, la France obtient un score global en culture mathématique significativement au-dessus de la moyenne, se classant au 13ème rang de ce groupe.

Les scores des élèves français sont relativement peu dispersés, mais des écarts de score très significatifs sont observés entre élèves de troisième et ceux de seconde dans tous les domaines.



On considère dans PISA des élèves ayant le même âge, ce qui signifie que les élèves de 15 ans qui sont en troisième ont une « année de retard » par rapport aux élèves de quinze ans qui sont en seconde qui eux sont « à l'heure ». Une étude comparative (française uniquement) a montré par contre que les élèves de 14 ans en troisième ont un score à peu près identique à celui de leurs aînés de 15 ans en seconde. Ce que l'on peut voir sur le graphique ci-contre.

Sur le graphique ci-contre, le score moyen de la France de 511 est à mettre en regard de l'intervalle des scores moyens qui s'étend de 356 à 550. Ce score n'est donc pas à assimiler à 511 sur 1000 ! Par ailleurs, les écarts de score entre filles et garçons(2) ne sont pas très significatifs.

Parmi les exercices proposés dans l'évaluation de 2003 certains sont des reprises de l'évaluation 2000. Cela permet ainsi de mesurer pour la première fois dans le cadre de PISA l'évolution des scores des élèves au cours du temps. En culture mathématique, sur les deux sous-domaines communs aux épreuves de 2000 et de 2003 (« Espace et formes » et « Variations et relations »), la France maintient son niveau précédent, au-dessus de la moyenne OCDE.

La France se situe :

– ***au 10ème rang*** dans le champ « Variations et relations » (*en étant non significativement différent des pays classés entre le 7ème et le 14ème rang*).
– ***au 15ème rang*** pour le champ « Quantité » (*en étant non significativement différent des pays classés entre le 9ème et le 20ème rang*).
– ***au 13ème rang*** pour le champ « Espace et formes » (*en étant non significativement différent des pays classés entre le 10ème et le 17ème rang*).
– ***au 16ème rang*** pour le champ « Incertitude » (en étant non significativement différent des pays classés entre le 10ème et le 17ème rang).

Au delà de ces résultats très globaux, il est intéressant d'aller étudier les items de plus près (compétences mises en jeu, production d'élèves, difficultés liées au texte, à la présentation des questions, ...).

(2) Cela est souvent différent dans les différentes évaluations internationales en mathématiques mais reste, semble-t-il, mal expliqué.

Nous avons choisi pour la suite de cet article, de nous pencher plus particulièrement sur le champ « Quantité »(3).

Ce champ présente des taux de réussite disparates allant de 22,1 % à 89,5 %. Il est composé d'items relevant d'un travail sur les nombres entiers et sur les nombres décimaux (travail s'appuyant sur des comparaisons, sur la proportionnalité, sur l'application de procédés de calcul, ...) ainsi que d'items relevant de mathématiques discrètes, tels que des dénombrements.

Seuls certains items de cette évaluation sont libres de publication, les autres étant réservés pour des évaluations ultérieures. Aussi allons-nous tenter, à travers les items « libérés », de donner un éclairage sur la diversité des résultats obtenus par les élèves français.

Comportements d'élèves face à des situations présentant des similitudes

Considérons les deux situations suivantes :

Question 1 : CHOIX	**Question 2 : SKATE**
Dans une pizzeria, la pizza de base comporte deux garnitures : du fromage et des tomates. Vous pouvez y ajouter des garnitures **supplémentaires**, à choisir parmi les quatre garnitures suivantes : olives, jambon, champignons et salami. Thierry veut commander une pizza avec deux garnitures **supplémentaires différentes**. Entre combien de combinaisons différentes Thierry peut-il choisir ? Réponse : …….. combinaisons.	Le magasin propose trois types de planche différents, deux jeux de roulettes différents et deux jeux d'accessoires différents. Il n'y a qu'un seul choix possible pour le jeu d'axes. Combien de skates différents Éric peut-il monter ? A 6 B 8 C 10 D 12

Et les résultats :

Question 1 : CHOIX	**Question 2 : SKATE**
Taux de réussite France : **59 %** (3ème rang sur 30 pays) *Taux de réussite moyen de l'OCDE* : 48,8%	Taux de réussite France : **46,5%** (15ème rang sur 30 pays) *Taux de réussite moyen de l'OCDE* : 45,5%

Ces items font tous deux appel à l'organisation et à la structuration logique de données. Leur résolution peut reposer sur la construction d'une arborescence. Le dénombrement n'étant pas une procédure routinière pour nos élèves de troisième et de seconde, nous allons nous intéresser aux méthodes employées par les élèves et tenter de donner des explications sur cette différence de réussite.

