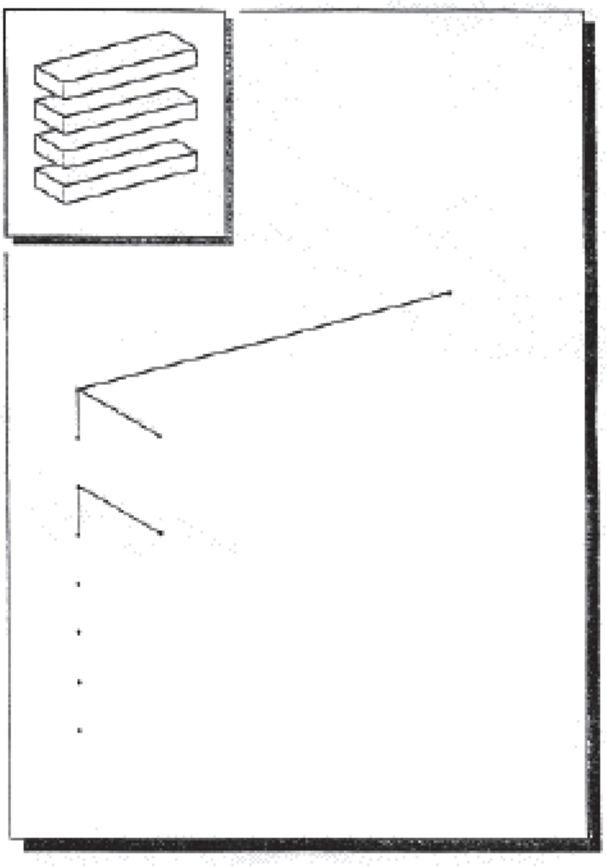
Un objet impossible, avec Cabri-Géomètre

Frédéric Butz

En troisième, l'étude de la translation est l'occasion d'introduire les vecteurs, et, en ce qui concerne les constructions géométriques, on se contente de réalisations simples. Pour en pimenter un peu l'usage, j'ai proposé à mes élèves de décortiquer la figure d'un objet impossible, et de la reproduire sous Cabri-géomètre.

Le crédit de l'idée de départ revient à l'équipe de l'Irem de Paris-Nord qui a édité un cahier d'activités destinées aux élèves de sixième dans le cadre de premières séances de géométrie : une figure complète étant dessinée dans un cartouche, il s'agit de la reproduire en grand sur la feuille où quelques points cruciaux sont déjà placés.



Le document de l'IREM de Paris-Nord

À ce niveau, l'objectif de l'exercice est la manipulation de la règle et de l'équerre pour tracer des parallèles. Toutefois, à cause de la difficulté de lecture de la figure, je la réserve à ceux qui ont une bonne maîtrise des instruments.

En troisième, la périodicité de la figure fait écho à l'idée de translation. Le premier objectif du travail proposé ci-dessous est de consolider les notions de vecteur et de translation, Cabri-géomètre se chargeant de construire les images.

Le second objectif est de démonter ce qui ressemble à un numéro de prestidigitation : il y a conflit entre, d'une part, une figure lue spontanément comme une représentation en perspective d'un objet tridimensionnel, et d'autre part, l'inexistence d'un tel objet. L'illusion est si forte, que l'on ne parvient pas à découvrir son origine sans opérer un changement de cadres, en opposant à l'interprétation première de l'image, la décision de la considérer comme celle d'un polygone plan.

Pour débuter la séance, je projette la figure 1 afin que les élèves listent les parties qui ne posent pas problème : le pavé du haut d'une part, et d'autre part les images du quadrilatère $A_0B_0B_1A_1$ par des translations de vecteurs verticaux (figure 2).

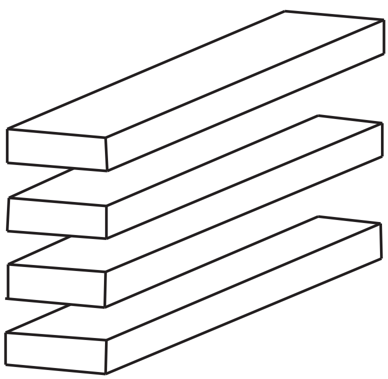


Figure 1. Le modèle

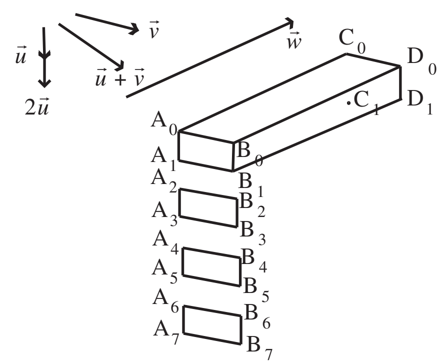


Figure 2. Première étape de la construction

Avant de commencer, les élèves doivent trouver ce dont ils auront besoin pour construire $A_0B_0B_1A_1$: au choix, l'un des sommets et deux vecteurs, ou l'un des côtés et un seul vecteur. Ensuite, il suffit d'un seul nouveau vecteur pour terminer le pavé du haut.

