Au fil d'un problème…

Henri Bareil(*)

Naguère, quand les bateliers descendaient le Rhône, ils disaient avoir « l'Empire » à leur gauche, le « Royaume » à leur droite[1]. Et nous, qu'avons-nous d'un côté et de l'autre d'une ligne ?[2]

Un problème

Trois points A, B, C *non alignés étant donnés, où doivent se trouver les points* M *de leur plan tels que chacun des orthocentres des triangles respectifs* MAB, MAC, MBC *soit strictement intérieur à son triangle ?*

Pré- et post-faces

- Je ne savais pas répondre à la question.
  Dès lors j'ai cherché selon une méthode classique :
  - s'occuper d'abord d'une condition, …
  - en conjuguer deux, …

- *Ce qui m'a conduit, au fil de l'eau, à des aperçus très divers :*
  - *certains exploitables dès la Sixième* (tracés et fréquentation des figures, conjectures, …), avec des évasions hors du duo « droites-cercles », … *et beaucoup en fin de Collège.*
  - *d'autres* (voire les mêmes, mais avec des exigences de rigueur plus importantes) *en lycée, Seconde ou Première.*
  - *En effet, dans la plupart des situations étudiées :*
    « L'exigence de rigueur peut (doit) être dosée depuis de simples exécutions et/ou observations de figures jusqu'à des raisonnements rigoureux en passant par toutes les étapes possibles (conjectures solidement étayées par exemple par des figures mobiles, îlots de rigueur, admission de certaines étapes clairement repérées, …) et cela en fonction de la classe et surtout des capacités des élèves (éveiller leur curiosité, les faire agir dans un contexte riche, les amener à conjecturer, plutôt que de les bloquer par des exigences excessives) ». (Daniel Reisz)
  - *Cela dépend aussi des conditions de recherche du problème* (en classe, à la maison « en narration de recherche », par équipes, …).
  - Je propose donc des progressions libres, quant aux approfondissements ou points de vue, où on peut se contenter de picorer.

(*) Institut du Lauragais.

(1) Cf. « Le poème du Rhône », de Frédéric Mistral.

(2) Il était classique, au Collège, de se poser la question pour la médiatrice de deux points, la bissectrice d'un angle, …

De la trame mathématique aux mises en œuvre

- *Les conjugaisons relatives à deux puis trois triangles* sont simples quant à leur principe, **donc praticables au Collège**. De plus, elles concourent à remettre sur le tapis **des propriétés de base** (de parallélisme, de cocyclicité avec angles droits, d'intersections de cercles et d'alignements, de symétrie centrale, orthocentre, …).
- *Mais elles font émerger de nombreux cas de figure :*
  Cette variété est *intéressante si et seulement si* :
  – on dispose d'un *logiciel de géométrie dynamique* ;
  – si, à défaut, *on répartit les cas de figure* entre élèves ou groupes d'élèves, surtout si on peut *manipuler* avec du papier transparent.
- *Il existe des « frontières » entre les cas de figure :*
  – l'une d'elles, qui fait conjecturer une *parabole*, puis confirme, simplement, par « $y = ax^2$ », relève donc du lycée. Elle fait l'objet de l'*Annexe 5*.
  – une autre semble faire apparaître une *cardioïde*, courbe qui ne figure guère dans les programmes scolaires ! Mais elle peut donner lieu à de très intéressantes *activités collège* (détachées du problème posé ici) dès la Sixième (?) … et à une bénéfique confrontation de définitions, du niveau Quatrième quant au contenu mathématique en jeu, mais plus délicate : cf. *Annexes 2 et 3*.
- *À travers le contenu mathématique, chacun pourra s'interroger* (cf. éditorial du Bulletin n° 458) *sur :*
  – la mise en œuvre des « *huit moments de la formation scientifique* » et *l'attention aux comportements fondamentaux*,
  – l'émergence et la consolidation de *connaissances fondamentales*.

I. Pour un triangle

Soit un triangle MAB, *d'orthocentre* H (ce qui exclut M sur (AB) sauf à admettre H comme point à l'infini) :

> H *est strictement intérieur au triangle* MAB *si et seulement si les trois angles de* MAB *sont aigus.*

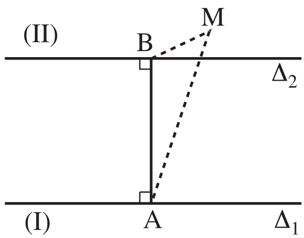


Figure 1

- *Cela exclut, d'emblée, les demi-plans* (I) *et* (II), *cf. Figure 1,* de frontières respectives Δ_1 et Δ_2.
- Quant à la bande (Δ_1,Δ_2), intéressons-nous d'abord à la condition-frontière $\widehat{\mathrm{AMB}} = 90°$ exprimée, sur le dessin, par le cercle Γ_1 de diamètre [AB] : *que se passe-t-il de part et d'autre de* Γ_1 ?

En se ramenant à la frontière, par M′ :

– *si* M *est intérieur à* Γ_1 (cf. Figure 2),

$$\widehat{AMB} > \widehat{AM'B},$$

donc

$$\widehat{AMB} > 90°$$

(quand une démonstration est de niveau collège, j'exprime les angles en degrés).

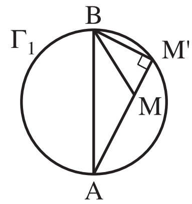


Figure 2

– *si* M *est extérieur à* Γ_1 (cf. Figure 3),

$$\widehat{AMB} < \widehat{AM'B},$$

donc

$$\widehat{AMB} < 90°$$

(sans restriction à la bande (Δ_1,Δ_2)).

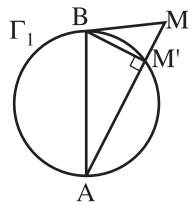


Figure 3

Réciproquement :

Si $\widehat{AMB} < 90°$, M – qui existe – ne peut être ni sur Γ_1, ni intérieur, donc M est à l'extérieur.

Si $\widehat{AMB} > 90°$, M ne peut être ni sur Γ_1, ni extérieur, donc M est à l'intérieur.

ce qui donne des propriétés caractéristiques.

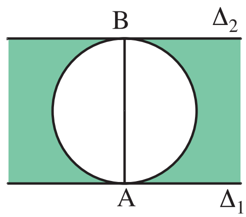


Figure 4

Concluons :

Le lieu géométrique des points M *tels que l'orthocentre du triangle* AMB *soit à l'intérieur de ce triangle est la région coloriée en vert de la figure 4 (frontières exclues).*

Remarques.

1. Au passage, on a obtenu, dans le cas du cercle, une réponse angulaire à la question posée en exergue de l'article.

2. L'énoncé du problème aurait pu être d'emblée transformé en : « … trouver les points M de leur plan tels que les triangles MAB, MBC, MCA soient TOUS acutangles ».

3. On trouvera, en Annexe 1, une proposition d'exercice, due à Bruno Alaplantive, complétant mon étude.

II. Pour deux triangles MAB, MAC

Voici quelques cas de figure, où les régions-solutions sont coloriées en vert (avec, toujours, AC ≤ AB).

