

De la biologie aux mathématiques en passant par la finance et la physique : le mouvement brownien

Jean-Pierre Kahane

En 1828, le botaniste anglais Richard Brown a procédé à la première étude scientifique du mouvement de particules de pollen en suspension dans un liquide au repos : mouvement perpétuel, désordonné, sans cause apparente.

L'étude de Brown aboutit à une première conclusion : il ne s'agit pas d'un phénomène vital. Les physiciens prennent le relais. Au cours du 19^e siècle, certains, sans justification, émettent l'idée que ce mouvement peut être la traduction de chocs moléculaires, à la façon dont un gros ballon lourd pourrait être actionné par des billes de grande énergie l'attaquant dans tous les sens. En 1905, quand il aborde la question, Albert Einstein ne connaît pas ces commentaires autour du mouvement étudié par Brown, et d'ailleurs il ne connaît pas l'étude de Brown. Il imagine un test de validité pour une hypothèse, à savoir que la thermodynamique statistique, que Boltzman a établie pour les gaz, est aussi valable pour les liquides. Le titre, interminable, est clair : « *Sur le mouvement, exigé par la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, de particules en suspension dans des liquides au repos* ». Il aboutit à une description remarquable d'un mouvement paradoxal, dans lequel les déplacements infinitésimaux sont proportionnels à la racine carrée des durées, et il en donne de façon précise les équations. C'est exactement le mouvement brownien.

S'étant avisé que l'expérience de pensée était déjà réalisée, il indique dans un second article comment on en peut tirer les dimensions moléculaires. L'histoire se poursuit avec Jean Perrin, dont les expériences établissent la réalité atomique et moléculaire, et donnent la première estimation du nombre d'Avogadro.

En même temps qu'Einstein, en 1906, Marian Schmoluchowski, qui, lui, connaissait le mouvement brownien, publiait sa théorie, analogue à celle d'Einstein. Il y avait une différence dans les constantes numériques. Paul Langevin, dans une note aux Comptes rendus de 1908, tranche la question en refaisant les calculs de Schmoluchowski et en retrouvant la formule d'Einstein. Puis, en petits caractères, il indique comment on peut présenter la théorie. C'est lumineux. Il part de l'équation ordinaire, qui dit que l'accélération d'une particule est proportionnelle à la vitesse, avec un coefficient négatif impliquant sa masse et la viscosité : la particule est donc freinée exponentiellement. Or elle continue sa course !

Langevin introduit donc dans l'équation donnant l'accélération un terme X , avec ce seul commentaire (la théorie va d'abord se faire en dimension un) : « sur la force complémentaire X nous savons qu'elle est indifféremment positive et négative, et sa

grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule ». Un calcul très simple lui permet alors d'introduire l'hypothèse que l'énergie cinétique moyenne des molécules est donnée par la même formule que dans les gaz, et d'en déduire une équation qui fait bien intervenir la dérivée, sur des intervalles de temps très petits, et qui se réduit à celle d'Einstein, où la dérivée disparaît, quand on s'intéresse au régime permanent.

La théorie physique du mouvement brownien était donc solidement établie, et de façon rapide. Abstraction faite des constantes (ce qui est dommage en un sens), elle se réduit à une formule simple, qui exprime, en termes actuels, que le processus du mouvement brownien est gaussien et à accroissements stationnaires et indépendants ; il en résulte que les moyennes des carrés des déplacements sont proportionnelles au temps écoulé. L'existence d'un tel processus n'a pas besoin d'être établie, puisqu'il existe dans la nature.

Cependant la question de l'existence se pose pour le mathématicien, et aussi l'exploration des propriétés de ce processus. Ce fut l'œuvre de Norbert Wiener au cours des années 1920. Il était nécessaire, soit d'utiliser l'intégrale de Lebesgue, soit d'en imiter la théorie dans un cadre plus abstrait : c'est la naissance de la théorie actuelle des probabilités. C'est aussi l'avènement du processus de Wiener, autrement dit du mouvement brownien mathématique.

C'est Paul Lévy, avec son étude raffinée des propriétés des trajectoires, qui a imposé la terminologie. Quand aujourd'hui on parle du mouvement brownien, chez les physiciens aussi bien que chez les mathématiciens, c'est du processus de Wiener qu'il s'agit. C'est l'idéalisation continue de la promenade au hasard, le plus fondamental des processus à accroissements indépendants, l'archétype des martingales et des diffusions ; il a envahi l'analyse mathématique et la géométrie, et le mouvement brownien plan est aujourd'hui l'objet de recherches et de résultats spectaculaires souvent conjecturés par des physiciens et démontrés par des mathématiciens.

Deux noms au moins manquent à cette histoire : Bachelier et Kolmogorov. La thèse de Louis Bachelier, en 1900, était relative aux fluctuations boursières. Elle contient des formules audacieuses pour l'époque sur les enchaînements de probabilités de passages, et l'idée forte de lier les fluctuations à l'équation de la chaleur ; il parle du « rayonnement » ou de la « diffusion » de la probabilité. Bachelier était un outsider ; il n'a été reconnu en France qu'après que Kolmogorov l'ait mentionné comme l'initiateur de la théorie, dans un article important sur la théorie analytique des processus de Markov (les processus dont la loi dans l'avenir ne dépend que de la situation présente). L'article de Kolmogorov date de 1931, et son livre fondamental sur les fondements des probabilités de 1933. Il est facile de voir dans cet ouvrage (qui contient ce que l'on appelle un peu sommairement « l'axiomatique de Kolmogorov », les fameux Ω , A , P , mais qui est loin de se réduire à cela) l'influence de la construction de Wiener.

Aujourd'hui le mouvement brownien revient à la finance avec l'intégrale d'Ito, le modèle de Black et Scholes pour la fixation des prix d'options d'achats ou de ventes à des dates et prix donnés, et la floraison des mathématiques financières.

(suite page 386)

(suite de la page 382)

La théorie du mouvement brownien est un pur produit du 20^e siècle, fascinante par tout ce qu'elle permet de démarche intuitive et en même temps par sa puissance dans des domaines très variés. Paul Lévy, dans les années 50, en avait fait un exposé dans un fascicule du mémorial des sciences mathématiques que l'on pouvait dévorer comme un roman. C'est, aujourd'hui, l'objet d'exposés et de conférences mathématiques qui peuvent donner le plus de plaisir à des publics variés.

Références :

- Jean-Pierre Kahane, *Le mouvement brownien, un essai sur la théorie mathématique*, Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e siècle, Actes du colloque Jean Dieudonné (Nice 1996), Société Mathématique de France, Colloques et Congrès numéro 3, 123-155.
- Marc Yor, *Le mouvement brownien, quelques développements de 1950 à 1995*, Development of mathematics 1950-2000, edited by Jean-Paul Pier, Birkhäuser 2000, 1187-1202.