Les élèves ont maintenant pour tâche de dessiner cela dans Cabri-géomètre en utilisant les outils polygones, vecteurs et translations. S'ils choisissent de définir deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis le point A_0, ses images par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont A_1 et B_0. Puis, pour construire B_1, il y a trois possibilités : l'image de B_0 par la translation de vecteur $\vec{u}$ ou l'image de A_1 par la translation de vecteur $\vec{v}$ ou l'image de A_0 par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Les élèves peuvent enfin tracer le polygone $A_0B_0B_1A_1$; ils ont besoin ensuite du vecteur $2\vec{u}$ qui permet, par translation, d'obtenir successivement les trois autres polygones à partir de $A_0B_0B_1A_1$. Certains élèves, qui tracent plusieurs représentants du vecteur $2\vec{u}$, n'avaient visiblement pas assimilé la notion : le fait qu'un seul vecteur puisse servir plusieurs fois les a agréablement étonnés.

Les différents groupes réussissent plus ou moins rapidement et se lancent spontanément dans la suite de la construction. Au fur et à mesure de l'avancement du travail, ils confrontent la figure tracée à l'objectif visé. L'illusion qu'il s'agit d'une représentation en perspective d'un objet tridimensionnel, en conduit beaucoup à construire la figure 3, qui ne correspond pas au modèle. Leur surprise est forte : ils ont déjà oublié qu'ils avaient décidé de voir un polygone plan. Ils font ainsi l'aller et retour entre le modèle et leur production. Je forme le vœu de contribuer ainsi à forger leur assurance que, le plus souvent, un problème ne se résout pas spontanément, et que la démarche essai-erreurs-corrections est une façon de progresser.

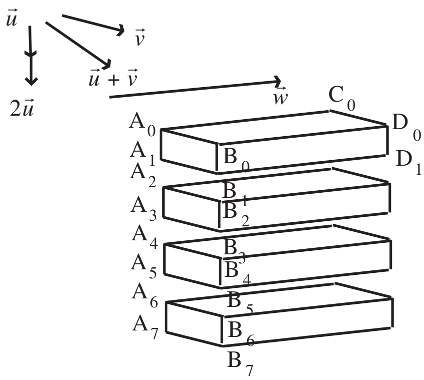


Figure 3. Une erreur souvent commise

C'est le moment de se pencher sur ce qui pose problème dans la figure, et d'en exhiber les particularités.

Tout d'abord, sur le modèle, le point C_1, image de A_2 par la translation de vecteur $\vec{w}$ est caché à l'intérieur du polygone $A_0C_0D_0D_1B_1A_1$: il faut éventuellement modifier le vecteur $\vec{w}$ par exemple, pour se mettre dans une configuration semblable.

De plus, les points C_2 et C_3 ne sont pas alignés avec C_0 : les segments $[C_2D_2]$ et $[C_3D_3]$ ne sont pas les images du segment $[C_0D_0]$ par une translation : cela se voit assez bien sur le modèle, et heureusement car un réglage correct de cette variable didactique est essentiel pour avancer. Il y a donc une translation cachée qui permet de passer de B_2 à C_2, translation dont il s'agit maintenant d'exhiber le vecteur.

C'est à ce moment-là que les élèves touchent du doigt que la figure est effectivement celle d'un polygone plan : en effet, on a besoin de définir le point Y comme l'intersection des segments $[A_1B_1]$ et $[A_2C_1]$, et cette intersection est vide si l'on considère que l'on est confronté à une représentation en perspective. En cas de besoin, je les aide à franchir le pas en masquant momentanément la partie droite du modèle. Ensuite vient le vecteur $\overrightarrow{YC_1}$, ressort de la figure, qui permet de construire C_2 image de B_2 par translation.