Pour l'exercice « Choix », les élèves avaient une place importante dans le cahier pour effectuer des recherches. En ce qui concerne la seconde question de l'exercice « Skate », la présentation était tout à fait différente. D'une part l'élève ne disposait

(3 Une analyse plus complète des autres champs paraîtra dans un dossier « Éducation et formation » de la DEP.

pas de place pour faire ses recherches, d'autre part la réponse devait être choisie parmi plusieurs proposées (QCM). On peut penser que ces deux aspects engagent moins les élèves à la construction d'un raisonnement : ceci est tout à fait corroboré par l'examen d'un échantillon aléatoire de cahiers dans lequel aucune trace de recherches n'a été trouvée. L'influence du type de questionnement sur la réussite des élèves français semble être sensible.

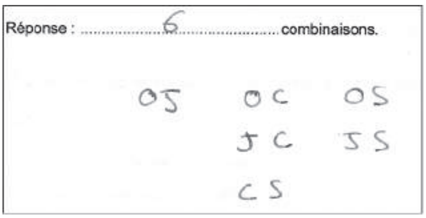
Cependant, il ne faut pas non plus négliger le fait que, pour cette question de l'exercice « Skate », l'arborescence est plus complexe à construire que dans l'exercice « Choix ».

Exemples et analyses de productions d'élèves

Environ 10 % des élèves qui ont répondu à l'exercice « Choix », ont fait apparaître des traces de leurs méthodes et recherches, parmi lesquelles on peut identifier :

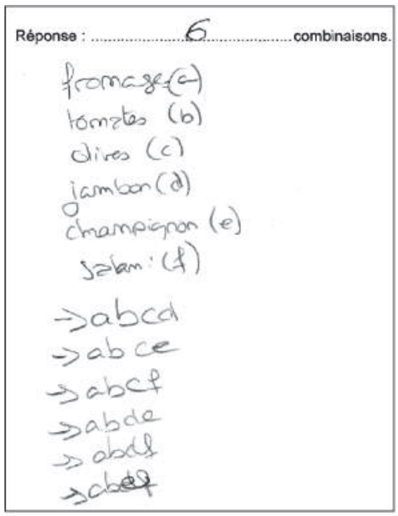
➢ des stratégies correctes :
- une « écriture » de toutes les combinaisons possibles (sous des formes variées), avec dans certains cas des réponses incorrectes :

élève A


Réponse : ....6.......... combinaisons.

OS OC OS
JC JS
CS

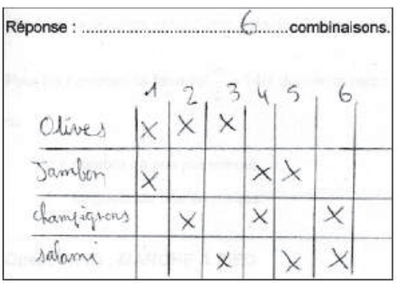
élève B


Réponse : ....6.......... combinaisons.

fromage (a)
tomates (b)
olives (c)
jambon (d)
champignon (e)
salami (f)

→ abcd
→ abce
→ abcf
→ abde
→ abdf
→ abef

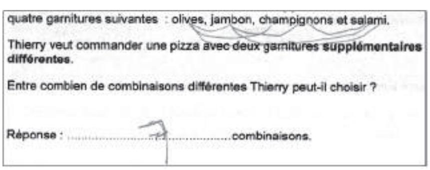
élève C


Réponse : ....6.......... combinaisons.

	1	2	3	4	5	6
Olives	X	X	X			
Jambon	X			X	X	
champignons		X		X		X
salami			X		X	X

- la construction d'un schéma ;

élève D

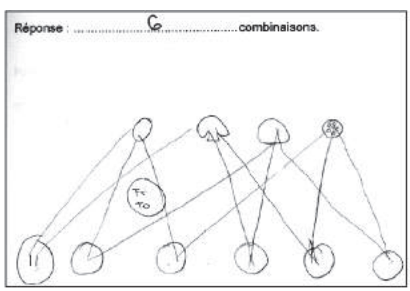

quatre garnitures suivantes : olives, jambon, champignons et salami.

Thierry veut commander une pizza avec deux garnitures supplémentaires différentes.

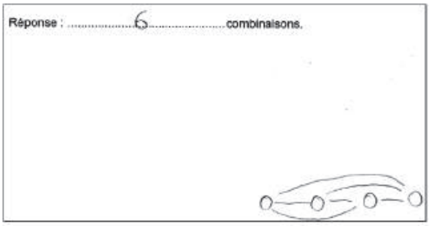
Entre combien de combinaisons différentes Thierry peut-il choisir ?

Réponse : ....7.......... combinaisons.

élève E


Réponse : ....6.......... combinaisons.

élève F


Réponse : 6 combinaisons.

- Gestion mentale des combinaisons :

élève G


Réponse : 3+2+1 = 6 combinaisons.

