La notion de fonction :

de la classe de sixième à la classe de seconde

Groupe de liaison Collège – Lycée
du Bassin Sud Deux-Sèvres

C'est le thème d'étude qu'avait choisi le groupe qui existe depuis bientôt 20 ans ! Les 26 professeurs de ce groupe qui viennent de 8 collèges et de 6 lycées de Niort et des communes voisines sont totalement volontaires et bénévoles. Ils sont heureux de se retrouver pour échanger, travailler et partager de bons moments de convivialité. Ils se réunissent environ toutes les six semaines de 18 h à 20 h dans l'un des établissements concernés par cette liaison.

Suite à une analyse fine des programmes des classes de troisième et de seconde sur le domaine des fonctions (voir annexe) et, après de nombreux échanges, trois points essentiels sont apparus :

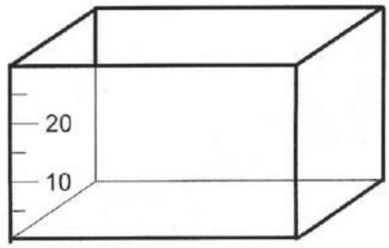
- Faire évoluer la notion de fonction de la classe de sixième à la classe de seconde, de façon constante, en utilisant les objets et outils disponibles à chaque niveau.
- Faire évoluer les représentations de fonctions à partir du discret (résultats expérimentaux) vers le continu (notion abstraite appréhendée en classes de première et terminale).
- Utiliser judicieusement ce nouvel outil qu'est le tableur (calculatrice et ordinateur) pour aider l'élève à s'approprier la notion de fonction.

Pour concrétiser notre travail sur l'enrichissement de la notion de fonction, nous avons décidé de travailler sur le thème des volumes et du remplissage qui paraît particulièrement riche, et abordable à chaque niveau. N'oublions pas que les élèves du primaire découvrent les mesures de volumes à partir des contenances (litre et sous-multiples du litre). Le problème retenu pour chaque niveau est le suivant : en versant de l'eau dans des récipients de formes diverses, quelle relation y a-t-il entre les grandeurs concernées (volume d'eau versé et hauteur dans le récipient) ?
Ce travail a débouché sur les fiches d'activités que nous vous présentons ici.

Vous trouverez en annexe 4 les informations professeurs.

Le volume de l'aquarium :

Un aquarium a la forme d'un pavé droit de 40 cm de long, 20 cm de large et 25 cm de haut.



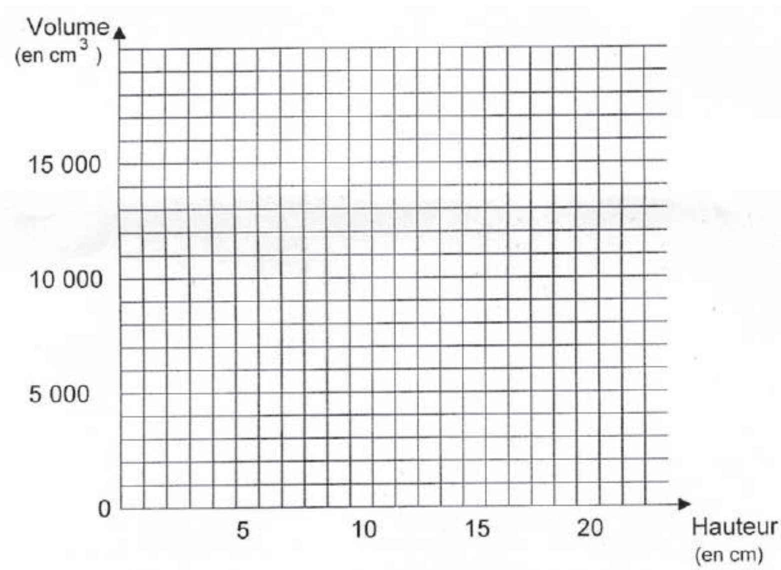
1. Calculer le volume de cet aquarium.

2. À présent on verse de l'eau dans cet aquarium.

a) Calculer le volume d'eau pour les hauteurs suivantes :

Hauteur (en cm)	5	10	15	20
Volume en cm^3				

b) Placer les points obtenus à partir du tableau sur le quadrillage suivant :



Qu'observe-t-on sur ce graphique ?

3. Une « formule ».
a) Comment obtient-on le volume d'eau à partir de la hauteur ?
b) En déduire la hauteur d'eau lorsque l'on verse 4 bouteilles de 1,5 l dans l'aquarium.
c) Placer le nouveau point sur le graphique.
L'observation du 2. b) est-elle encore vérifiée ?