En s'aidant du modèle, les élèves construisent D_2 et D_3, images respectives de B_3 et B_4 par la translation de vecteur $\vec{w}$, puis B_5, image de D_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{YC_1}$ et encore D_4 et D_5, les images respectives de B_6 et B_7 par la translation de vecteur $\vec{w}$. Le plus dur est fait : il ne leur reste plus qu'à tracer les segments convenables, le segment $[A_2Y]$ et ses deux images : on obtient la figure 4. Il faut enfin masquer le segment $[YC_1]$ pour reconstituer l'illusion (figure 5).

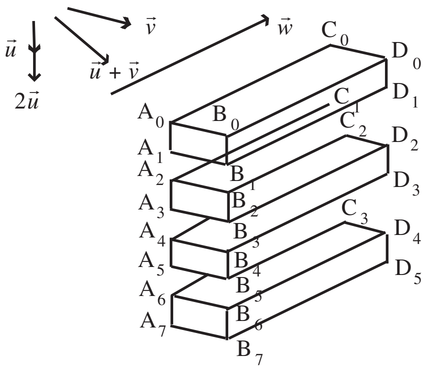


Figure 4. Tous les points sont construits

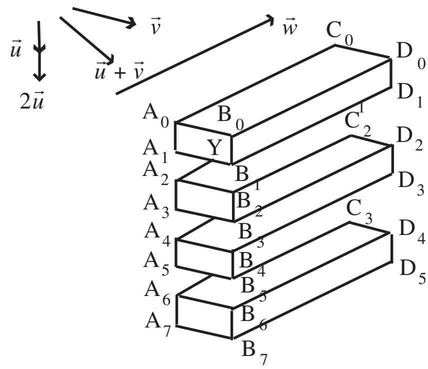
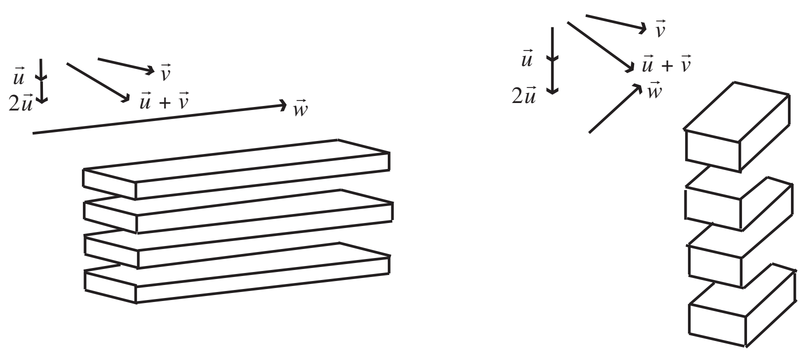


Figure 5. $[YC_1]$ *est masqué.*

On peut finalement déterminer quelles sont les conditions les plus favorables à l'illusion (figures 6 et 7), et observer que lorsque les segments $[A_1B_1]$ et $[A_2C_1]$ ne sont pas sécants, le logiciel ne peut compléter la figure (figure 8).



Figures 6 et 7. Deux configurations de la figure

Cette activité est faisable en une heure lorsque les élèves sont entraînés à l'usage du logiciel, et ils s'en vont avec leur propre dessin et la satisfaction d'avoir percé un mystère, même si l'œil persiste à voir la figure comme la représentation d'un objet tridimensionnel

Résumé.

Ce travail, donné à des élèves de troisième permet de consolider les notions de translation et de vecteur. Il s'agit de reproduire, à l'aide Cabri-Géomètre, une figure

qui donne l'illusion d'être une représentation en perspective d'un objet qui ne peut exister.

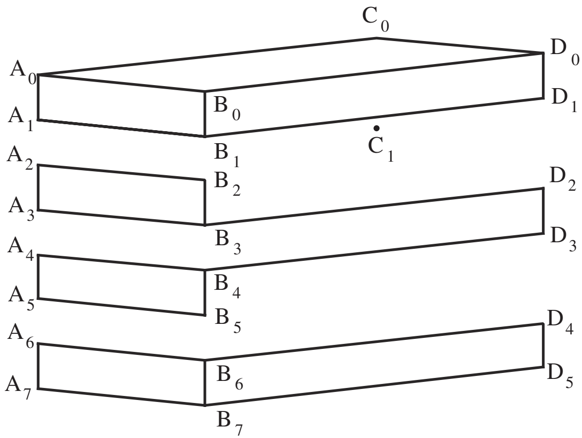


Figure 8