PGCD : une idée d'utilisation d'un tableur en classe de Troisième

Lionel Lambotte(*)

Il est parfois difficile de se décider à aller en salle info avec les 25 ou 30 élèves de sa classe. Les conditions matérielles sont souvent insuffisantes, la gestion de classe peut inquiéter le professeur, les aléas techniques risquent de tout gâcher, les idées d'activités ne sont pas toujours évidentes à trouver.
Voici la présentation d'une séance sur la recherche du pgcd de deux entiers naturels et ceux qui voudront l'essayer avec leurs classes trouveront les fichiers utiles (adresses en fin d'article).

I. Présentation de la séance

1. Objectifs

- Trouver le pgcd de deux entiers à l'aide de trois méthodes.
- Comparer l'efficacité de ces trois méthodes.
- Initier les élèves à programmer une feuille de calcul avec une formule simple.

2. Place de la séance dans la progression

Les élèves connaissent les définitions de diviseurs, diviseurs communs à deux entiers, plus grand diviseur commun, nombres premiers entre eux, fraction irréductible. Ils connaissent l'intérêt du pgcd pour rendre une fraction irréductible. Ils savent décomposer un nombre entier naturel en produit de deux entiers à l'aide, entre autres, des critères de divisibilité. Avec cette méthode, ils savent trouver le pgcd de deux entiers naturels.
La classe a déjà utilisé un tableur en technologie l'an passé.

3. Organisation

Le travail s'est déroulé sur 2 heures non consécutives. Les 24 élèves de la classe se sont regroupés à deux par poste. Les objectifs ont été présentés oralement, puis les consignes de travail sont données par écrit (annexe 1). Ce document est à compléter par chaque élève à l'aide du fichier pgcd.xls. Les élèves peuvent utiliser le matériel qu'ils souhaitent (brouillon, calculatrice, cahier de leçons, …)

4. Descriptif succinct du travail demandé

Il ne s'agit pas de s'attarder sur les calculs permettant d'obtenir le pgcd mais plutôt de donner du sens à cette notion et aux différentes techniques proposées. C'est pour cette raison que j'ai réalisé les programmes des tableaux des exercices 1 à 3. (voir annexe 2).

(*) Collège Haut De Penoy (ZEP) VANDŒUVRE LES NANCY.
Ce texte est déjà paru dans le Petit Vert (Bulletin de la Régionale de Lorraine) nº 80.

Exercice 1 : à l’aide de la feuille de calcul intitulée recherche des diviseurs, trouver le pgcd de 156 et de 78 puis celui de 96 et 102 puis celui de 165 et 182

	A	B	C	D	E	F	G	
1	Recherche des diviseurs de :		**54**		Recherche des diviseurs de :		**25**	
2								
3								
4		1		54		1		25
5		2		27				
6		3		18				
7								
8						5		
9		6		9				
10								

Les élèves ne peuvent modifier que les cellules C1 et G1 et la liste des diviseurs s’affiche en colonne.

Exercice 2 : à l’aide de la feuille de calcul intitulée *algorithme des différences* et de la propriété : « si a et b sont deux entiers positifs avec $a > b$ alors $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b, a-b)$ », trouver le pgcd de 636 et 371 puis celui de 877 et 531. Les élèves doivent ensuite préciser à quel endroit il est possible d’arrêter l’algorithme pour lire directement la valeur du pgcd.

	A	B	C	D	E
1					
2	**Calcul du P.G.C.D de deux nombres entiers**				
3					
4					
5		**a**	**b**	**a-b**	
6		25	14	11	
7		14	11	3	
8		11	3	8	
9		8	3	5	
10		5	3	2	
11		3	2	1	
12		2	1	1	
13		1	1	0	
14		1	0	1	
15		1	0	1	
16		1	0	1	
17		1	0	1	

Les élèves peuvent uniquement modifier les valeurs de a et de b. Les résultats obtenus au fur et à mesure de l’exécution de l’algorithme s’affichent alors et j’ai choisi de ne pas l’interrompre puisque je veux que les élèves donnent du sens à leur recherche de pgcd.