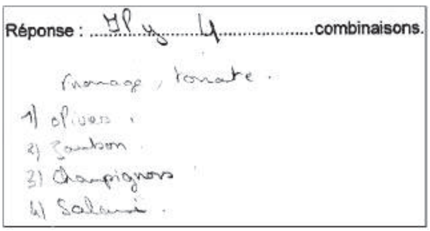
➢ des stratégies incorrectes :

Parmi les réponses erronées, les plus fréquentes sont « 4 combinaisons » (près de 10%) et « 12 combinaisons » (pour 7 % des élèves).

Au regard des productions ci-dessous, la réponse 4 provient très certainement d'élèves qui ont omis que la pizza commandée devait contenir deux garnitures supplémentaires.

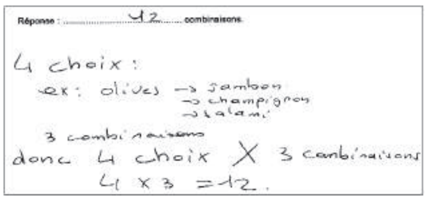
Quant à la réponse « 12 », les élèves ont, manifestement, bien pris en compte les deux garnitures supplémentaires mais n'ont pas « éliminé » les combinaisons identiques.

élève H


Réponse : Il y a 4 combinaisons.

fromage, tomate.
1) olives.
2) Jambon.
3) Champignons.
4) Salami.

élève I


Réponse : 12 combinaisons.

4 choix :
ex : olives → jambon
→ champignon
→ salami
3 combinaisons
donc 4 choix × 3 combinaisons
4 × 3 = 12.

Dans l'exercice « Skate », il est également intéressant d'observer les réponses erronées choisies par les élèves :

Environ un quart a choisi la réponse « 6 », qui est probablement issue de l'opération « 3 × 2 » qui correspond au nombre de combinaisons possibles avec 3 sortes de planches et 2 sortes de jeux de roulettes (omission des jeux d'accessoires). De plus, cette réponse « 6 » est la première proposée, ce qui a pu inciter certains élèves à ne pas remettre en cause leur raisonnement erroné.

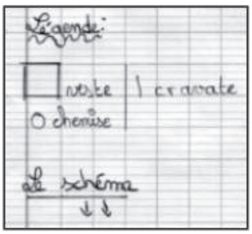
Près d'un élève sur 5 a considéré que l'on pouvait monter « 8 » skates différents. Les élèves ont très vraisemblablement additionné le nombre d'éléments différents de chaque sorte : « 3 + 2 + 2 + 1 ».

Comme cela a déjà été souligné, le dénombrement n'est pas habituel pour un élève français de 15 ans, bien que ces procédures aient été initiées à l'école élémentaire dans la construction des nombres entiers et que les élèves puissent y avoir recours lors de la résolution de situations-problèmes. Les productions des élèves de début de collège sont souvent d'une grande richesse. Malheureusement, il semble que ces procédures se « perdent » au cours des années de collège car elles ne sont plus sollicitées. La schématisation a tendance à disparaître au collège car on privilégie souvent l'algébrisation du problème.

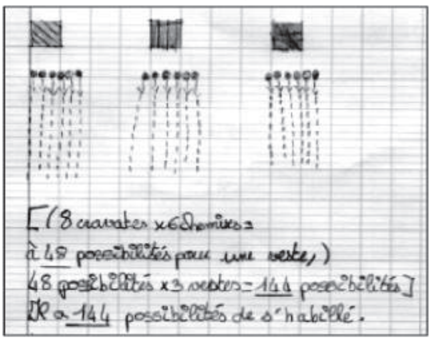
La situation suivante, proposée en sixième dans le cadre d'un devoir maison, illustre ces propos.

> Dans l'entreprise où travaille M. Legrand, il est obligatoire de porter une veste, une chemise et une cravate.
> M. Legrand possède 3 vestes différentes, 6 chemises de couleurs distinctes et 8 cravates non identiques.
>
> En dehors des autres vêtements qu'il doit naturellement porter, de combien de possibilités différentes, M. Legrand dispose-t-il pour s'habiller lorsqu'il va à son travail ?
>
> *Vous devrez expliquer votre réponse (phrase, schéma ou autre ...).*

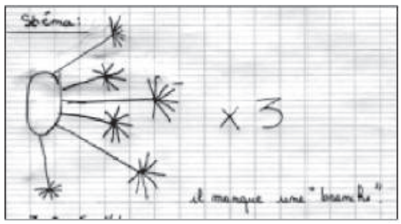
élève A



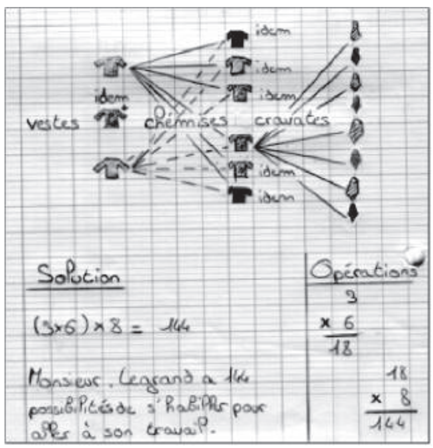
Légende faite par l'élève



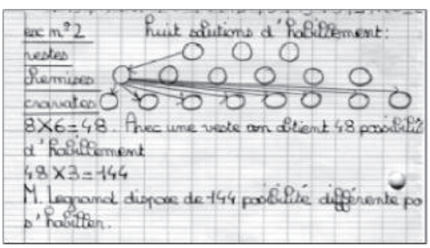
élève B



élève C



élève D



Réponses d'élèves face à des situations « ouvertes » (questions 1 et 3 de l'exercice « Skate »)

Considérons la situation suivante :

SKATE

Éric est un grand amateur de skate. Il se rend dans le magasin SKATERS pour vérifier quelques prix.

