

Valeur absolue et tableur

Boris Véron(*)

Le besoin de programmer la valeur absolue d'une différence développe des compétences informatiques, qui à leur tour enrichissent la notion mathématique.

Introduction

Après deux séances passées sur tableur notamment pour introduire les fonctions qui seront utiles (voir annexe) je distribue la fiche suivante :

Fiche élève

Quand les différences convergent

Observez le tableau suivant et retrouvez comment on passe d'une ligne à la suivante. Puis continuez le processus jusqu'à ce que vous observiez quelque chose d'intéressant.

Ligne n°1	101	38	18
Ligne n°2	63	20	83
Ligne n°3	43	63	20
Ligne n°4	20	43	23

Qu'obtient-on à la ligne 10 ?

Qu'obtient-on à la ligne 2 005 ?

On voudrait programmer ce processus dans un tableur. Quelle(s) formule(s) proposeriez-vous dans les cellules B2, C2 et D2 ? (Il faudra recopier ces formules jusqu'aux cellules B2005, C2005 et D2005).

	A	B	C	D
1	Ligne 1	54	39	11
2	Ligne 2			

Essayez d'imaginer d'autres (au moins une) formules pour les cellules B2, C2 et D2.

Exploitation

Deux formules (Excel) ont été trouvées par la quasi-totalité des élèves :

$$= \text{MAX}(B1 ; C1) - \text{MIN}(B1 ; C1)$$

$$= \text{SI}(B1 > C1 ; B1 - C1 ; C1 - B1)$$

Quelques groupes ont aussi trouvé :

$$= \text{SI}(B1 - C1 > 0 ; B1 - C1 ; C1 - B1)$$

Sans surprise, aucune des formules suivantes n'a été trouvée. Je les ai donc écrites au tableur en demandant à chacun d'expliquer pourquoi elles étaient valables, et en les illustrant par quelques exemples :

(*) Lycée Pierre-Paul Riquet, Saint-Orens de Gameville. e-mail : boris.veron@free.fr

$$\begin{aligned}
 &= \text{MAX}(B1 - C1 ; C1 - B1) \\
 &= (B1 + C1) - 2 * \text{MIN}(B1 ; C1) \\
 &= 2 * \text{MAX}(B1 ; C1) - (B1 + C1) \\
 &= (B1 - C1) * \text{SIGNE}(B1 - C1) \\
 &= \sqrt{(B1 - C1)^2}
 \end{aligned}$$

On peut ensuite donner un nom à cette notion. J'ai demandé à mes élèves ce que calculent ces formules. La notion d'écart (qui me semble plus adaptée que celle de distance) est apparue. J'ai alors donné le nom mathématique de valeur absolue d'une différence. Puis, je leur ai dit que cette fonction existait dans Excel.

Par la suite j'ai fait les exercices sur les inéquations :

$$\begin{aligned}
 &\bullet |x - a| < b \quad \bullet |x - a| > b \\
 &\bullet \begin{cases} |x - a| < b \\ |x - a'| < b' \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} |x - a| < b \\ |x - a'| > b' \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} |x - a| > b \\ |x - a'| > b' \end{cases} \\
 &\bullet |x - a| < |x - b|
 \end{aligned}$$

en alternant les inégalités strictes et les inégalités larges, en variant les types d'ensembles solutions.

Les intervalles, leurs intersections et leurs réunions, sont alors présentés comme des notations pratiques pour répondre à ces questions.

Commentaires

L'activité est une véritable situation-problème en cela qu'elle est abordable par tous et qu'elle est autovalidante. Fonde-t-elle le concept de valeur absolue comme le préconisent les instructions officielles ? Cela se discute.

Elle est plus complète que la seule introduction aux valeurs absolues. Il s'agit aussi d'observer, d'élaborer une démarche, puis de mettre en forme une réponse. Elle permet aussi de travailler sur la fonction tableur **SI(test ; valeur_si_vrai ; valeur_si_faux)** très proche du « si, alors » mathématique.

Questions supplémentaires

On peut utiliser cette activité pour proposer des questions plus ou moins ouvertes :

- À quelle(s) condition(s) obtient-on une ligne complète de 0 ?
- Et plus généralement retrouver une étape précédant une étape donnée.