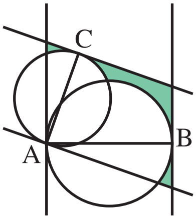


Figure 5 ($\widehat{CAB} < 90°$)

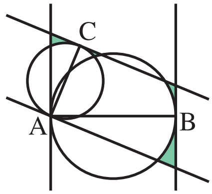


Figure 5′

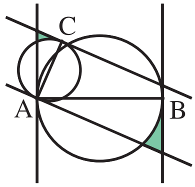


Figure 5″

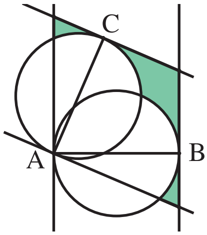


Figure 5‴ (AC = AB ; $\widehat{CAB} < 90°$)

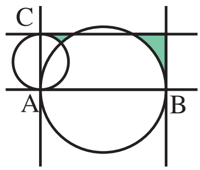


Figure 6 ($\widehat{CAB} = 90°$)

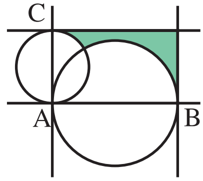


Figure 6′

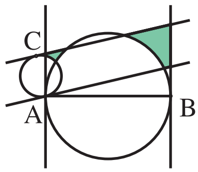


Figure 7 ($\widehat{CAB} > 90°$)

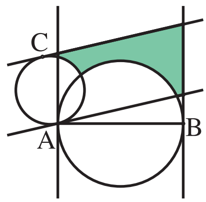


Figure 7′

- *On peut faire des explorations systématiques* avec, par exemple :
  – plusieurs rapports de AB et AC (ainsi AC < AB/2 ; AB/2 < AC ≤ AB ; …) en désignant toujours par AB la plus grande longueur.
  – en faisant varier, avec (AB) fixe, la direction de (AC).

- Une frontière entre des cas de figure est fournie par le cas *où d_2 est tangente au cercle* Γ_1 : ainsi la région-solution est d'un seul tenant dans la Figure 7′ alors qu'elle est en deux morceaux dans la Figure 7.
  Dès lors on peut envisager l'évolution de la figure lorsque d_2 varie en restant tangente au cercle Γ_1.
  Cela fera l'objet des Annexes 3 et 4.

III Cas de trois triangles

1. Avec $\widehat{BAC}$ obtus (et AB ≥ AC, sinon permuter !)

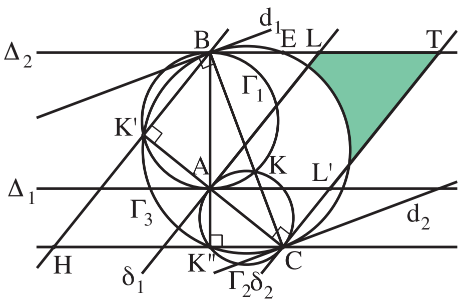


Figure 8

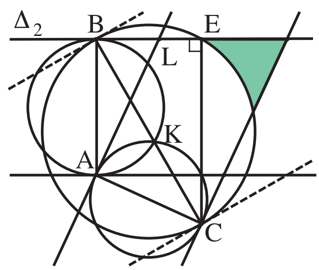


Figure 9

Le lieu de M est la région coloriée en vert, intersection de la région définie au II avec celle définie au I appliqué à [BC] et à « son cercle » Γ_3.

• Remarque 1

La figure 8 est un peu ardue. Pour la rendre plus accessible, on peut :

– tracer d'abord les trois bandes relatives aux côtés de ABC et hachurer les régions extérieures à chaque bande. Cela ne laisse subsister qu'un parallélogramme ALTL′.
– faire intervenir (avec un calque si on travaille sans logiciel) les trois cercles de diamètres respectifs [AB], [AC], [BC], ce qui mord sur le parallélogramme précédent et donne la figure 8.

• Remarque 2 (Collège)

On peut conjecturer des alignements, puis les démontrer :

(BC) *passe par* K, seconde intersection des cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [AB] et [AC]. (En effet, $\widehat{AKB} = 90°$, …).

De même :

– (AC) *passe par* K′, second point commun aux cercles Γ_1 et Γ_3 de diamètres respectifs [AB] et [BC]. (En effet, $\widehat{BK'C} = 90°$, $\widehat{BK'A} = 90°$, …).
– (AB) *passe par* K″, second point commun aux cercles Γ_2 et Γ_3…

• Remarque 3 (Collège, Seconde) – sur une idée de Jean-Pierre Friedelmeyer –

Où interviennent parallélogrammes et centres de symétrie, orthocentres et des symétriques, triangles rectangles inscriptibles, …, donc un bon « noyau » de géométrie … qui conduit plus loin…

1. *Nous connaissons deux hauteurs* (BK′) et (CK″) du triangle ABC. Leur intersection H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. On a (BK′) // δ_2 et (CK″) // Δ_2.
   HBTC est donc un parallélogramme.
   Soit *m* le milieu de [BC], aussi milieu de (HT).
   Le point T, *qui est le point de la zone-solution (coloriée en vert) le plus éloigné du triangle* ABC, *est ainsi le symétrique, par rapport à m, de l'orthocentre* H *de* ABC.

3. Le quadrilatère ABTC est « formé » de deux triangles rectangles de même hypoténuse [AT]. Il est donc inscriptible dans un cercle… Donc :

– le symétrique T, par rapport au milieu de [BC], de l'orthocentre H du triangle ABC, est sur le cercle (ABC).

   Cette démonstration ne fait pas intervenir le fait que $\widehat{ABC}$ est obtus. Elle conduit donc au théorème général : « *Les symétriques, par rapport aux milieux des côtés, de l'orthocentre d'un triangle sont sur son cercle circonscrit* ».

   Cela correspond à la figure 9′ ci-contre (où se révélerait en même temps, s'il s'agissait d'une figure non plane, un parallélépipède de faces AB′CH, AC′BH et A′BHC !).

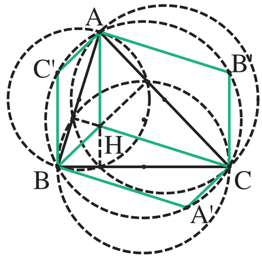


Figure 9′

4. $\widehat{ATC}$ est le supplément de $\widehat{BAC}$ obtus. Il est donc aigu, ce qui manifeste bien le fait que T (donc, avec lui, toute une région) soit à l'intérieur du disque Γ_3.

• **Remarque 4** (Collège)

Le cercle Γ_3 coupe Δ_2 en E tel que $\widehat{BEC} = 90°$, donc en le projeté orthogonal de C sur Δ_2.

• **Frontière entre les deux cas des figures 8 et 9** (la forme de la région-solution varie)**.**

Elle a lieu lorsque E et L sont confondus (le faire découvrir est intéressant…).
Si la longueur AC *est constante et la direction* (AC) *variable, comment se déplace* C *pour cette frontière ?*

Cela fera l'objet de l'Annexe 5.

2. Avec $\widehat{BAC}$ droit

Pas de position possible pour M (cf. Figure 10).

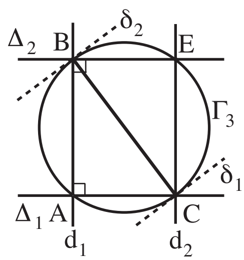


Figure 10

3. Avec $\widehat{BAC}$ aigu

- *Les cas* $\widehat{ACB}$ *obtus ou* $\widehat{ABC}$ *obtus renvoient au cas 1 du III* en permutant les rôles des côtés de ABC.
- *Le seul cas à étudier ici est donc le cas où les trois angles de* ABC *sont aigus.* Lorsque [AB] est choisi, cela situe C dans la région définie au I (cf. Figure 11).