Un aquarium en forme de cylindre ;

Description des expériences

A. On dispose d'un bescher vide au départ.
On le remplit en utilisant une éprouvette graduée par quantités constantes de 10 cm^3.

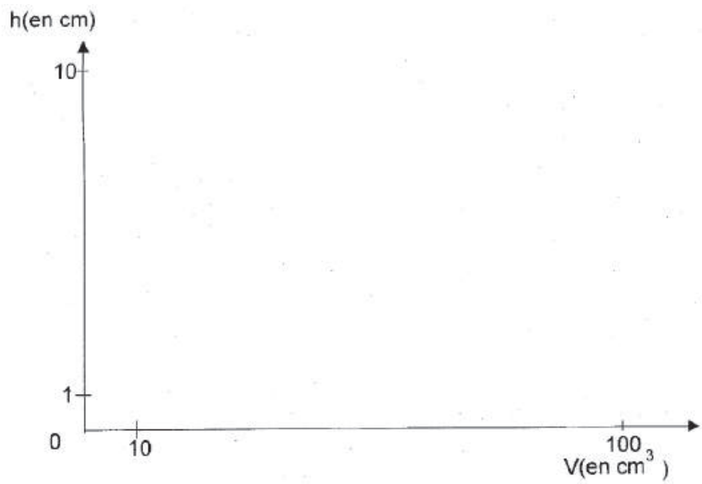
B. On réalise la même expérience en disposant préalablement un fond de sable très fin d'une épaisseur de 2 cm au fond du bescher (on prendra soin de « saturer » le sable en eau).

Travail demandé

1. Pour chaque expérience, recopier et compléter le tableau suivant :

V	Volume introduit (en cm^3)	0	10	20	…	100
h	Niveau atteint par 1e liquide dans le bescher (en cm)					

2. Placer dans le repère suivant les points de coordonnées (V, h) obtenues dans les tableaux réalisés



3 . Pour chaque situation qu'observe-t-on ? Comparer les deux situations.

Complément possible

• Recommencer 1'expérience décrite en A avec des quantités constantes de 5 cm^3.
Puis compléter le tableau suivant:

V	Volume introduit (en cm^3)	0	5	10	…	100
h	Niveau atteint par 1e liquide dans le bescher (en cm)					

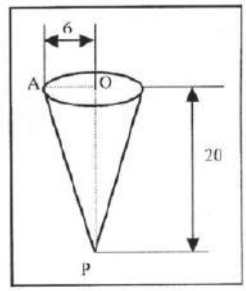
• Placer ensuite les points de coordonnées (V; *h*) données par le tableau ci-dessus dans le repère précédent mais en changeant de couleur.

• Que constate-t-on ?

Un Réservoir conique

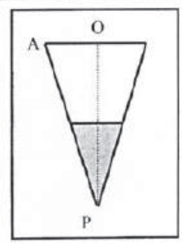
L'unité est le cm.

Un réservoir a la forme d'un cône de rayon d'ouverture OA = 6 et de hauteur OP = 20 (figure ci-contre).



1. Calculer le volume de ce cône.
En déduire, si le réservoir est plein, le volume d'eau arrondi à l'unité.

2. On diminue de moitié la hauteur d'eau dans le pluviomètre
Que devient 1e volume d'eau :
– Il diminue de moitié ?
– Il est égal à 250 cm^3 ?
– Peut-on le deviner ?

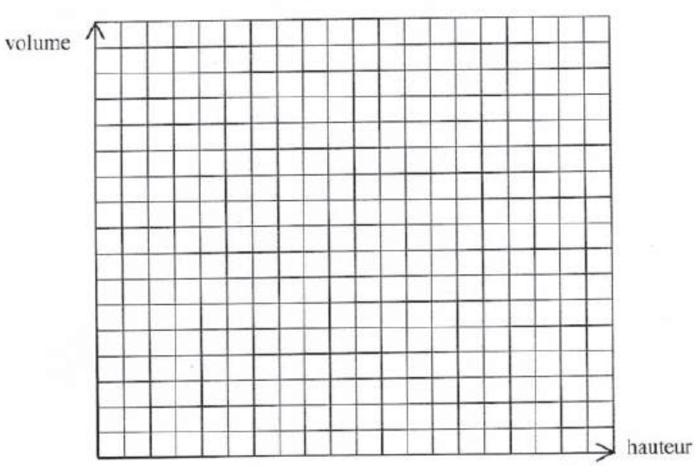


Pour contrôler votre réponse :
a) Calculer le rayon du disque de la surface de l'eau.
b) En déduire le volume d'eau arrondi à l'unité.