Exercice 3 : à l’aide de la feuille de calcul intitulée algorithme d’Euclide et de la propriété : « si a et b sont deux entiers positifs non nuls avec $a > b$ alors $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b », trouver le pgcd de 875 et 93 puis celui de 878 et 542.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	Calcul du P.G.C.D de deux nombres entiers								
3									
4									
5		a	b	quotient de la division euclidienne			reste de la division euclidienne		
6		675	93		9			38	
7		93	38		2			17	
8		38	17		2			4	
9		17	4		4			1	
10		4	1		4			0	

Exercice 4 : On demande d'effectuer des tests pour comparer les trois méthodes et de rédiger une conclusion sur l'efficacité de ces méthodes.

Exercice 5 : c'est un petit exercice pour montrer comment on programme un tableur. Il faut réaliser un tableau présentant le pgcd de deux nombres choisis à l'aide de la fonction « =pgcd(cellule1 ; cellule2) ». Les élèves vérifient leur programme à l'aide des nombres utilisés dans les exercices précédents.

5. Déroulement de la séance

La séance commence par la présentation orale des objectifs de la séance puis la distribution des consignes de travail. Les élèves s'installent et se mettent au travail. Aucune prise en main du tableur n'est faite.
À la fin de la première heure, presque tous les groupes ont terminé le troisième exercice. Quelques-uns ont commencé le quatrième.
La deuxième heure commence par la correction rapide d'un exercice du livre puis une synthèse orale de la séance précédente. Les élèves terminent le travail. Une synthèse collective est faite. On recense les différentes méthodes d'obtention du pgcd de deux entiers naturels en précisant les techniques opératoires utilisées, les avantages et inconvénients de chacune d'elle, puis les élèves notent le cours.

II. Analyse de la séance

1. Intérêt de l'utilisation d'un tableur

Le tableur permet de travailler rapidement et sur un très grand nombre de cas. C'est donc un outil tout à fait adapté à la comparaison de l'efficacité des différentes méthodes. Sans lui, ce travail serait très fastidieux.
Il permet aux élèves de ne pas être retardés par une erreur de calcul ou une difficulté dans les techniques opératoires.
Il permet de réguler les différents rythmes de travail. En effet on peut demander aux groupes les plus avancés d'affiner leurs conclusions sur l'efficacité des méthodes en leur donnant quelques pistes. Il est donc important que les fichiers des exercices 1 à 4 aient été préparés par le professeur afin que le programme fonctionne avec n'importe quels nombres entiers naturels. La programmation des algorithmes (annexe 2) doit permettre de tester tous les cas. Par exemple, pour la recherche des diviseurs, il faut penser au cas ou le nombre est un carré parfait. Pour l'algorithme des différences il faut prévoir que l'algorithme peut avoir beaucoup de lignes (si $a = 154$ et $b = 3$ par exemple).

2. Travail des élèves

• *Mise en route*

Ce travail a été proposé à deux classes. La première composée d'élèves actifs, volontaires avec un bon état d'esprit, s'est mise rapidement au travail en tâtonnant pour retrouver les procédures de manipulation d'un tableur. Il est tout de même à noter que certains très bons élèves ont été décontenancés par le type d'activité et ont mis un certain temps à s'y repérer et à trouver les solutions
Avec l'autre classe beaucoup moins intéressée, moins active et moins volontaire, les élèves désemparés par l'utilisation d'un tableur et par l'obligation de donner du sens à leur travail ont voulu être guidés. Les questions fusaient et on entendait des remarques du type : « *je n'y comprends rien, qu'est-ce que c'est que ce truc ?, qu'est-ce qu'il faut faire ?* », « *on va prendre la calculatrice pour faire les opérations* ». Il a donc fallu intervenir auprès de chaque groupe pour reformuler la consigne et préciser aux élèves qu'ils ne seraient pas plus guidés. Ils se sont ensuite mis en situation de recherche.