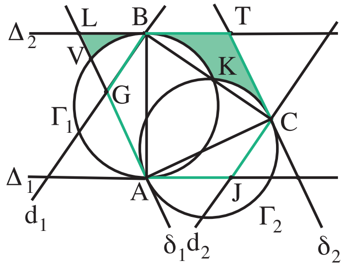


Figure 11

Méthode 1 :

Les conditions relatives à MAB et MAC ne laissent subsister que les deux régions coloriées en vert. Or la région LVB est en dehors de la bande (d_1,d_2) et BTC est à l'intérieur du cercle de diamètre [BC], puisque $\widehat{BTC} > 90°$ ($\widehat{BTC}$ est le supplémentaire de $\widehat{BAC}$).

Donc aucune région ne convient : Lorsque le triangle ABC est acutangle, *il n'y a pas de point* M *solution*.

Méthode 2 :

En s'appuyant directement sur le I, M doit être à l'intersection des trois bandes (Δ_1,Δ_2), (δ_1,δ_2), (d_1,d_2), ce qui, figure 11, *le situe dans l'hexagone* AGBTCJ.

Pour des raisons déjà expliquées (triangles rectangles de même hypoténuse), le cercle circonscrit à ABC l'est aussi à l'hexagone AGBTCJ (en vert) sur la figure 11. Il n'y a donc aucun point possible en dehors du cercle circonscrit au triangle ABC.

Reste à exclure les points intérieurs aux disques Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Or ceux-ci recouvrent tout l'intérieur du triangle ABC (faire intervenir ses hauteurs).

Et comme $\widehat{BTC}$, $\widehat{CJA}$, $\widehat{AGB}$ sont obtus, les disques recouvrent aussi BTC, … : il ne reste plus rien ! (Pour $\widehat{BTC}$, … obtus, cf. toujours les quadrilatères ABTC, … et $\widehat{BTC}$ supplément de $\widehat{BAC}$, …).

Méthode 3 (*en utilisant la « remarque 3 du cas* $\widehat{BAC}$ *obtus »*) :

Reprenons à partir de $\widehat{BAC}$ obtus et *rendons* $\widehat{BAC}$ *aigu à son tour* : l'orthocentre H passe alors à l'intérieur de Γ_3 et, de même, son symétrique T par rapport au milieu *m* de [BC]. *La zone-solution disparaît…*

IV. Conclusion … provisoire

- *L'ensemble des points* M *qui conviennent*, pour un, deux ou trois triangles, *n'est pas une « ligne » : tantôt il s'agit d'une ou plusieurs régions, tantôt il est vide*. Ce qui devrait permettre recherche et débats avec quelque attrait …, le plaisir de belles figures en couleurs … et celui de la progression des raisonnements.
- *Il reste que le sujet n'est pas épuisé :*
  - *Cf. les Annexes.*
  - Et aussi, d'autres débats possibles… Par exemple, avec deux triangles, quand passe-t-on d'une région-solution à « deux morceaux » à une région à « trois » ou à « un » ? … débats qui prennent un sens en recherche, narration de recherche, …

Annexes

L'annexe 1 accentue la réflexion sur des régionnements du plan.

Les annexes 2, 3 et 5, mises en orbite par la recherche sur le problème initial, **se développent indépendamment de lui**. On peut, bien sûr, les y transférer mais alors il faut considérer que nous ne pouvons le faire que pour « le point variable étudié se déplace sur … » et il y aurait lieu de compléter par une étude réciproque tenant compte des conditions du problème initial.

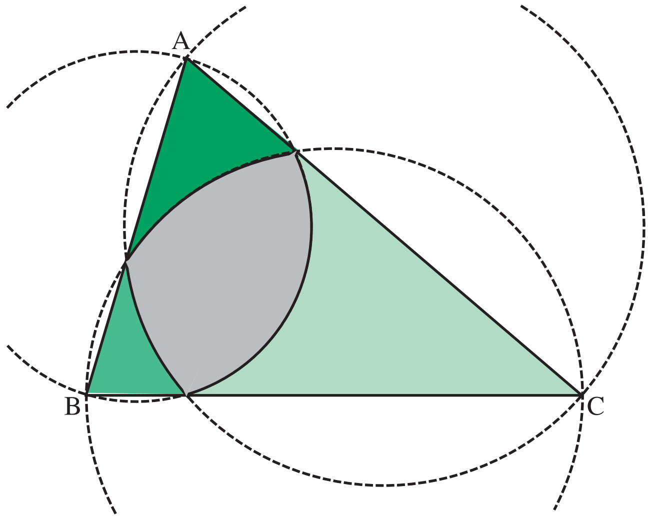
L'annexe 4 donne de nouvelles solutions pour un problème classique surgi à nouveau, ici, lors de l'Annexe 3.

Annexe 1

(due à Bruno Alaplantive)

(niveau Quatrième)

- Après l'étude relative à un seul triangle, Bruno propose, en complément, l'exercice suivant :
  « *Dans la figure ci-après, où les cercles ont respectivement pour diamètres les trois côtés du triangle* ABC*, caractériser chaque zone grisée* ».
- Par ailleurs, Bruno souligne que « le passage à deux triangles permet de rappeler les *intersections de bandes* que les élèves voient au primaire » … cependant que « l'étude de différents cas va permettre de beaux coloriages… ».
- Quant au dessin de la cardioïde qui fera l'objet des Annexes 2 et 3, Bruno suggère de fournir, pour un travail papier/crayon, le rectangle circonscrit à la cardioïde (cf. Annexe 3 pour le calcul des dimensions du rectangle).



- Enfin, Bruno souhaite que les collègues se lancent dans telle ou telle des études proposées en « adaptant à leurs élèves sans pré-mâchage excessif… ».

Annexe 2

(niveau Quatrième, aussi Seconde pour l'activité finale)

1. La situation

d_2 varie en restant tangente au cercle Γ_1 de diamètre [AB].
C est le projeté orthogonal de A sur d_2.
Comment C se déplace-t-il ?

- **Conjecture :** Une étude avec logiciel de géométrie dynamique ou, à défaut, un tracé au papier/équerre/crayon à l'aide de quelques points[3], *donne la courbe* γ *de la Figure 12*.

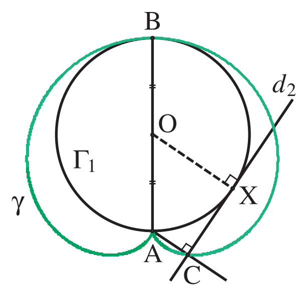


Figure 12

- *Quelle est donc cette courbe ?*
- Si l'on permet aux élèves de consulter un herbier[4] de quelques courbes remarquables, ils pourront (à peu près) *reconnaître là une cardioïde*.

(3) S'agissant d'un tracé papier-crayon, on pourra suggérer aux élèves des valeurs de $\widehat{BAC}$ incluant 60° et des valeurs voisines (cela permettra de bonnes conjectures pour l'Annexe 3), sans se limiter à celles-là.
(4) Ainsi la brochure du Palais de la Découverte, co-diffusée par l'APMEP sous le numéro 202 (150 courbes…).

Si une définition est jointe à la figure repérée sur l'herbier, la cardioïde y sera probablement présentée, *non pas en réponse à la situation-problème à résoudre ici, mais comme un cas particulier de conchoïde de cercle* (appelé « limaçon de Pascal » en l'honneur d'Étienne Pascal, père de Blaise), *ce qui nous pose un sérieux problème, d'identification ou non* ? (Nous le résoudrons plus loin).

- **Mais à quoi bon raconter cela ?**

Eh bien, d'abord pour initier les élèves au monde merveilleux des courbes mathématiques, à leur histoire, à leurs usages éventuels, et leur montrer ainsi une amorce de géométrie autrement plus riche que celle des programmes scolaires… *Ensuite, parce que :*

2. Des conchoïdes en sixième (ou à ses alentours)

Les isométries « transforment » si peu, que leurs « conservations » n'ont rien d'original, *ne frappent pas l'esprit et, de ce fait, sont des outils aux oubliettes… Les conchoïdes permettent de proposer des « transformations » simples qui « transforment » vraiment*, permettent donc de poser les problèmes des conservations et de donner du relief à celles qui existent … dans les isométries !