3. En utilisant la méthode précédente, compléter le tableau :

Hauteur en cm		0	5	10	15	20
Volume d'eau en cm^3	Valeurs exactes :					
	Valeurs approchées arrondies à l'unité :					

4. Utiliser le quadrillage ci-dessous pour placer les cinq points obtenus à l'aide du tableau.



5. Que constate-t-on ?

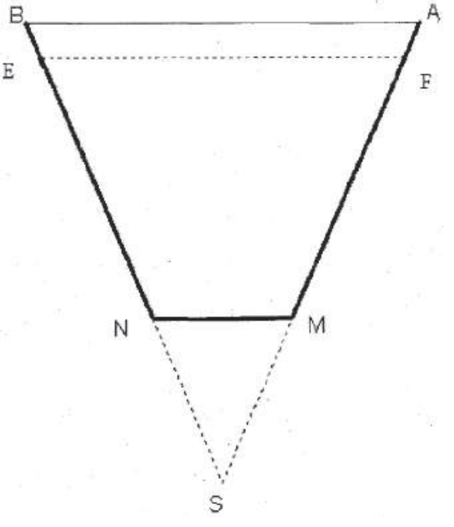
Le pluviomètre

Un pluviomètre a la forme d'un tronc de cône. Il est représenté sur la figure ci-contre, en coupe, par le trapèze NMAB.

La distance de S à la droite (NM) est égale à 6 cm et la distance de S à (AB) est égale à 21 cm.

MN = 2cm.

On appelle h le niveau d'eau dans le pluviomètre.



On pose : $r = \dfrac{EF}{2}$.

1. Exprimer r en fonction de h.
Le rayon r est-il une fonction affine de h (de la forme $ah + b$) ?
Si oui, préciser les valeurs de a et de b.

2. Calculer le volume V_1 du cône de sommet S et de hauteur 6 cm. On donnera la valeur exacte.

3. Calculer le volume V_2 du cône de sommet S et de hauteur $(6 + h)$ cm, en fonction de h.

4. V désigne le volume d'eau contenue dans le pluviomètre.

Compléter le tableau suivant (les valeurs approchées seront au dixième) :

h	0	1,5	6	9
r				
V_1 en valeur exacte				
V_1 en valeur approchée				
V_2 en valeur exacte				
V_2 en valeur approchée				
V				

La fonction $h \mapsto V$ est-elle une fonction affine ?

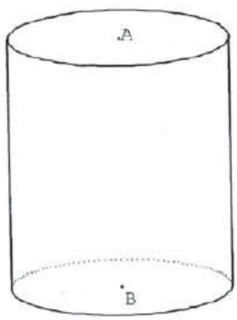
5. À l'aide d'un tableur, présenter le tableau ci-dessus.
On utilisera des formules pour V_1, V_2 et V permettant de compléter rapidement le tableau.
h prendra des valeurs de 0 à 12 avec un pas de 0,3. (Annexe 2)
Tracer les représentations graphiques de r en fonction de h, puis de V en fonction de h.

La fonction $h \mapsto V$ est-elle une fonction affine ?

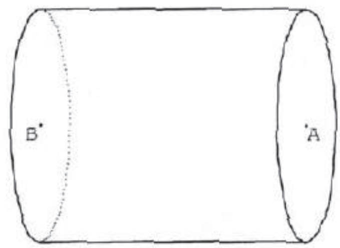
Réservoir cylindrique

On se propose de graduer en litre la jauge d'un réservoir cylindrique d'essence.
Les deux cas étudiés sont : le réservoir est placé verticalement, puis horizontalement.
Les dimensions sont données en cm : rayon 20 et hauteur 50.

Premier cas



Deuxième cas



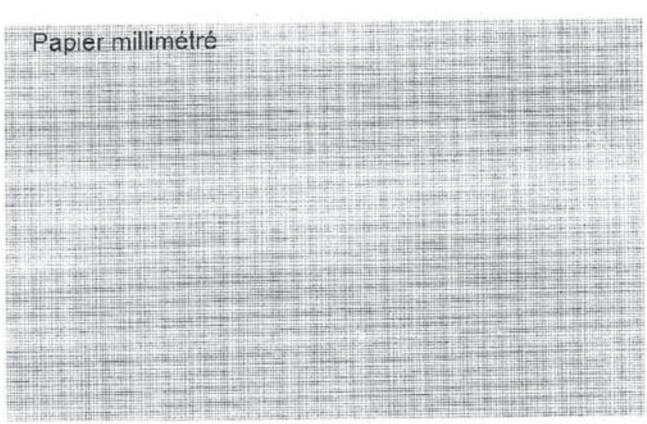
Premier cas : position verticale :

1. Quel est le volume total du réservoir en cm^3 et en litres ?

2. Chaque hauteur h (en cm) de liquide correspond à un volume approché V (en litres) donné par la relation : $V(h) = 1{,}256 \times h$.

