Exercices de ci, de là

Exceptionnellement, les exercices proposés dans ce numéro ne sont pas extraits de Corol'aire (Journal de la Régionale APMEP Poitou-Charentes), signe de vitalité pour cette rubrique.
Les propositions d'exercices et les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain),
IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.

ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr
Pour le présent numéro, Serge Parpay étant momentanément indisponible, je prends (provisoirement !) le relais (mal) pour vous proposer ci-après, d'abord deux exercices faciles, pour nos élèves, issus d'une correspondance … de 1995 avec Jean Berrard, puis un exercice plus difficile provenant d'une compétition américaine de 1998, enfin deux recherches d'erreurs : la première, très facile, proposée par P. Dassy dans le n° 87 de la revue de nos amis belges « Mathématiques et Pédagogie », la seconde, très formatrice, proposée récemment pour le Bulletin par Jean-Pierre Friedelmeyer.

Henri Bareil

Exercices

Exercice n° 1

Soit un cube (cf. figure1) de côté $1+\sqrt{2}$, M sur [AB] tel que AM = 1, N sur [B′C′] tel que $B'N = x$. Dessiner le trajet le plus court joignant M et N, en restant sur cette surface lorsque $x = 1$, lorsque $x = \sqrt{2}$.

Attention. 1. Pourquoi « le » trajet … ? S'il y en avait plusieurs, lesquels et combien ?

2. Donner, si possible, divers niveaux de preuves.

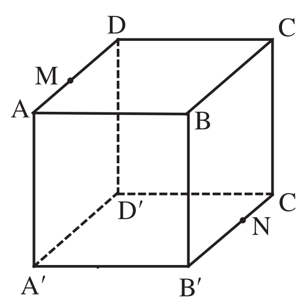


Figure 1

Exercice n° 2

« Au temps de Fermat, voici le formule des “ triples rectangles ” » (figure 2) :

$$\begin{cases} a = x(1-y^2) \\ b = 2xy \\ c = y(1-x^2) \end{cases}$$

avec (x, y) rationnels.

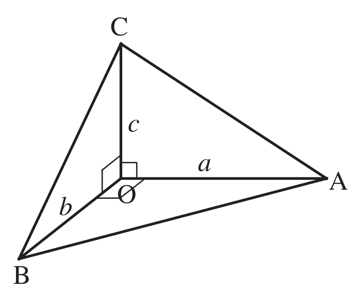


Figure 2

Donner une condition suffisante relative à x et y pour que les côtés du triangle ABC puissent être exprimés en nombres entiers.

Exercice n° 3 (traduction française de « Mathématiques et Pédagogie »)

On définit un entier positif n comme étant une « queue factorielle » s'il existe quelque entier positif m tel que la représentation décimale de $m!$ se termine exactement par n zéros. Combien d'entiers positifs plus petits que 1992 **ne** sont **pas** des « queues factorielles » ? [396, sauf erreur, mais pourquoi ?].

Exercice n° 4 : Tous les triangles sont isocèles

Considérons un triangle ABC. On a :

$$\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2}-\frac{\widehat{C}}{2}-\widehat{A}=\frac{\pi}{2}-\frac{\widehat{C}}{2}-\widehat{A},$$

$$\frac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{A}\right),$$

$$\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}=\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{A}\right).$$

Par symétrie sur A et B, on a aussi :

$$\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{B}\right).$$

D'où

$$\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{A}\right)=\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{B}\right)$$

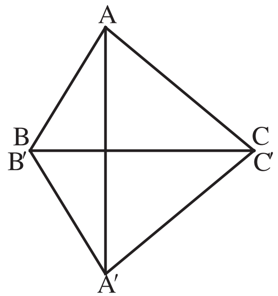
et, donc

$$\widehat{A}=\widehat{B}.$$

Exercice n° 5 : Les désarrois de l'élève Toerless

Losque j'ai commencé à faire de la géométrie et appris les cas d'égalité des triangles, j'étais un peu gêné par leur absence de symétrie : je trouvais disgracieux, et contraire à la beauté des mathématiques que je commençais à apprécier, les formulations restrictives de deux des trois cas. En effet, si ce qu'on appelle le troisième cas « *Deux triangles sont égaux quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun* » me convenait parfaitement, pour les deux autres, j'aurais aimé que les énoncés soient de la forme simple et symétrique : « *Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal et deux côtés égaux, chacun à chacun* ; *ou quand ils ont un côté égal et deux angles égaux, chacun à chacun* ». Ce qui aurait ramené finalement et superbement

les trois cas à un seul, en considérant les six éléments constitutifs d'un triangle (trois côtés et trois angles) : « *Deux triangles sont égaux quand trois éléments du premier, dont au moins un côté, sont égaux à trois éléments de même nature du second, chacun à chacun* ».
Pour la seconde partie de l'avant-dernier énoncé, je récupérais la règle officielle, puisque si deux angles étaient égaux, chacun à chacun, le troisième l'était aussi, et je retombais sur le deuxième cas : « *un côté égal et deux angles adjacents égaux, chacun à chacun* ». Mais pour la première partie, il fallait préciser : « *un angle égal compris entre deux côtés égaux* » et écarter le cas d'« *un angle égal et de deux côtés égaux, chacun à chacun, dont un seul est adjacent à l'angle égal* ». Or j'avais une démonstration en béton pour ce dernier cas, que voici.



Soient ABC et $A'B'C'$ les deux triangles, avec comme hypothèse par exemple $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$. Montrons que l'on a aussi : $AC = A'C'$.

Accolons les côtés égaux BC et $B'C'$, les sommets A et A' étant de part et d'autre de la droite (BC).

Comme $AB = A'B' = A'B$, le triangle ABA' est isocèle, donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{BAA'} = \widehat{BA'A}$. Mais l'angle total en A est égal à l'angle total en A'. En leur soustrayant des angles égaux, on a encore des angles égaux : $\widehat{A'AC} = \widehat{AA'C}$. Donc le triangle $AA'C$ est isocèle et par conséquent ses côtés AC et $A'C = A'C'$ sont égaux. Donc $AC = A'C'$, ce qu'il fallait démontrer.

Mon professeur me dit que mon raisonnement est faux, et je suis prêt à le croire. **Mais alors, où est l'erreur ?**