- **Rappel :** (cf. Figure 13)
  Une conchoïde d'une ligne L *met en jeu :* L*, un point fixe* O*, un point* M *qui décrit* L*, et une longueur constante a.*
  À chaque point M de L, on associe N et P de (OM) tels que NM = MP = *a*.
  L'ensemble des points N *et* P *constitue une conchoïde de* L.

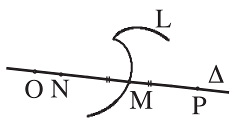


Figure 13

- **Une variété de tracés**
  Il est intéressant de faire tracer (par points, ou avec un logiciel de géométrie dynamique) *diverses conchoïdes*, de droites, de cercles, … en variant les données et en comparant les résultats.
  Ainsi peut-on douter des conservations de distances, d'alignements, d'angles, … (*utiliser des contre-exemples* pour infirmer des conservations, …), obtenir des courbes à points doubles ou pas, …
  L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet des explorations rapides, multiples et attrayantes, les élèves faisant eux-mêmes varier les paramètres et en notant leurs effets.
  S'il n'y a pas là, directement, beaucoup de contenu mathématique de programme, cela n'en valorisera pas moins des points forts de celui-ci et d'acquisition de démarches, ainsi que l'image des mathématiques…

3. Deux définitions, une conjecture (niveau … indéterminé…)

- Au Collège on définit diverses lignes (cercle, médiatrice, bissectrice, …), puis on en voit peu à peu « des propriétés caractéristiques ». Se rend-on compte qu'elles sont interchangeables avec la « définition » ?

- Ce problème-là pourra être mieux saisi à partir d’un objet non classique, ici, **la cardioïde** : *est-il équivalent de la définir à partir de tangentes à un cercle*[5] *ou comme conchoïde de cercle ?*
- *Confrontons, « physiquement », les tracés :*
  1. à partir d’un cercle de diamètre [AB], du lieu des projetés de A sur ses tangentes.
  2. de la conchoïde d’un cercle de diamètre [AD] arbitraire, à partir de A (point O de la définition générale) avec a = AD.

  La confrontation devrait conduire à examiner le cas AB = 2AD. Et alors, ô surprise, *les deux « définitions » seraient-elles équivalentes ?*

4. Une démonstration – fin de Collège ou Seconde – cf. Figures 14 et 15

1. *Partons du tracé (2) :* Soit P obtenu par le procédé « conchoïde ». P *est-il le projeté de* A *sur une tangente au cercle ?*
   Cette tangente devant être parallèle à (MD), son point de contact serait le point X du cercle Γ tel que (DX) est parallèle à (AP). Cf. Figure 14.
   Une démonstration, niveau Quatrième, établit que MDXP est un parallélogramme, puis un rectangle, et donc… « C.Q.F.D. ! » (« ce qu’il “ fallait ” démontrer ! »).
   Mais cela ne suffit pas !

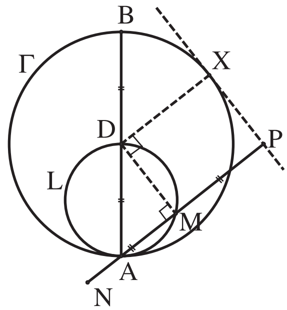


Figure 14

2. *Partons du tracé (1)* (cf. Figure 15, qui ne ressemble que faussement à la Figure 14 : le codage initial n’est pas le même).
   Ici on sait que C est le projeté orthogonal de A sur la tangente d_2 et *on se demande s’il correspond à* M *par la transformation du tracé (2).*
   Une démonstration niveau Quatrième établit que MDXC est un rectangle et que, donc, MC = DX = AD… « C.Q.F.D. ! ».

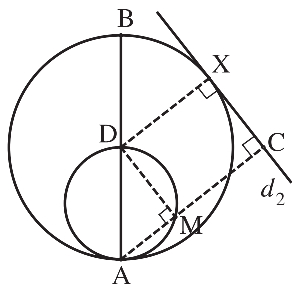


Figure 15

3. *Il y a donc bien équivalence entre (1) et (2).*
   Je peux privilégier l’une des deux définitions, la prendre initialement, et l’autre est érigée en « propriété caractéristique ».
   De quoi laisser aussi soupçonner qu’il doit y avoir d’autres propriétés caractéristiques ! (*cf. investigation sur Publimath !*).

(5) En termes « savants », on parlera de « *podaire* ». Autre exemple (lycée ?) : la podaire d’une parabole par rapport à son foyer est sa tangente au sommet.

Annexe 3

(niveau fin de Collège ou Seconde, parfois Première, exceptionnellement Terminale)

Précisions sur un tracé de cardioïde

… où l'on découvre des triangles équilatéraux

1. Rappel : ch § 4 de l'Annexe 2, et figure 16 où N et P décrivent une cardioïde.

Nous utiliserons la double caractérisation de la cardioïde, à partir du cercle Γ(D,R), de diamètre [AB] et du cercle L(O,R/2), de diamètre [AD], *comme* :

– conchoïde du cercle L par rapport à A, avec report de R,
– lieu des projetés orthogonaux de A sur les tangentes à Γ.

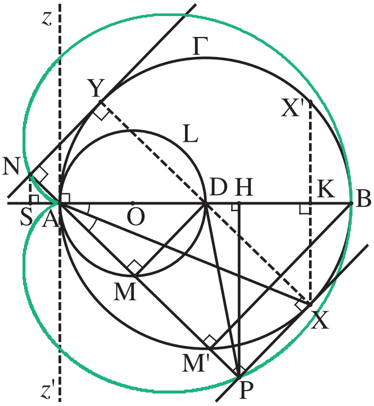


Figure 16

2. Propriétés de la figure :

(où MP = MN = AD)

2.1. *Niveau Sixième* : (AB) est axe de symétrie de la cardioïde.

2.2. *Niveau Quatrième* : Rectangles MNYD, MPXD, PNYX.

2.3. *Niveau Troisième ou Seconde :*
Les arcs M′X et XB sont égaux.
Donc aussi, par déductions successives :

– les angles $\widehat{XAM'}$ et $\widehat{XAB}$, inscrits dans Γ, sont égaux,
– (AX) est bissectrice de $\widehat{BAM}$,
– XP = XK,
– les triangles XAP et XAK sont égaux.

2.4. *Niveau Seconde :*
– les triangles ASN, AMD, AM′B, … sont semblables.

3. Problème 1.

Quels sont les points de la cardioïde les plus éloignés de l'axe de symétrie (graphiquement on y perçoit les tangentes comme parallèles à cet axe) ?

Soit P un tel point, et sa distance PH à (AB) (j'imite Bruno Alaplantive qui a déjà employé cette méthode dans l'*étude d'un ovoïde*, présentée dans le Bulletin 446, p. 288-294, et récidive ici).

Le maximum de PH *correspond à celui de l'aire du triangle* PAD.
Or aire PAD = aire PAX (en raison de (DX) // (AP)) et aire PAX = aire PXK.
Mais PKX est une « moitié » du triangle isocèle AXX′.
Donc il s'agit de rendre d'aire maximale le triangle isocèle AXX′ *inscrit dans le cercle fixe* Γ.