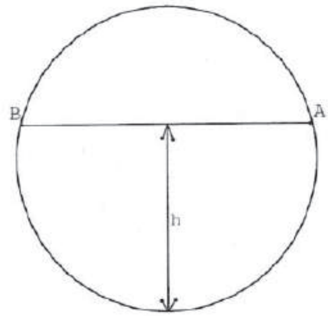
Compléter le tableau suivant et tracer la représentation graphique de V : $h \mapsto V(h)$.

h (en cm)	10	20	30	40	50
V (en litres)					



3, Que remarque-t-on sur cette représentation graphique ?
Comment s'appelle le type de fonction que l'on vient d'étudier ?

Deuxième cas : position horizontale :



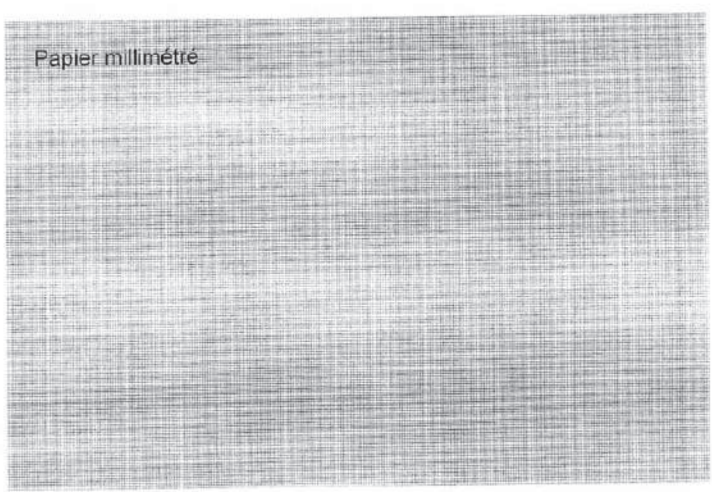
4. Dans quel intervalle sont comprises les valeurs de *h* ?

5. Les valeurs des hauteurs de liquide et les volumes arrondis correspondants sont donnés dans le tableau suivant, que vous compléterez.

h (en cm)	5	10	15	20	25	30	35	40
V (en litres)	4,50	12,25	29,52	31,42	41,31	50.55	58,30	62,83
V/*h*								

6. Que remarque-t-on sur les résultats de la troisième ligne du tableau ?
La fonction qui lie V et *h* est-elle linéaire ?

7. Dans le repère suivant placer les points de coordonnées (*h*, V).



Les points sont-ils alignés ?

Quatre récipients

Généralités sur les fonctions numériques.

Question 1 : Nous disposons de quatre récipients de même hauteur 1m, soit 10 dm, posés sur le sol.

1. Le premier récipient est cubique et sa base est un carré de côté 1m.
Le dessiner en perspective cavalière. Quel est, en litres, son volume ?

2. Le deuxième récipient est cylindrique ; sa base a pour diamètre 1m et possède un fond épais de 5cm.
Faire un croquis en perspective. Quelle est, en litres, la valeur exacte de son volume ?
En donner une valeur arrondie au litre près.

3. Le troisième récipient est un cône dont « la pointe » est en bas et dont le cercle supérieur a pour rayon 1m.
Faire un croquis en perspective. Quelle est, en litres, la valeur exacte de son volume ?
En donner une valeur arrondie au litre près.

4. Le quatrième récipient est un prisme droit : sa base est un trapèze rectangle, une face latérale est un carré de côté 1m, sa face latérale opposée est un rectangle de dimensions 1m et 2m.
Il est posé sur sa face carrée.
Le dessiner en perspective cavalière. Quel est, en litres, son volume ?

Question 2 : On remplit ces récipients d'eau jusqu'à la hauteur h mesurée à partir du sol :

1. Calculer les volumes d'eau nécessaires pour les quatre récipients quand h prend successivement les valeurs 1, 2, 3, 5, 8 et 10 dm.
(on pourra présenter les réponses dans un tableau de valeurs comme ci-dessous).