Dans ce magasin, il est possible d'acheter un skate complet. Ou bien on peut acheter une planche, un jeu de 4 roulettes, un jeu de 2 axes ainsi que les accessoires, et monter soi-même son skate.

Les prix des articles mis en vente par ce magasin sont les suivants :

Article	Prix en zeds	
Skate complet	82 ou 84	
Planche	40, 60 ou 65	
Un jeu de 4 roulettes	14 ou 36	
Un jeu de 2 axes	16	 
Un jeu d'accessoires (roulements à bille, cales en caoutchouc, écrous et vis)	10 ou 20	  

Question 1 : Skate

Éric veut monter lui-même son skate. Quel est le prix minimum et le prix maximum des skates à monter soi-même dans ce magasin ?

(a) Prix minimum : ……… zeds.

(b) Prix maximum : ……… zeds.

Question 3 : Skate

Éric peut dépenser 120 zeds et il veut acheter le skate le plus cher qu'il peut obtenir avec l'argent dont il dispose.

Combien d'argent Éric peut-il se permettre de dépenser pour chacun des 4 éléments ? Inscrivez vos réponses dans le tableau ci-dessous.

Élément	Montant (zeds)
Planche	
Roulettes	
Axes	
Accessoires	

Les résultats obtenus :

Question 1 : SKATE Taux de réussite France : **66,9%** Code 2 : 52,9 % [deux réponses correctes] Code 1 : 27,8 % [une seule réponse correcte] Code 0 : 12,6 % (24ème rang sur 30 pays) Taux de réussite moyen de l'OCDE : 72%	**Question 3 : SKATE** Taux de réussite France : **55,1%** (10ème rang sur 30 pays) Taux de réussite moyen de l'OCDE : 49,8%

Le taux de réussite de 66,9 % à la question 1 est calculé de la façon suivante : (2 × 52,9 + 1 × 27,8) / 2. En effet, les réponses à la question 1 (tout comme d'autres items de cette évaluation) n'ont pas toutes le même poids : le code « 2 » correspond à un crédit « total » ; le code « 1 » à un « crédit partiel » et le code « 0 » aux autres réponses. On entend ici par « crédit » l'attribution de points pour le score.

L'observation des cahiers des élèves semble montrer que le quart des élèves s'étant trompé sur le maximum ou le minimum a fait des erreurs de calcul plus que des erreurs de sens sur les mots « maximum » et « minimum ». En revanche, parmi les codes « 0 », plus de la moitié sont de la forme « 162 − 221 ». Ces élèves ont bien pris le minimum et le maximum de chacun des articles mais en incluant le skate complet ! Il semble donc plus s'agir d'une erreur de lecture de consigne.

Pour la question 3, un crédit complet était attribué pour les quatre bonnes réponses simultanées. Il n'y avait pas ici de crédit partiel. Cette question demandait aux élèves de faire des essais, critiquer le résultat, recommencer, ... Cette pratique de « l'expérimentation » en mathématiques est peu développée en France lors d'évaluations. Ces compétences sont essentiellement travaillées avec le groupe-classe lors d'activités d'approche de nouvelles notions, mais rarement lors de tests individuels d'évaluation.

Le taux de réussite à cette question est très moyen, mais, tout comme dans les cas précédents, les réponses erronées sont riches en informations. On y trouve, en particulier, des réponses du type :

« 40 ; 36 ; 16 ; 20 » (total 112), « 60 ; 14 ; 16 ; 20 » (total 110), « 65 ; 14 ; 16 ; 20 » (total 105) : réponses respectant la somme maximum à ne pas dépasser mais qui ne tiennent pas compte du fait que le skate acheté devait être le plus cher possible ;

« 65 ; **29** ; 16 ; 10 », « 60 ; **34** ; 16 ; 10 », « 60 ; **25** ; 16 ; **19** » dont le total est bien égal à 120 mais dont une (voire deux) données chiffrées ne correspondent pas à des valeurs du tableau mais ont été « inventées » par les élèves pour que la somme soit bien 120.