La réponse est classique (cf. article de Bruno Alaplantive signalé ci-avant, avec trois méthodes élémentaires de démonstration, et Annexe 4 pour d'autres méthodes niveau Première) :
Le maximum a lieu quand AXX′ *est équilatéral.*

Autrement dit, quand $\widehat{\mathrm{BAM}} = 2\widehat{\mathrm{BAX}} = 60°$, alors AM = AD/2 (= R/2) et AP = 3R/2, AH = 3R/4.
Notons α *et* α' *les positions ainsi « maximales » de* P.

Remarque

Voici, de Bruno Alaplantive, *en plus de sa solution par les aires, une solution trigonométrique,* que je recopie telle quelle, *niveau Première*, qui utilise aussi un *théorème dit « de la bissectrice »*, facile à démontrer par les aires (niveau Cinquième) selon lequel, dans un triangle, quel qu'il soit, « la bissectrice intérieure d'un angle partage le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents ».
On a $ab = ch$ ou $h = ab/c$ (aire), $a/c = b'/b''$ (bissectrice), alors $h = bb'/b''$.
Or $b' = r \sin x$ et $b'' = r \tan x$.
Alors

$$\begin{aligned} h &= \frac{r^2(\sin x + \tan x)\sin x}{r \tan x} \\ &= r(\sin x + \tan x)\cos x \\ &= r \sin x(1+\cos x) \end{aligned}$$

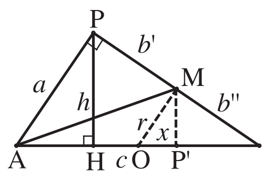


Figure 17

On étudie donc la fonction $f(x) = \sin x(1+\cos x)$ pour x sur $[0,\pi[$.

Il vient $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ et l'étude de $2\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - 1 = 0$ rend A = −1 (*hors définition*) et A = 1/2, etc.

4. Problème 2 :

Soit $(z'z)$ perpendiculaire à (AB). *Quels sont les points de la cardioïde, du demi-plan de frontière* $(z'z)$ *qui ne contient pas* B, *les plus éloignés de* $(z'z)$ *?* (graphiquement on y perçoit les tangentes comme parallèles à $(z'z)$).

Soit N un tel point.
Il s'agit de chercher le maximum de AS.

Or $\dfrac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AD}}$ (similitude de ASN et AMB), soit $\mathrm{SA} = \dfrac{\mathrm{AM}(\mathrm{R}-\mathrm{AM})}{\mathrm{AD}}$.

$\mathrm{AM}(\mathrm{R}-\mathrm{AM})$ *est le produit de deux facteurs dont la somme est constante. Il est donc* *maximum quand ils sont égaux (ou le plus près possible de l'égalité, si des contraintes empêchent celle-ci).* Cela est classique (surtout pour les lecteurs assidus de nos brochures !). *En voici une démonstration possible dès la Quatrième* :

Des essais, avec, d'abord, des valeurs numériques de R, de diverses valeurs de x pour $x(\mathrm{R}-x)$ laissent conjecturer que le maximum a lieu pour $x=\frac{\mathrm{R}}{2}$.

Posons $x=\frac{\mathrm{R}}{2}-m$, alors $\mathrm{R}-x=\frac{\mathrm{R}}{2}+m$ et $x(\mathrm{R}-x)=\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2-m^2$. D'où…

Les solutions du problème 2 sont donc fournies par AM = R/2, donc, successivement, $\widehat{\mathrm{DAM}}=60°$, $\widehat{\mathrm{SAN}}=60°$, SA = R/4, AN = R/2.

Notons β *et* β' *les positions ainsi « maximales » de* N. *Elles correspondent à* α *et* α' ! D'où des alignements avec A.

5. Et si on parlait équations ? (Niveau Terminale)

- Reprenons la figure 16, et les points P de la cardioïde tels que AP = AM + MP. Posons $\widehat{\mathrm{BAP}}=\theta$. Il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{AP} &= \mathrm{AD}\cos\theta+\mathrm{MP}\\ &= a\cos\theta+a\\ &= a(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

  On retrouve ceci pour N avec θ défini pareillement par $\widehat{\mathrm{DAN}}=\theta$.
  Nous obtenons ainsi une équation de la cardioïde en *coordonnées polaires*, d'axe [AB] et de pôle A,

$$\rho=a(1+\cos\theta).$$

- Jean-Pierre Friedelmeyer propose une *équation paramétrique de la cardioïde* liée aux choix indiqués par la figure 17′ :

$$\begin{cases}x=\cos\theta(1+\sin\theta),\\ y=\sin\theta-\cos^2\theta.\end{cases}$$

  Il y ajoute une *équation paramétrique du lieu de* H, orthocentre du triangle ABC :

$$\begin{cases}x=\tan\theta(1-\sin\theta)(2+\sin\theta),\\ y=\sin\theta-\cos^2\theta.\end{cases}$$

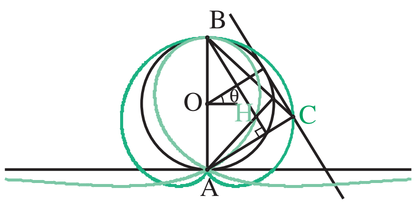


Figure 17′

À condition d'expliquer l'objectif, les calculs semblent possibles dès la Seconde.

Annexe 4
Triangle isocèle, inscrit dans un cercle, d'aire maximale

- *Le Bulletin Vert a déjà fourni trois solutions élémentaires*, et suggéré une démonstration (niveau TS) par des suites (pages 291-294 du Bulletin 446 dans l'article déjà cité).
- *En voici deux autres* (Niveau Première, puisqu'il y sera question de dérivée). J'utiliserai la Figure 18 ci-après, en prenant OB = 1, pour les deux méthodes.

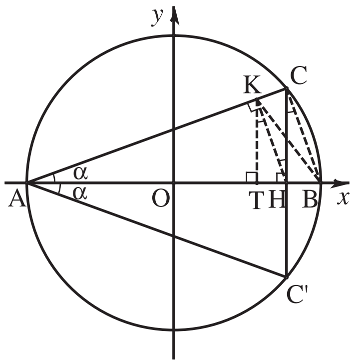


Figure 18

Méthode 1.
Soit C (x,y). Alors

$$\mathrm{CH} = \sqrt{1-x^2}\ ,\quad \mathrm{AH} = 1+x\ .$$

D'où

$$S = \mathrm{aire}(\mathrm{CAC'}) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

dont le maximum correspond à celui de

$$(1+x)^2(1-x^2)$$

qui s'écrit aussi

$$(1+x)^3(1-x)\ .$$

La dérivée par rapport à x est

$$(1+x)^2(2-4x)\ .$$

La variation de la fonction S permet d'en déduire que S est maximale pour $x = \dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{\mathrm{COB}} = 60°$, $\widehat{\mathrm{CAC'}} = 60°$, …

Méthode 2.

$$\mathrm{aire}(\mathrm{ACH}) = \mathrm{aire}(\mathrm{AKB}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{KT}.$$

Or $\mathrm{KT} = \mathrm{KH}\cos\alpha$, $\mathrm{KH} = \mathrm{CH}\cos\alpha$, $\mathrm{CH} = \mathrm{CB}\cos\alpha$, $\mathrm{CB} = 2\sin\alpha$.

D'où $\mathrm{KT} = 2\cos^3\alpha\sin\alpha$.

