Brèves rencontres d'hier à demain

Henri Bareil(*)

Dans le Bulletin 457, Aline Robert donne des exemples d'analyses didactiques de différences entre trois énoncés plus ou moins « fermés » traduisant une même situation-problème géométrique.
Rappelons-la :

Soit un triangle connu EFG *et* M *sur* (EF), N *sur* (EG), *tels que* (MN) // (FG).
Déterminer la place de M *lorsque le périmètre de* FMNG *est donné.*

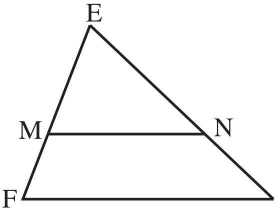


Figure 1

Au cours du Collège, *la figure « droites parallèles » du plan induit plusieurs traductions* : perpendiculaires communes, plus généralement égalités d'angles avec une sécante commune, théorème de Thalès, …

S'il est donc normal que la situation présentée ici soit exploitée pour illustrer ou faire fonctionner le théorème de Thalès-triangle, il n'en est pas moins licite d'envisager éventuellement plus d'ouverture : *poser le problème et laisser le choix des outils et méthodes*.

Ci-après trois idées sont mises à contribution :

- *former la partie variable du trapèze « en ligne »* avec l'espoir qu'un segment est plus facile à gérer qu'une ligne brisée(1),
- *gérer angulairement le parallélisme*,
- *remplacer le périmètre d'un peu sympathique trapèze* par un transfert sur un plus sympathique triangle associé.

[Le texte que je propose exprime des façons de faire « productives », d'autres idées peuvent surgir, peut-être improductives… Il n'est pas d'usage d'en faire état… C'est parfois dommage : pareille lacune n'existe pas dans les narrations de recherche(2)…]

De plus, face à une situation qui propose telle ou telle contrainte, il peut être intéressant de la « desserrer », ce que je proposerai à propos du parallélisme…
Je tais maintenant, par ailleurs, une irruption finale qui me semble fondamentale…

(*) Institut du Lauragais.
(1) Cette méthode a une portée générale. Cf. par exemple la brochure APMEP nº 79 à propos de la construction d'un triangle lorsqu'on connaît ses angles et son périmètre, ou pour la construction du point de Fermat (dit aussi de Torricelli) d'un triangle. Cf. aussi Plot nº 3.
(2) Cf., notamment, la brochure APMEP (rédigée par l'IREM de Montpellier) nº 151.

1. Résolution du problème par une construction géométrique directe

1.1. Cas M sur [EF] (seul traité par les énoncés analysés par Aline Robert)

Soit t le périmètre imposé pour le trapèze FMNG et $2p$ celui du triangle EFG.

Comme MN ≤ EM + EN,

$$t \leq 2p.$$

D'où la condition :

$$2FG \leq t \leq 2p.$$

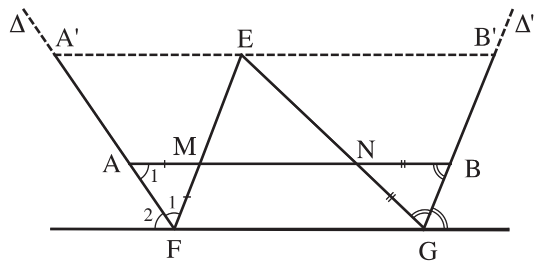


Figure 2

• Comme FG est invariante, **je m'intéresse à $\ell = t - $ FG et je transforme ℓ en longueur d'un sel segment**, en rabattant MF et NG comme indiqué sur la figure 2. Que peut-on dire de A et B ?

MAF étant isocèle, $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}$.

(AM) // (FG). Donc $\widehat{A_1} = \widehat{F_2}$.

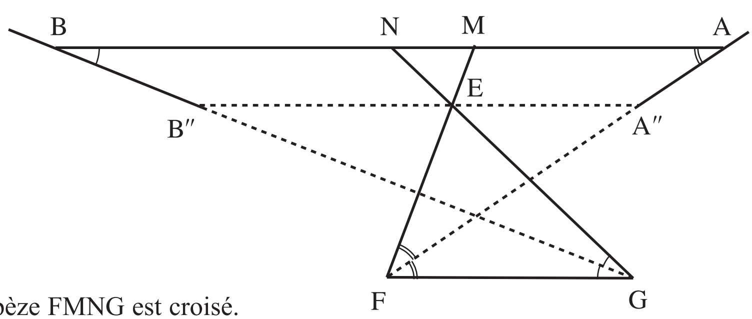
Donc $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$, et A se déplace sur la bissectrice extérieure Δ de $\widehat{EFG}$, plus précisément sur le segment [FA′] de Δ, avec (EA′) // (FG), …

De même, B se déplace sur [GB′], segment de la bissectrice extérieure Δ′ de $\widehat{EGF}$.