L'aspect ouvert de cet exercice n'a vraisemblablement pas trop troublé nos élèves, le taux de non-réponse n'excédant pas 6,6 %. Les stratégies mises en place, même si elles sont non apparentes (très peu de traces de recherche ont pu être observées), ne semblent pas inefficaces. En effet les réponses erronées présentées ci-dessus semblent plus relever d'un « manque d'attention » tant par rapport à la nature des informations contenues dans le tableau que par rapport à la consigne. Pour la dernière question, on constate que la double contrainte (ne pas dépenser plus de 120 zeds et acheter le skate le plus cher possible) a été rarement respectée, les élèves centrant principalement leur proposition sur la première contrainte qui est de plus écrite en chiffres.

Autre exemple de la diversité des stratégies

Considérons la situation suivante :

Question 1 : ÉTAGÈRES

Pour construire une étagère complète, un menuisier a besoin du matériel suivant :

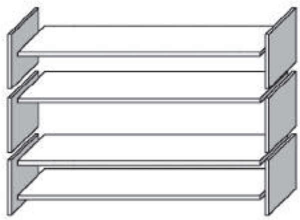
4 planches longues ;

6 planches courtes ;

12 petites équerres ;

2 grandes équerres ;

14 vis.



Le menuisier dispose d'un stock de 26 planches longues, 33 planches courtes, 200 petites équerres, 20 grandes équerres et 510 vis.

Combien d'étagères complètes le menuisier peut-il construire ?

Réponse : ....

Les résultats obtenus :

Question 1 : ÉTAGÈRES
Taux de réussite France : **62,7%**
(15ème rang sur 30 pays)

Taux de réussite moyen de l'OCDE : 60,9%

Tout comme pour l'exercice « Choix », on constate que peu d'élèves (environ 10 %) utilisent spontanément l'espace du cahier disponible pour leur recherche.

- La majorité de ces traces écrites s'appuie sur des procédures utilisant des divisions (rarement euclidiennes, alors qu'elles suffisent dans ce genre de situation).

élève A

Réponse : Le menuisier pourra construire 5 étagères complètes.
car :
26 ÷ 4 = 6,5
33 ÷ 6 = 5,5
200 ÷ 12 = 16,7
20 ÷ 2 = 10
510 ÷ 14 = 36,4
Le chiffre le plus petit est 5,5, il pourra donc construire 5 étagères complètes.

élève B

Réponse : 5 étagères
26 : 4 = 6 p. longues + 2.
33 : 6 = 5 p. courtes. +
200 : 12 : 16 p. é. + 8.
20 : 2 = 10 .. é
510 : 14 = 36 + 6.

élève C

Réponse : il peut construire 5 étagère complète
26 ÷ 4 = 6,5
33 ÷ 6 = 5,5

élève D

Réponse : On ne peut construire que 5 étagère
26 ÷ 4 = 6,5
33 ÷ 6 = 5,5 → plus petite valeur
200 ÷ 12 = 16,666667 => limite de construction des étagères.
20 ÷ 2 = 10 (on ne peut continuer la construction
510 ÷ 14 = 36,428 des étagères si on n'a plus de matériel)

- D'autres méthodes sont basées sur la recherche pour chacun des matériaux utilisés, du multiple inférieur le plus proche.

élève E

Réponse : Le menuisier peut construire 5 étagères complète
4 × 6 = 24 → 6 ÉTAGÈRES
6 × 5 = 30 → 5 ÉTAGÈRES
12 × 16 = 192 → 16 ÉTAGÈRES
10 × 2 = 20 → 10 ÉTAGÈRES
14 × 36 = 504 → 36 ÉTAGÈRES

- Quelques élèves n'ont pas fait apparaître de calculs (très certainement gérés mentalement) mais ont fait référence au nombre « limitant » de planches courtes pour étayer leur réponse :

élève F

Réponse : 5 étagères
les planches courtes est le matériel limitant il ne pourra construire seulement 5 étagères complètes

élève G

Réponse : il peut construire 5 étagères complètent car si il veut en faire plus il lui manquera des planches courtes on remarque que sont stock n'est pas égal dans les materiaux.

- La réponse erronée la plus fréquemment donnée par les élèves est « 6 » (environ 10 % des élèves). Les élèves se sont contentés de rechercher le nombre d'étagères réalisables avec les planches longues, sans vérifier si les autres éléments étaient en nombre suffisant.

Réponse : 26 : 4 = 6,5 Réponse 6
≃ 6

Pour cet exercice, les élèves semblent disposer de stratégies globalement « efficaces » mais on constate, tout comme dans l'exercice « Skate » (question 3), que les élèves n'ont pas l'habitude d'expérimenter des valeurs en les mettant à l'épreuve des autres contraintes de l'énoncé. D'une manière plus générale, les élèves pensent rarement à vérifier la cohérence du résultat mais on peut aussi se demander dans quelle mesure la multiplicité des contraintes n'a pas gêné certains élèves.

Des compétences certaines en proportionnalité

Considérons la situation suivante :

TAUX DE CHANGE
Mademoiselle Mei-Ling, de Singapour, prépare un séjour de 3 mois en Afrique du Sud dans le cadre d'un échange d'étudiants. Elle doit changer des dollars de Singapour (SGD) en rands sud-africains (ZAR).