• *Contenus des travaux*

La recherche du pgcd à l'aide de la liste des diviseurs des deux entiers n'a posé aucun problème. Ceci s'explique par le fait que ce type de travail avait déjà été fait en classe avec des nombres « simples ».
Pour l'algorithme des différences, certains groupes ont utilisé leur calculatrice pour remarquer ensuite que les différences étaient notées à l'écran de l'ordinateur. Pour environ la moitié d'entre eux, il n'a pas été évident de trouver le pgcd à partir de l'algorithme. Ceci s'explique évidemment par le fait qu'on est obligé de donner du sens à l'affichage et à la suite d'égalités

$$\mathrm{pgcd}(25,14) = \mathrm{pgcd}(14,11) = \mathrm{pgcd}(11,3) = \mathrm{etc}.$$

Par contre dès le premier pgcd trouvé l'exercice se termina très facilement. Tout le monde a vu qu'à la fin les résultats se répétaient et chaque groupe a su trouver l'endroit où on pouvait interrompre l'exécution.
Le travail sur l'algorithme d'Euclide n'a pas posé de problème. Lorsque les élèves en arrivèrent au paragraphe de comparaison des différentes méthodes, beaucoup de remarques s'élevèrent de tous côtés. Tout d'abord, bon nombre d'élèves se sont demandés s'il fallait utiliser les mêmes nombres pour comparer les différentes méthodes. Très vite convaincus de cette nécessité, les élèves se sont interrogé sur la signification de l'expression « efficacité des méthodes ». Après quelques précisions et quelques essais, l'ensemble de la classe s'accorda à dire que l'algorithme des différences était souvent long mais la technique plutôt simple. La méthode de recherche de diviseurs parut sympathique quand les nombres étaient « petits ». Les critères de divisibilité ont été alors d'une grande aide. Quand les diviseurs n'étaient pas simples (par exemple pour 259), l'exécution de cette méthode n'était pas rapide car les essais successifs allongeaient le temps de recherche.
L'algorithme d'Euclide a fait l'unanimité en terme de rapidité mais la technique opératoire laissa perplexe plusieurs groupes qui se sont demandé comment effectuer la division euclidienne.

D'autres groupes plus en avance ont conclu par quelques remarques très intéressantes comme par exemple – je cite – « avec l'algorithme des différences, quand les deux nombres sont très éloignés (2 et 114) ou très proches (56 et 59), l'algorithme est très long » et ils ont réussi à justifier leur réponse à partir de leurs exemples. D'autres groupes ont réussi à justifier le fait que l'algorithme d'Euclide « s'arrête » contrairement à celui des différences.

III. Conclusion

La partie d'arithmétique du programme de Troisième est tout à fait propice à l'utilisation du tableur et c'est pour réfléchir aux méthodes d'obtention du pgcd, que j'ai utilisé cet outil. La programmation des différents fichiers n'a pas été simple. En effet, je souhaitais qu'elle couvre tous les cas possibles ce qui est un gain de temps incontestable par rapport à une activité papier.
L'enthousiasme, l'entrain, la réflexion des élèves m'ont agréablement surpris ; peut-être qu'une rapide prise en main du tableur avec la classe la moins motivée aurait permis aux élèves de concentrer leur réflexion sur le contenu du travail et non sur les manipulations du tableur.
C'est avec une grande conviction sur l'intérêt de l'utilisation du tableur que je reconduirai cette activité avec d'autres classes et j'invite tous les collègues qui le souhaitent à se procurer les fichiers et le support élèves sur :
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/activites/PGCD_Lambotte/fiche_eleve.doc
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/activites/PGCD_Lambotte/feuill_de_calcul.xls
Les deux fichiers, comprimés :
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/activites/PGCD_Lambotte.zip

Annexe 1

Recherche du plus grand diviseur commun avec un tableur

I. À partir de la liste des diviseurs

Ouvre le répertoire xxxxx du disque xxxxx puis le fichier pgcd.
Enregistre ce fichier dans ton répertoire privé sous le nom *pgcd*.
Affiche à l'écran la feuille de classeur intitulée *recherche des diviseurs* puis trouve le pgcd de 156 et de 78 puis celui de 96 et 102 puis celui de 165 et 182.