En dérivant par rapport à α , …

Annexe 5

(niveau Lycée)

Situation :

> *Le cas « frontière » du III, pour les figures 8 et 9. Soit donc (Figure 19) :*
> δ_1 coupe Δ_2 en L et L est le projeté orthogonal de C sur Δ_2. *Quand la direction (AC) varie, comment le point* C *se déplace-t-il ?*

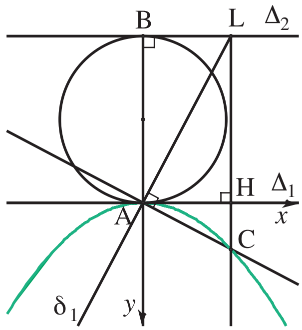


Figure 19

Des essais papier/crayon ou avec un logiciel de géométrie dynamique donnent à penser que C se déplace sur une **parabole** (à conjecturer comme telle par comparaison avec les paraboles d'un « herbier » de courbes remarquables). Mais rien n'est moins sûr : retournons le dessin haut ↔ bas, *pourquoi ne s'agirait-il pas d'une « chaînette »* ? Ça y ressemble aussi !

Démontrons !

Pour cela j'utilise le théorème fondamental (au lycée) suivant :
« *Dans tout triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse le partage en deux triangles rectangles semblables entre eux et semblables au premier* ».

Avec les axes de coordonnées indiqués sur la Figure 19 et C (x,y), cela permet d'établir une relation entre x et y (naguère connue directement) : $\frac{AH}{HC} = \frac{LH}{AH}$, soit encore $LH = \frac{AH^2}{AB}$, c'est-à-dire $y = \frac{x^2}{AB}$, *équation d'une parabole*, d'axe (AB), de sommet A, de tangente au sommet Δ_1.

❊❊❊

Voici, au fil de l'eau (du problème initial), une promenade qui finit en parabole… Mais toute l'étude se voudrait une parabole (en tous les sens du mot !). Merci, ami(e) lecteur(e) d'y souscrire !

Annexe 1

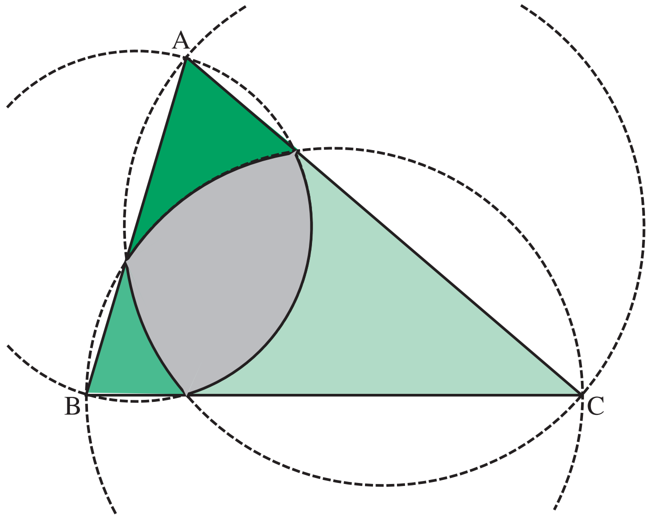
(due à Bruno Alaplantive)

(niveau Quatrième)

- Après l’étude relative à un seul triangle, Bruno propose, en complément, l’exercice suivant :
  « *Dans la figure ci-après, où les cercles ont respectivement pour diamètres les trois côtés du triangle* ABC, *caractériser chaque zone grisée* ».

- Par ailleurs, Bruno souligne que « le passage à deux triangles permet de rappeler les *intersections de bandes* que les élèves voient au primaire » … cependant que « l’étude de différents cas va permettre de beaux coloriages… ».

- Quant au dessin de la cardioïde qui fera l’objet des Annexes 2 et 3, Bruno suggère de fournir, pour un travail papier/crayon, le rectangle circonscrit à la cardioïde (cf. Annexe 3 pour le calcul des dimensions du rectangle).



- Enfin, Bruno souhaite que les collègues se lancent dans telle ou telle des études proposées en « adaptant à leurs élèves sans pré-mâchage excessif… ».

Annexe 2

(niveau Quatrième, aussi Seconde pour l'activité finale)

1. La situation

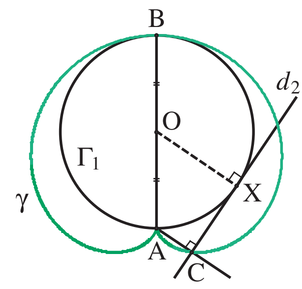


Figure 12

d_2 varie en restant tangente au cercle Γ_1 de diamètre [AB]. C est le projeté orthogonal de A sur d_2. Comment C se déplace-t-il ?

- **Conjecture :** Une étude avec logiciel de géométrie dynamique ou, à défaut, un tracé au papier/équerre/crayon à l'aide de quelques points(3), *donne la courbe γ de la Figure 12*.
- *Quelle est donc cette courbe ?*
- Si l'on permet aux élèves de consulter un herbier(4) de quelques courbes remarquables, ils pourront (à peu près) *reconnaître là une cardioïde*.

---

(3) S'agissant d'un tracé papier-crayon, on pourra suggérer aux élèves des valeurs de $\widehat{\mathrm{BAC}}$ incluant 60° et des valeurs voisines (cela permettra de bonnes conjectures pour l'Annexe 3), sans se limiter à celles-là.

(4) Ainsi la brochure du Palais de la Découverte, co-diffusée par l'APMEP sous le numéro 202 (150 courbes…).

Si une définition est jointe à la figure repérée sur l'herbier, la cardioïde y sera probablement présentée, *non pas en réponse à la situation-problème à résoudre ici, mais comme un cas particulier de conchoïde de cercle* (appelé « limaçon de Pascal » en l'honneur d'Étienne Pascal, père de Blaise), *ce qui nous pose un sérieux problème, d'identification ou non* ? (Nous le résoudrons plus loin).

- **Mais à quoi bon raconter cela ?**

Eh bien, d'abord pour initier les élèves au monde merveilleux des courbes mathématiques, à leur histoire, à leurs usages éventuels, et leur montrer ainsi une amorce de géométrie autrement plus riche que celle des programmes scolaires… *Ensuite, parce que :*

2. Des conchoïdes en sixième (ou à ses alentours)

Les isométries « transforment » si peu, que leurs « conservations » n'ont rien d'original, *ne frappent pas l'esprit et, de ce fait, sont des outils aux oubliettes… Les conchoïdes permettent de proposer des « transformations » simples qui « transforment » vraiment*, permettent donc de poser les problèmes des conservations et de donner du relief à celles qui existent … dans les isométries !

- **Rappel :** (cf. Figure 13)
  Une conchoïde d'une ligne L *met en jeu :* L*, un point fixe* O*, un point* M *qui décrit* L*, et une longueur constante* a.
  À chaque point M de L, on associe N et P de (OM) tels que NM = MP = a.
  L'ensemble des points N *et* P *constitue une conchoïde de* L.

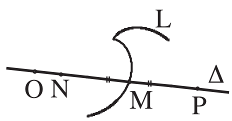


Figure 13

- **Une variété de tracés**
  Il est intéressant de faire tracer (par points, ou avec un logiciel de géométrie dynamique) *diverses conchoïdes*, de droites, de cercles, … en variant les données et en comparant les résultats.
  Ainsi peut-on douter des conservations de distances, d'alignements, d'angles, … (*utiliser des contre-exemples* pour infirmer des conservations, …), obtenir des courbes à points doubles ou pas, …
  L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet des explorations rapides, multiples et attrayantes, les élèves faisant eux-mêmes varier les paramètres et en notant leurs effets.
  S'il n'y a pas là, directement, beaucoup de contenu mathématique de programme, cela n'en valorisera pas moins des points forts de celui-ci et d'acquisition de démarches, ainsi que l'image des mathématiques…

3. Deux définitions, une conjecture (niveau … indéterminé…)

- Au Collège on définit diverses lignes (cercle, médiatrice, bissectrice, …), puis on en voit peu à peu « des propriétés caractéristiques ». Se rend-on compte qu'elles sont interchangeables avec la « définition » ?