Question 1 : TAUX DE CHANGE
Mei-Ling a appris que le taux de change entre le dollar de Singapour et le rand sud-africain est de : 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling a changé 3 000 dollars de Singapour en rands sud-africains à ce taux de change.
Combien Mei-Ling a-t-elle reçu de rands sud-africains ?
Réponse : ....

Question 2 : TAUX DE CHANGE
Lorsque Mei-Ling rentre à Singapour après 3 mois, il lui reste 3 900 ZAR. Elle les reconvertit en dollars de Singapour, constatant que le taux de change a évolué et est à présent de : 1 SGD = 4,0 ZAR.
Combien Mei-Ling reçoit-elle de dollars de Singapour ?
Réponse : ....

Question 3 : TAUX DE CHANGE
Au cours de ces trois mois, le taux de change a évolué et est passé de 4,2 à 4,0 ZAR pour un SGD.
Est-il plus avantageux pour Mei-Ling que le taux de change soit de 4,0 ZAR au lieu de 4,2 ZAR lorsqu'elle reconvertit ses rands sud-africains en dollars de Singapour ?
Donnez une explication pour justifier de votre réponse.

Les résultats obtenus :

Question 1 : TAUX DE CHANGE Taux de réussite France : **89,1%** (2ème rang sur 30 pays)	Taux de réussite moyen de l'OCDE : 79,7%
Question 2 : TAUX DE CHANGE Taux de réussite France : **84,9%** (3ème rang sur 30 pays)	Taux de réussite moyen de l'OCDE : 73,9%
Question 3 : TAUX DE CHANGE Taux de réussite France : **50,9%** (5ème rang sur 30 pays)	Taux de réussite moyen de l'OCDE : 40,3%

À travers cet exercice, il apparaît clairement que les élèves français disposent de réelles compétences sur le thème de la proportionnalité. Cette notion est travaillée et réinvestie régulièrement en France d'où les résultats plus qu'honorables dans les questions 1 et 2 de cet exercice. Il faut aussi préciser que, malgré l'emploi d'unités monétaires virtuelles, les situations en lien avec l'argent sont familières aux élèves. D'autre part, du fait du récent passage du Franc à l'Euro, ce type d'activité était particulièrement d'actualité et n'a pas dérouté nos élèves.

Cependant dès que l'usage de la proportionnalité n'est plus aussi direct ou appliqué à des situations plus complexes, les résultats sont en deçà.

C'est le cas de la troisième question de cet exercice, qui outre la demande d'une explication justifiée, nécessitait d'identifier un élément probant ou de mettre en place un calcul pour tirer une conclusion.

Pour cette question, l'obtention d'un crédit complet était subordonné à une réponse « Oui » argumentée, par exemple :

- en s'appuyant sur les différents montants obtenus et en les comparant :

Lorsqu'un SGD vaut 4,0 ZAR.

$\frac{3900 \times 1}{4,0} = 975$ SGD

Mei-Ling reçoit 975 dollars de Singapour (SGD)

Lorsqu'un SGD vaut 4,2 ZAR

$\frac{3900 \times 1}{4,2} \approx 928,6$ SGD

Mei-Ling reçoit environ 928,6 dollars de Singapour (SGD).

$975 > 928,6$

Il est donc plus avantageux pour Mei-Ling que le taux de change soit de 4,0 ZAR (rands sud-africains).

- en précisant que lorsque l'on divise par 4,2 le résultat est inférieur à celui obtenu lorsque l'on divise par 4 :

> Il est plus avantageuse que le taux soit de 4,0 ZAR car pour effectué ce change, le dénominateur sera ce taux et par conséquent, plus le dénominateur est faible, plus le résultat est élevé donc plus elle recupérera de dollars.

- en indiquant qu'un dollar de Singapour coûte 0,2 rands sud-africains de moins :

> Oui c'est plus avantageux pour elle car au lieu d'être divisés par 4,2 c'est rands sont divisés par 4,0, elle a donc un bénéfice de 0,2 ZAR par rapport au premier taux de change.

Près d'un tiers des élèves ont fourni d'autres réponses (« oui » sans explication ou avec une explication incorrecte ; « non » et toutes autres réponses). Quelques réponses « non » avec un raisonnement tout à fait correct montrent que l'expression « Est-il plus avantageux ? » a été mal comprise.

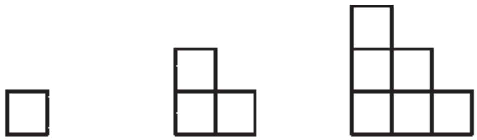
Parmi les exercices présentés dans cet article, cette dernière question présente le plus fort taux de non réponse. Il faut bien être conscient que, outre les problèmes liés à la difficulté d'expression, transposer un calcul, l'interpréter dans un autre contexte, argumenter une réponse, reste une réelle difficulté pour nos élèves.