II. A l'aide de l'algorithme des différences :

Propriété (admise) :
si a et b sont deux nombres entiers positifs avec $a > b$,
alors $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b, a-b)$.

Il s'agit d'utiliser cette propriété pour comprendre l'algorithme des différences.
a) Affiche à l'écran la feuille de classeur intitulée *algorithme des différences*. À l'aide de cet algorithme et de la propriété énoncée ci-dessus, complète :

$$\begin{aligned}\mathrm{pgcd}(636,371) &= \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad)\\ &= \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad)\\ &= \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad)\end{aligned}$$

En déduire le pgcd de 636 et de 371 :

b) En t'aidant du modèle de a) et en détaillant ou non ton raisonnement, trouve le pgcd de 877 et de 531 :

c) Où peut-on stopper l'algorithme et lire directement la valeur du pgcd ?

III. À l'aide de l'algorithme d'Euclide

Propriété (admise) :
si a et b sont deux nombres entiers positifs, non nuls avec $a > b$ on a $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Il s'agit d'utiliser cette propriété pour comprendre l'algorithme
a) Affiche à l'écran la feuille de classeur intitulée *algorithme d'Euclide*. À l'aide de cet algorithme et de la propriété énoncée ci-dessus, complète :

$$\begin{aligned}\mathrm{pgcd}(875,93) &= \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad)\\ &= \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad) = \mathrm{pgcd}(\quad,\quad)\end{aligned}$$

En déduire le pgcd de 875 et de 93 :

b) En t'aidant du modèle de a) et en détaillant ou non ton raisonnement, trouve le pgcd(878 ;542) :

IV. Comparaison des différentes méthodes d'obtention du pgcd

Teste les trois méthodes avec les nombres de ton choix et rédige une conclusion sur l'efficacité de ces méthodes.

Quelle méthode préférerais-tu utiliser sur papier avec deux nombres :
– inférieurs à 100 ?
– supérieurs à 100 ?

V. Programmation

Ouvre un nouveau classeur puis enregistre-le sous le nom *programme*.
Réalise un tableau avec la valeur d'un nombre entier dans une première colonne, la valeur d'un autre entier dans une deuxième colonne puis la valeur du PGCD dans une troisième colonne. Pour cela tu utiliseras la fonction « = PGCD(cellule;cellule) ».
Pour savoir si ta programmation est correcte, entre les nombres utilisés dans les paragraphes précédents et observe le pgcd trouvé.

Annexe 2

Quelques exemples de formules

Exercice 1 : Recherche des diviseurs communs

B4 = =SI(MOD($C$1;A4)=0;SI(OU($C$1/A4>A4;$C$1/A4=A4);A4;" ");" ")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Recherche des diviseurs de :		122		Recherche des diviseurs de :		25	
2								
3								
4		1		122		1		25
5		2		61				
6								
7								
8						5		

D4 = =SI(B4=" ";" ";SI($C$1/B4=B4;" ";$C$1/B4))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Recherche des diviseurs de :		122		Recherche des diviseurs de :		25	
2								
3								
4		1		122		1		25
5		2		61				

Exercice 2 : algorithme des différences

D6 = =ABS(B6-C6)

	A	B	C	D
1				
2	Calcul du P.G.C.D de deux nomb			
3				
4				
5		a	b	a-b
6		25	14	11
7		14	11	3

B7 = =MAX(C6;D6)

	A	B	C	D
1				
2	Calcul du P.G.C.D de deux nomb			
3				
4				
5		a	b	a-b
6		25	14	11
7		14	11	3

Exercice 3 : algorithme d'Euclide

E6 = =SI(OU(B6=" ";C6=" ");" ";ENT(B6/C6))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Calcul du P.G.C.D de deux nombres entiers							
3								
4								
5		a	b	quotient de la division euclidienne			reste de la division eu	
6		875	93		9			38
7		93	38		2			17

H6 = =SI(OU(H5=0;H5=" ");" ";B6-E6*C6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Calcul du P.G.C.D de deux nombres entiers							
3								
4								
5		a	b	quotient de la division euclidienne			reste de la division eu	
6		875	93		9			38
7		93	38		2			17