- Ce problème-là pourra être mieux saisi à partir d'un objet non classique, ici, **la cardioïde** : *est-il équivalent de la définir à partir de tangentes à un cercle*[5] *ou comme conchoïde de cercle ?*
- *Confrontons, « physiquement », les tracés :*
  1. à partir d'un cercle de diamètre [AB], du lieu des projetés de A sur ses tangentes.
  2. de la conchoïde d'un cercle de diamètre [AD] arbitraire, à partir de A (point O de la définition générale) avec a = AD.

  La confrontation devrait conduire à examiner le cas AB = 2AD. Et alors, ô surprise, *les deux « définitions » seraient-elles équivalentes ?*

4. Une démonstration – fin de Collège ou Seconde – cf. Figures 14 et 15

1. *Partons du tracé (2) :* Soit P obtenu par le procédé « conchoïde ». P *est-il le projeté de* A *sur une tangente au cercle ?*
   Cette tangente devant être parallèle à (MD), son point de contact serait le point X du cercle Γ tel que (DX) est parallèle à (AP). Cf. Figure 14.
   Une démonstration, niveau Quatrième, établit que MDXP est un parallélogramme, puis un rectangle, et donc… « C.Q.F.D. ! » (« ce qu'il “ fallait ” démontrer ! »).
   Mais cela ne suffit pas !

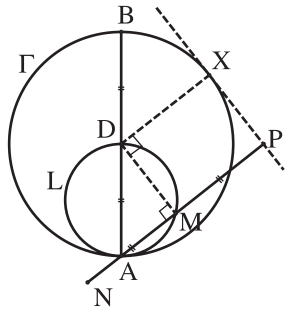


Figure 14

2. *Partons du tracé (1)* (cf. Figure 15, qui ne ressemble que faussement à la Figure 14 : le codage initial n'est pas le même).
   Ici on sait que C est le projeté orthogonal de A sur la tangente d_2 et *on se demande s'il correspond à* M *par la transformation du tracé (2).*
   Une démonstration niveau Quatrième établit que MDXC est un rectangle et que, donc, MC = DX = AD… « C.Q.F.D. ! ».

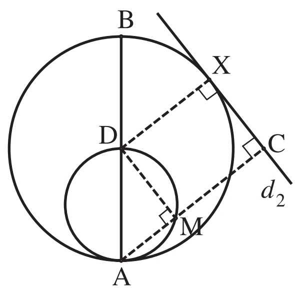


Figure 15

3. *Il y a donc bien équivalence entre (1) et (2).*
   Je peux privilégier l'une des deux définitions, la prendre initialement, et l'autre est érigée en « propriété caractéristique ».
   De quoi laisser aussi soupçonner qu'il doit y avoir d'autres propriétés caractéristiques ! (*cf. investigation sur Publimath !*).

(5) En termes « savants », on parlera de « *podaire* ». Autre exemple (lycée ?) : la podaire d'une parabole par rapport à son foyer est sa tangente au sommet.

Annexe 3

(niveau fin de Collège ou Seconde, parfois Première, exceptionnellement Terminale)

Précisions sur un tracé de cardioïde

… où l'on découvre des triangles équilatéraux

1. Rappel : ch § 4 de l'Annexe 2, et figure 16 où N et P décrivent une cardioïde.

Nous utiliserons la double caractérisation de la cardioïde, à partir du cercle Γ(D,R), de diamètre [AB] et du cercle L(O,R/2), de diamètre [AD], *comme* :

– conchoïde du cercle L par rapport à A, avec report de R,
– lieu des projetés orthogonaux de A sur les tangentes à Γ.

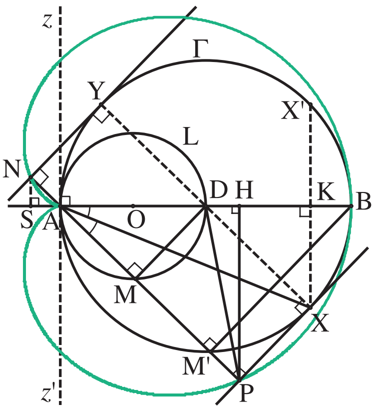


Figure 16

2. Propriétés de la figure :

(où MP = MN = AD)

2.1. *Niveau Sixième* : (AB) est axe de symétrie de la cardioïde.

2.2. *Niveau Quatrième* : Rectangles MNYD, MPXD, PNYX.

2.3. *Niveau Troisième ou Seconde :*
Les arcs M′X et XB sont égaux.
Donc aussi, par déductions successives :

– les angles $\widehat{XAM'}$ et $\widehat{XAB}$, inscrits dans Γ, sont égaux,
– (AX) est bissectrice de $\widehat{BAM}$,
– XP = XK,
– les triangles XAP et XAK sont égaux.

2.4. *Niveau Seconde :*
– les triangles ASN, AMD, AM′B, … sont semblables.

3. Problème 1.

Quels sont les points de la cardioïde les plus éloignés de l'axe de symétrie (graphiquement on y perçoit les tangentes comme parallèles à cet axe) ?

Soit P un tel point, et sa distance PH à (AB) (j'imite Bruno Alaplantive qui a déjà employé cette méthode dans l'*étude d'un ovoïde*, présentée dans le Bulletin 446, p. 288-294, et récidive ici).

Le maximum de PH *correspond à celui de l'aire du triangle* PAD.
Or aire PAD = aire PAX (en raison de (DX) // (AP)) et aire PAX = aire PXK.
Mais PKX est une « moitié » du triangle isocèle AXX′.
Donc il s'agit de rendre d'aire maximale le triangle isocèle AXX′ *inscrit dans le cercle fixe* Γ.

La réponse est classique (cf. article de Bruno Alaplantive signalé ci-avant, avec trois méthodes élémentaires de démonstration, et Annexe 4 pour d'autres méthodes niveau Première) :
Le maximum a lieu quand AXX′ *est équilatéral.*

Autrement dit, quand $\widehat{\mathrm{BAM}} = 2\widehat{\mathrm{BAX}} = 60°$, alors AM = AD/2 (= R/2) et AP = 3R/2, AH = 3R/4.
Notons α *et* α' *les positions ainsi « maximales » de* P.

Remarque

Voici, de Bruno Alaplantive, *en plus de sa solution par les aires, une solution trigonométrique,* que je recopie telle quelle, *niveau Première*, qui utilise aussi un *théorème dit « de la bissectrice »*, facile à démontrer par les aires (niveau Cinquième) selon lequel, dans un triangle, quel qu'il soit, « la bissectrice intérieure d'un angle partage le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents ».
On a $ab = ch$ ou $h = ab/c$ (aire), $a/c = b'/b''$ (bissectrice), alors $h = bb'/b''$.
Or $b' = r \sin x$ et $b'' = r \tan x$.
Alors

$$h = \frac{r^2(\sin x + \tan x)\sin x}{r\tan x}$$
$$= r(\sin x + \tan x)\cos x$$
$$= r\sin x(1+\cos x)$$

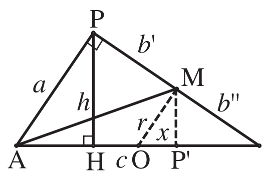


Figure 17

On étudie donc la fonction $f(x) = \sin x(1+\cos x)$ pour x sur [0,π[.

Il vient $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ et l'étude de $2\,\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - 1 = 0$ rend A = −1 (*hors définition*) et A = 1/2, etc.