Comme $\overrightarrow{AB}$ a une direction et un sens connus et une longueur ℓ imposée, **B est le translaté de A selon ce vecteur**. B est ainsi construit comme l'intersection de [GB′] et du translaté de [FA′]. D'où M et N.
La justification est immédiate.

Remarque. On peut aussi construire M et N par une homothétie centrée au point de concours de Δ et Δ′.

1.2. Cas M sur (EF), hors de [EF], du côté de E (cf. figure 3)



Le trapèze FMNG est croisé.

Figure 3

Cette fois, pour former ℓ, je rabats en sens inverse du cas précédent (cf. figure 3 où MA = MF et NB = NG).
Les bissectrices extérieures du cas 1 sont ici remplacées **par les bissectrices intérieures**.

1.3. Cas M sur (EF), hors de [EF], du côté de F (cf. figure 4)

On retrouve **les bissectrices intérieures**.

Réunion des trois cas

$t \geq 2$FG est toujours exigé.
Il y a toujours deux positions-solutions pour M, dont une, toujours, du cas 3, et une soit du cas 1, soit du cas 2, selon que l'on a $t \leq 2p$ ou $t \geq 2p$.

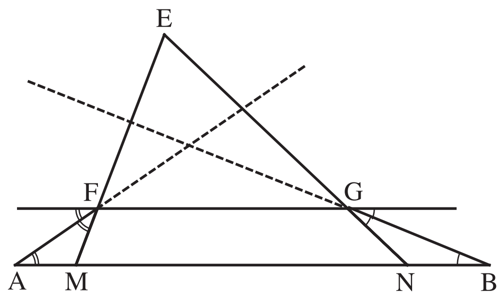


Figure 4

2. Résolution du problème par transfert.

2.1. Cas 1 (M sur [EF])

Je transfère le problème sur le triangle « complé-mentaire » EMN, figure plus simple.

On passe du périmètre t du trapèze FMNG au périmètre $2p$ du triangle EFG par

$$t = 2p - [(\mathrm{EM} + \mathrm{EN}) - \mathrm{MN}],$$

soit par

$$\mathrm{EM} + \mathrm{EN} - \mathrm{MN} = 2p - t.$$

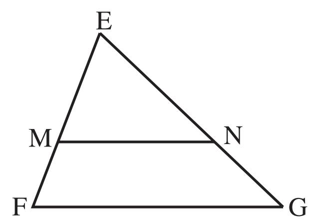


Figure 5

Dès lors, je propose deux méthodes de résolution :

a) Il suffit de construire un triangle EMN répondant à la condition EM + EN − MN de longueur $2p - t$. Pour cela[3] :
1 – On construit un *triangle arbitraire semblable au triangle cherché.*
2 – On en déduit celui-ci.

Le plus simple, en fait de triangle semblable, est d'utiliser un triangle EM′N′ homothétique de EMN, avec M′ arbitraire sur EF…, donc, par exemple, le triangle EFG lui-même.
Il suffit d'utiliser l'homothétie (E, $(2p - t)/2p$), et voilà le triangle EMN cherché…

La même méthode vaut aussi pour les cas 2 et 3, à cela près que l'expression de t change.

(3) C'est encore une méthode générale. Cf. toujours la brochure APMEP nº 79 et le numéro 3 de Plot (juillet-août-septembre 2003).

b) Voici une construction directe du triangle EMN *en utilisant une formation de la longueur* EM + EN − MN.

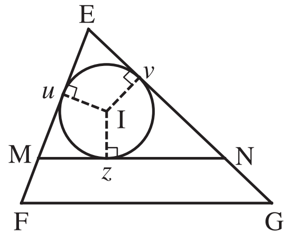


Figure 6

Pour cela il suffit (figure 6) de faire intervenir le cercle inscrit dans le triangle EMN.
Les égalités de « tangentes » donnent aussitôt :

$$\mathrm{EM} + \mathrm{EN} - \mathrm{MN} = \mathrm{E}u + \mathrm{E}v = 2\mathrm{E}u.$$

Et, donc :

$$2\mathrm{E}u = 2p - t.$$

D'où la construction de u et v, à partir d'eux du centre I du cercle inscrit, puis de z (grâce à l'orthogonalité avec (FG)), enfin de (MN).

Pour les cas 2 et 3 (où M est sur (EF), hors du segment [EF]), le lecteur observera, à partir des nouvelles expressions de t en fonction des côtés de EFG, qu'il convient de remplacer le cercle inscrit du triangle EMN par le cercle ex-inscrit dans l'angle $\widehat{\mathrm{E}}$.