> Non, ce n'est pas du tout avantageux pour elle car lors de sa reconverssion de ses rands Sud-Africains en dollars de Singapour elle perd de l'argent car pour converti il faut diviser et plus on divise un nombre par un grand nombre et plus le résultat diminue.
>
> Exemple :
>
> 3900 : 4,0 = 975
>
> 3900 : 4,2 = 928,5

Comprendre et appliquer un algorithme

Considérons la situation suivante :

MOTIF EN ESCALIER
Question 1 : motif EN ESCALIER
Rémy réalise un motif en escalier en utilisant des carrés. Il suit les étapes suivantes :
Comme on peut le voir, il utilise un carré à l'étape 1, trois carrés à l'étape 2 et six carrés à l'étape 3.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

Combien de carrés devra-t-il utiliser à l'étape 4 ?
Réponse : …………… carrés.

Les résultats obtenus :

Question 1 : MOTIFS EN ESCALIER
Taux de réussite France : **61,3%**
(22ème rang sur 30 pays)

Taux de réussite moyen de l'OCDE : 66,2%

Tout comme dans la première question de l'exercice « Pommier » de l'évaluation PISA 2000 (cf. article paru dans le bulletin vert nº 439 de l'APMEP), l'élève doit faire preuve d'anticipation afin de déterminer le nombre de carrés à l'étape 4, cas non représenté. Il est cependant difficile de comparer les taux de réussite de ces deux questions, car dans le cas de l'exercice ci-dessus, seule une valeur était attendue, contrairement à la première question de l'exercice « Pommier » pour laquelle 7 cases d'un tableau étaient à compléter. Cependant, et tout comme cela avait déjà été signalé, on retrouve la difficulté à généraliser, à anticiper pour nos élèves.

Tout comme les exercices « Skate » ou « Choix », ce genre d'exercice n'est pas particulièrement travaillé et encore moins souvent proposé lors d'évaluations individuelles.

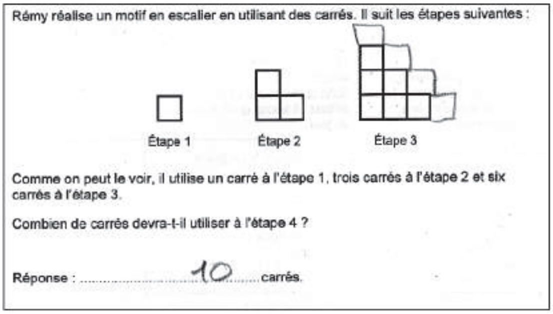
Malgré la place dont ils disposaient sur le cahier, très peu d'élèves se sont autorisés à réaliser un dessin supplémentaire ou bien à compléter le dessin à l'étape 3. D'une manière plus générale, seuls 10 % des élèves ont laissé des traces de leur recherches, parmi lesquelles :

- dessin de l'étape 4 ou bien ajout de carrés sur le schéma de l'étape 3 (en remarquant en particulier la production d'un élève qui, après avoir fait un dessin de l'étape 4, l'a ensuite barré, comme s'il était gênant de laisser une trace des recherches) :

élève A


Réponse : ....10.................. carrés.

élève B

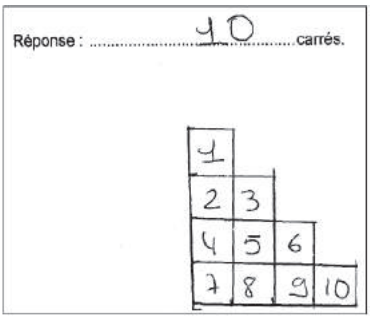

Rémy réalise un motif en escalier en utilisant des carrés. Il suit les étapes suivantes :

Comme on peut le voir, il utilise un carré à l'étape 1, trois carrés à l'étape 2 et six carrés à l'étape 3.

Combien de carrés devra-t-il utiliser à l'étape 4 ?

Réponse : ....10........ carrés.

élève C


Réponse : ....10.............. carrés.

- allusion aux quatre carrés à ajouter sans avoir recours à un schéma, avec dans certains cas l'écriture de la somme des premiers entiers :

Réponse : ..4+3+2+1=......10......... carrés.

Réponse : ....10...................... carrés.

6 + 4

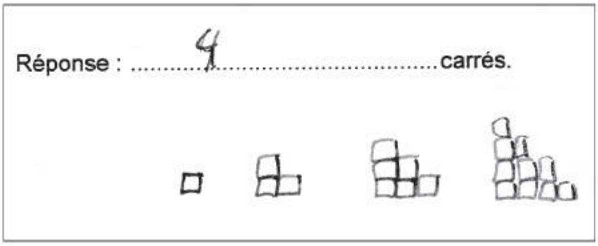
Parmi les erreurs les plus fréquemment rencontrées :

- le nombre « 9 » est donné par un peu plus de 15 % des élèves. Il provient certainement d'une mathématisation trop hâtive, l'élève reconnaissant 1, 3, 6 comme les premiers multiples de 3.