4. Problème 2 :

Soit $(z'z)$ perpendiculaire à (AB). *Quels sont les points de la cardioïde, du demi-plan de frontière* $(z'z)$ *qui ne contient pas* B, *les plus éloignés de* $(z'z)$ *?* (graphiquement on y perçoit les tangentes comme parallèles à $(z'z)$).

Soit N un tel point.
Il s'agit de chercher le maximum de AS.

Or $\dfrac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AD}}$ (similitude de ASN et AMB), soit $\mathrm{SA} = \dfrac{\mathrm{AM}(\mathrm{R}-\mathrm{AM})}{\mathrm{AD}}$.

$\mathrm{AM}(\mathrm{R}-\mathrm{AM})$ *est le produit de deux facteurs dont la somme est constante. Il est donc* *maximum quand ils sont égaux (ou le plus près possible de l'égalité, si des contraintes empêchent celle-ci).* Cela est classique (surtout pour les lecteurs assidus de nos brochures !). *En voici une démonstration possible dès la Quatrième* :

Des essais, avec, d'abord, des valeurs numériques de R, de diverses valeurs de x pour $x(\mathrm{R}-x)$ laissent conjecturer que le maximum a lieu pour $x=\frac{\mathrm{R}}{2}$.

Posons $x=\frac{\mathrm{R}}{2}-m$, alors $\mathrm{R}-x=\frac{\mathrm{R}}{2}+m$ et $x(\mathrm{R}-x)=\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2-m^2$. D'où…

Les solutions du problème 2 sont donc fournies par AM = R/2, donc, successivement, $\widehat{\mathrm{DAM}}=60°$, $\widehat{\mathrm{SAN}}=60°$, SA = R/4, AN = R/2.

Notons β *et* β' *les positions ainsi « maximales » de* N. *Elles correspondent à* α *et* α' ! D'où des alignements avec A.

5. Et si on parlait équations ? (Niveau Terminale)

- Reprenons la figure 16, et les points P de la cardioïde tels que AP = AM + MP. Posons $\widehat{\mathrm{BAP}}=\theta$. Il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{AP} &= \mathrm{AD}\cos\theta+\mathrm{MP}\\ &= a\cos\theta+a\\ &= a(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

  On retrouve ceci pour N avec θ défini pareillement par $\widehat{\mathrm{DAN}}=\theta$.
  Nous obtenons ainsi une équation de la cardioïde en *coordonnées polaires*, d'axe [AB] et de pôle A,

$$\rho=a(1+\cos\theta).$$

- Jean-Pierre Friedelmeyer propose une *équation paramétrique de la cardioïde* liée aux choix indiqués par la figure 17′ :

$$\begin{cases}x=\cos\theta(1+\sin\theta),\\ y=\sin\theta-\cos^2\theta.\end{cases}$$

  Il y ajoute une *équation paramétrique du lieu de* H, orthocentre du triangle ABC :

$$\begin{cases}x=\tan\theta(1-\sin\theta)(2+\sin\theta),\\ y=\sin\theta-\cos^2\theta.\end{cases}$$

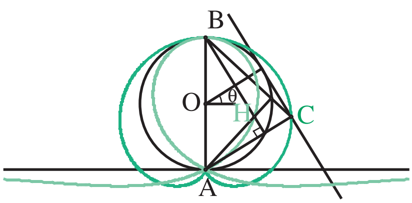


Figure 17′

À condition d'expliquer l'objectif, les calculs semblent possibles dès la Seconde.

Annexe 4
Triangle isocèle, inscrit dans un cercle, d'aire maximale

- *Le Bulletin Vert a déjà fourni trois solutions élémentaires*, et suggéré une démonstration (niveau TS) par des suites (pages 291-294 du Bulletin 446 dans l'article déjà cité).
- *En voici deux autres* (Niveau Première, puisqu'il y sera question de dérivée). J'utiliserai la Figure 18 ci-après, en prenant OB = 1, pour les deux méthodes.

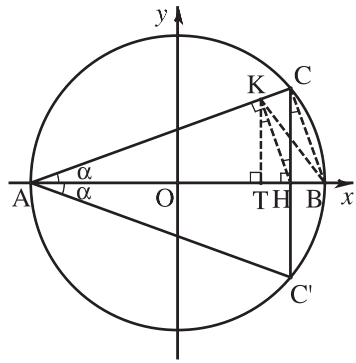


Figure 18

Méthode 1.
Soit C (x,y). Alors

$$\mathrm{CH} = \sqrt{1-x^2}\ ,\quad \mathrm{AH} = 1+x\ .$$

D'où

$$\mathrm{S} = \mathrm{aire}\,(\mathrm{CAC}') = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

dont le maximum correspond à celui de

$$(1+x)^2(1-x^2)$$

qui s'écrit aussi

$$(1+x)^3(1-x)\,.$$

La dérivée par rapport à x est

$$(1+x)^2(2-4x)\,.$$

La variation de la fonction S permet d'en déduire que S est maximale pour $x = \dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{\mathrm{COB}} = 60°$, $\widehat{\mathrm{CAC}'} = 60°$, …

Méthode 2.

$$\mathrm{aire}\,(\mathrm{ACH}) = \mathrm{aire}\,(\mathrm{AKB}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{KT}.$$

Or $\mathrm{KT} = \mathrm{KH}\cos\alpha$, $\mathrm{KH} = \mathrm{CH}\cos\alpha$, $\mathrm{CH} = \mathrm{CB}\cos\alpha$, $\mathrm{CB} = 2\sin\alpha$.

D'où $\mathrm{KT} = 2\cos^3\alpha\sin\alpha$.

En dérivant par rapport à α, …

Annexe 5

(niveau Lycée)

Situation :

Le cas « frontière » du III, pour les figures 8 et 9. Soit donc (Figure 19) :
δ_1 coupe Δ_2 en L et L est le projeté orthogonal de C sur Δ_2. *Quand la direction (AC) varie, comment le point* C *se déplace-t-il ?*

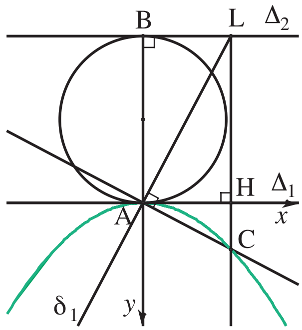


Figure 19

Des essais papier/crayon ou avec un logiciel de géométrie dynamique donnent à penser que C se déplace sur une **parabole** (à conjecturer comme telle par comparaison avec les paraboles d'un « herbier » de courbes remarquables). Mais rien n'est moins sûr : retournons le dessin haut $\leftrightarrow$ bas, *pourquoi ne s'agirait-il pas d'une « chaînette »* ? Ça y ressemble aussi !

Démontrons !

Pour cela j'utilise le théorème fondamental (au lycée) suivant :
« *Dans tout triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse le partage en deux triangles rectangles semblables entre eux et semblables au premier* ».

Avec les axes de coordonnées indiqués sur la Figure 19 et C (x,y), cela permet d'établir une relation entre x et y (naguère connue directement) : $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{LH}{AH}$, soit encore $LH=\dfrac{AH^2}{AB}$, c'est-à-dire $y=\dfrac{x^2}{AB}$, *équation d'une parabole*, d'axe (AB), de sommet A, de tangente au sommet Δ_1.

❊❊❊

Voici, au fil de l'eau (du problème initial), une promenade qui finit en parabole… Mais toute l'étude se voudrait une parabole (en tous les sens du mot !). Merci, ami(e) lecteur(e) d'y souscrire !