3. Abandon de la contrainte (MN) // (FG)

remplacée par la seule contrainte d'une direction de (MN) donnée(4).

Tout ce qui est lié au parallélisme (Thalès, trapèze, égalités angulaires) disparaît.

Méthode de résolution du § 1

Cas 1 (avec M sur [EF] et N sur [EG])
La méthode demeure, Δ′ n'est plus la bissectrice extérieure de $\widehat{\mathrm{G}}$, mais une droite (cf. figure 7) faisant avec (GE) un angle moitié de $\widehat{\mathrm{MNG}}$.
Conclusion analogue pour Δ.

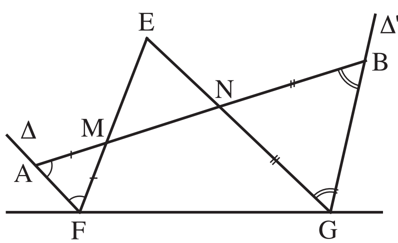


Figure 7

Les autres cas (y compris les nouveaux, par exemple lorsque M et N sont l'un intérieur à « son côté » de EFG et l'autre extérieur, …) se traitent de façon analogue.

Méthodes de résolution du § 2

La première reste totalement valable, sans aucune complication, à condition de faire intervenir l'homothétie non plus sur le triangle EFG, mais sur un triangle EM′N′ où (M′N′) a la direction imposée à (MN).

La deuxième me semble mise en échec dans des « cas nouveaux », par exemple avec M sur (EF) à l'extérieur de [EF] et N sur [EG]. Dans les autres cas elle reste valable.

(4) Au vu de cet article, Jean-Pierre Friedelmeyer a choisi la contrainte : N fixe sur (EG) et M variable sur EF. Il a obtenu, m'écrit-il, « une magnifique cubique circulaire comme lieu de A ! », ce qui déborde … le cadre de notre étude, mais, avec un logiciel de géométrie dynamique, fera émerger de la beauté, ce qui n'est pas négligeable … et peut renvoyer plus tard à une identification par démonstration…

4. Et si l'on jouait avec Cabri II (ou tout autre logiciel de géométrie dynamique) ?

Prenons M sur [EF].
Cabri calcule et affiche le périmètre de FMNG.
On fait varier M jusqu'à l'obtention du périmètre voulu.
La précision des mesures est de l'ordre de 10^{-5}. C'est drôlement mieux, pour une résolution « effective » du problème, que le calcul de x ensuite reporté au double décimètre ou que les *tracés* à la règle, compas (… ou rapporteur !)…

Remarque 1. On peut utiliser une démarche analogue, à partir de EMN.
Remarque 2. Tout cela vaut que (MN), de direction donnée, soit ou non parallèle à (FG), et quel que soit le cas de figure.

5. Commentaire

Si l'objectif était vraiment de placer M tel que …, alors pas besoin de démarches géométriques telles que celles proposées ci-dessus ou étudiées dans l'article d'Aline Robert. Ces démarches-là répondent à un tout autre objectif, de culture géométrique, d'apprentissage de méthodes générales, de formation à la démonstration, … Fort bien !

Mais jusqu'à quand pourrons-nous les proposer, les maintenir, pour aboutir à un résultat pratique effectif que Cabri obtient sans effort(5) ? C'est là une question fondamentale quant à l'image sociale de l'enseignement des mathématiques !
Ne devrions-nous pas chercher à placer nos objectifs de formation dans des situations-problèmes où Cabri (ou tout autre logiciel de même type), loin de nous supplanter, nous y inciterait ?
Par exemple, pour des problèmes de lieux, d'enveloppes, …
Ces logiciels fournissent des conjecture. Il reste à les démontrer… Mais, dit à juste titre – me semble-t-il – Daniel Reisz, « une conjecture solidement attestée par de nombreuses expériences n'incite pas forcément à chercher une démonstration (sauf pour un mathématicien…) ! ».
Le problème est donc complexe.

Amis lecteurs, pourriez-vous proposer au Bulletin des exemples de situations-problèmes suscitant un usage aguichant à la fois de la « géométrie dynamique » (dus à Cabri, ou à ses frères ou à de brillants ancêtres, tel Logo !) et des géométries synthétiques ou analytiques classiques … ? D'avance, que de remerciements !

(5) Du moins si l'on s'en tient à une recherche « en tâtonnant ». Il en irait autrement si l'on voulait, avec un logiciel, procéder par une « construction géométrique » comme dans le monde « papier-crayon ». Il y faudrait alors le même travail et les mêmes connaissances. Mais l'usage du logiciel est-il alors séduisant pour un autre qu'un « matheux » ?