Réponse : ....9.................................. carrés.

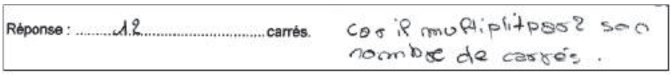
3 x 3 = 9 Carrés

- environ 8% ont apporté la réponse « 4 », correspondant au nombre de carrés à ajouter à l’étape quatre comme l’illustre la production ci-dessous :



Il est d’ailleurs important de souligner que dans cette production, l’élève qui a pris soin de refaire les quatre étapes a indiqué sur la dernière, <u>à l’aide d’une couleur différente</u>, les carrés ajoutés par rapport à l’étape précédente.

- près de 6 %, ont répondu « 12 », 6 étant le double de 3, ils ont agi à « l’identique » entre l’étape 3 et l’étape 4.



Conclusion

Avant de dresser toute conclusion ou de lancer toute hypothèse, il est bon de souligner dans un premier temps l’importance du facteur temps dans cette évaluation. Les élèves avaient en effet à répondre à une soixantaine de questions en deux heures, avec, dans certains cas, les trois domaines évalués dans le même cahier. Nos élèves ne sont pas habitués à cette juxtaposition au sein d’une même évaluation et elle nécessite des changements de posture de la part de l’élève. La densité des questions, dont certaines demandaient des justifications pointues, peut aussi expliquer que certaines questions n’aient pas été traitées.

Mais ces arguments n’expliquent pas à eux seuls certains taux de non réponse ou de réponses erronées élevés.

Il est nécessaire de souligner que la majorité des situations proposées dans cet article (à l’exception de l’exercice « Taux de change »), inhabituelles en séquence d’évaluation, valorisent les recherches et les prises d’initiative. Est-ce le cas dans notre enseignement ?

Il faut reconnaître que l’enseignant (de collège ou de lycée), coincé par un temps découpé en séquences de 50 minutes, se voit souvent contraint à limiter le temps de recherche pour pouvoir tenir les objectifs qu’il s’est fixé. La pression permanente par rapport à l’obligation qui nous est faite de « boucler » notre programme, peut inciter certains enseignants à ne pas proposer ce genre de situation.

Pourtant les élèves français de 15 ans montrent, si on les sollicite, qu’ils disposent de procédures leur permettant de résoudre des problèmes pour lesquels ils n’ont pas de solution experte (mathématisation). Il semble donc nécessaire de proposer des situations variées, ouvertes qui ne contribuent pas à un formatage du questionnement et des raisonnements. La prégnance du raisonnement hypothético-déductif et du calcul exact n'amoindrit-il pas toute l'inventivité et la créativité de nos élèves ? Il y a de fortes raisons de penser que oui ! D'autre part, cette prégnance institue un caractère particulier de l'écrit rendu et cela est très présent dans les nombreux cahiers consultés. Le travail y est souvent soigné avec des justifications dans lesquelles on reconnaît fortement un cadre proche de « notre sacro-sainte démonstration géométrique ». Sans renier l'aspect formateur de cette dernière, puisqu'elle contribue à donner une certaine logique à nos élèves, il faut veiller à ne pas les y contraindre.

La question majeure qui se pose à nous, enseignants de Mathématiques en France, et que l'Institution se pose et nous pose (cf. la loi d'orientation et le socle commun) est « Pourquoi enseigner les mathématiques au collège ? ». Cette question pourrait se décliner en plusieurs sous-questions attachées non plus, comme souvent dans notre réflexion, aux contenus, aux techniques et au savoir, mais en termes de compétences dépassant la simple exécution de techniques bien apprises. Cela repose la question « lancinante » du sens, du type de travail à initier en classe, du type du travail d'étude qui l'accompagne mais aussi de la spécificité des mathématiques : utilisation de langages différents, simplification des données permettant l'utilisation d'outils conceptuels, construction de théories, ... et cela pose aussi le problème des modalités de nos évaluations utilisées dans nos classes dont la récente étude comparative de la DEP montre le peu de diversité par rapport à celles pratiquées par d'autres disciplines.

Le temps d'apprentissage est un paramètre important : il faut que nos élèves rencontrent réellement des objets mathématiques et qu'ils aient un certain nombre d'expériences. La diminution des horaires ne va pas dans ce sens, compte tenu des programmes qui restent très « encyclopédiques ». Nous pensons que développer un projet incluant des activités de recherche, des exercices de traductions de données, etc., pourraient redonner à l'enseignement des mathématiques la place qui lui est, à notre sens, due pour l'élévation du niveau de formation de nos élèves et conduire à un réajustement des horaires plus conformes aux programmes. Tout n'est pas à réinventer puisque l'on peut s'appuyer sur de nombreux travaux qu'il suffit de rassembler pour améliorer de manière sensible en rendant attractif et formateur le travail le plus important : celui qui se fait dans nos classes.