Dans cet esprit on peut aussi garder en réserve les questions suivantes :

- Que se passe-t-il lorsque l'on change l'ordre des nombres de départ ?
- Que se passe-t-il lorsque l'on ajoute 5 aux trois nombres de départ ?
- Que se passe-t-il lorsque l'on multiplie par 5 les trois nombres de départ ?

En dernière question d'une évaluation en classe, j'ai posé :

a et b sont deux nombres réels, que calcule-t-on lorsque l'on calcule :

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

Prolongements

Un premier prolongement possible en seconde consiste à retrouver le PGCD de deux nombres. Par exemple, en partant de la ligne

30	18	0
----	----	---

on obtient que des multiples du PGCD de 30 et 18. En effet, l'algorithme de la première partie n'est autre qu'un algorithme des différences. Il conduit au même résultat que l'algorithme d'Euclide, pour des raisons évidentes. La façon de procéder évite d'avoir à ordonner les trois nombres de chaque étape. L'algorithme d'Euclide permet alors d'écrire le développement en fraction continue de $30/18$ (voir les explications de Michel de Cointet sur le site de l'APMEP).

Un second prolongement possible (mais pas au niveau du lycée) est l'approximation de nombres irrationnels par des suites de rationnels. Par exemple, en partant de

$\sqrt{2}$	1	0
------------	---	---

chaque ligne obtenue est composée de nombres de la forme $a_n + b_n$, où $(-a_n/b_n)$ est une suite convergente vers $\sqrt{2}$. Le détail est trop long pour être décrit ici, vous pouvez le consulter sur le site de l'APMEP.

Annexe : Préparation de l'activité, prise en main d'Excel et de quelques fonctions

Quelques formules d'Excel

Excel est un tableur, chaque feuille Excel est constituée de cases appelées cellules. Il permet de mettre facilement en forme des tableaux, et surtout d'effectuer des opérations et de programmer des cellules (voir les exemples ci-dessous).

Ces cellules sont repérées par une lettre et un nombre. Par exemple G45 est la cellule de la colonne G et de la ligne 45.

Par la suite on dira G45 pour désigner la cellule G45 ou pour désigner le contenu de la cellule G45.

Exemples de fonctions Excel :

	A	B	C	D
1				=MAX(A1 ; B1 ; C1)

Cette fonction permet d'écrire dans la cellule D1 le plus grand des trois nombres écrits dans les cellules A1, B1 et C1.

Il existe aussi la fonction MIN.

	A	B	C	D
1				=SIGNE(A1)

Cette fonction permet d'écrire dans la cellule D1 le signe de A1, c'est-à-dire 1 si A1 est positif, -1 si A1 est négatif et 0 si A1 est égal à 0.

	A	B	C	D
1				=SI(A1>B1;3*A1;C1-4)

Cette fonction permet d'écrire dans la cellule D1 :

- le triple de A1, lorsque A1 est strictement supérieur à B1 ;
- la différence entre C1 et 4, lorsque A1 est inférieur ou égal à B1.

	A	B	C	D
1				=ARRONDI(A1;2)

Cette fonction permet d'écrire dans la cellule D1, l'arrondi au centième de A1. Pour l'arrondi à l'unité, il suffit d'écrire 0 à la place du 2.

Exercice

Écrire dans la cellule A2, une formule qui permet d'obtenir $A1/2$ si A1 est pair, et $3 \times A1 + 1$ si A1 est impair.

Référence absolue et référence relative

Sur une feuille de calcul Excel, observer les effets des formules suivantes :

	A	B	C	D	E	F
1	4	3	-3	=\$A\$1+B\$1	=\$A1+B\$1	
2	-7	12	5			
3	2	-1	-9			

Sélectionner la cellule D1, et la recopier en D2 et D3. Qu'observe-t-on ?

Sélectionner la cellule E1, et la recopier en E2, E3, F2 et F3. Qu'observe-t-on ?

À quoi servent les \$?

Exercice

Écrire dans de la cellule A2 jusqu'à la cellule A2002, une formule qui permet d'obtenir la moitié du nombre de la cellule précédente si celui-ci est pair, et son triple augmenté de 1 s'il est impair.

Écrire dans la cellule B1 le minimum des cellules A1 à A2002.

Faire varier les valeurs dans A1. Qu'observez-vous ?