Valeur de h	1	2	3	5	8	10
Récipient 1						
Récipient 2						
Récipient 3						
Récipient 4						

2. Dans un repère orthogonal du plan, la hauteur d'eau étant en abscisse et son volume en ordonnée, vous choisissez les unités en fonction des valeurs observées à la question précédente. Placez les points dont les coordonnées sont celles définies par le tableau du 1 (on utilisera une couleur par récipient).

3. Au vu du graphique précédent, quelles conjectures pouvez-vous faire ?
La forme des récipients vous laissait-elle prévoir certains de ces résultats ?

Question 3 : On a utilisé un tableur pour effectuer facilement un nombre important de calculs : on a fait varier h de 0 a 10 avec un pas de 0,1 (ce qui veut dire de 0,1 en 0,1).

Les résultats sont donnés sur la feuille ci-jointe. (Annexe 3)
(Une analyse de certains résultats doit être conduite)

Pour un même volume d'eau versée, quel est le récipient où la hauteur de 1'eau est la plus grande ?
Est-ce toujours ou non le même ? Justifier.

Question 4 : Si le nombre h prend toutes les valeurs de l'intervalle [0, 10], h est alors un nombre réel, pouvez-vous alors compléter les représentations graphiques faites à la question 2 ?

Certains des tracés obtenus doivent vous rappeler des notions étudiées en classe de troisième.

Lesquelles et pourquoi ?

On désigne par f la fonction numérique associée au remplissage du premier récipient, respectivement par g, k et ℓ celles associées aux remplissages des deuxième, troisième et quatrième.

Pour h compris entre 0 et 10, déterminer les images par f, g, k et ℓ que 1'on notera respectivement $f(h)$, $g(h)$, $k(h)$ et $\ell(h)$.

(annexes : page suivante)

Annexe 1

À la suite de l'analyse de l'ensemble des programmes du primaire à la seconde, nous arrivons à la conclusion suivante en ce qui concerne l'articulation Troisième, Seconde à propos de la notion de fonction.

En troisième	**En seconde**
1) Pour l'introduction : • Petits exemples concrets • Représentation schématique $x \longrightarrow$ $\boxed{\text{Machine à transformer}}$ $\longrightarrow f(x)$ 2) Ne pas aller plus loin que : • Calculer une image. • Trouver le nombre qui a telle image. • Notation : $x \mapsto$ et $f(x)$. • Linéaire, affine et quelques exemples de non-affines. 3) Lien graphique-calcul: a) Fonction affine donnée par deux points : • Être capable de trouver par calcul son expression algébrique, – Système – Proportionnalité des accroissements moyens. • Représenter la fonction en plaçant des points puis vérifier « a » et « b » sur le graphique. b) Fonction affine donnée par son expression algébrique : • Être capable de représenter la fonction à l'aide de « a » et « b ». • Trouver deux points puis représenter la fonction. c) Fonction affine donnée par sa représentation graphique : • Trouver son expression algébrique en lisant le « a » et le « b » 4) Problèmes dits « concrets » en restant modeste.	1) On reprend tout pour mieux acquérir : • La formalisation • La lecture graphique, 2) On étudie les équations : $f(x) = k$; $f(x) = g(x)$ • À l'aide du graphique • Par le calcul. 3) On étudie les inéquations : $f(x) < k$; $f(x) > k$ $f(x) < g(x)$; $f(x) > g(x)$ • À l'aide du graphique • Par le calcul, en restant très modeste. 4) Fonctions de références : • Graphiques très rigoureux • Variation, constat sur l'ordre. 5) Enchaînement simple de fonctions de références. 6) Aller et retour entre tableau des variations et représentation graphique. 7) Problèmes dits « concrets » allant jusqu'à l'optimisation par lecture graphique.

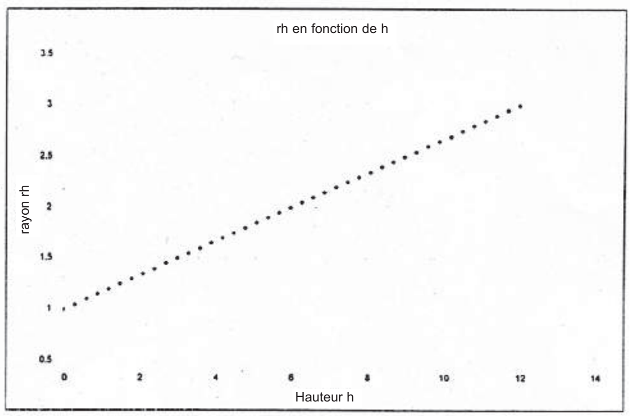
Annexe 2

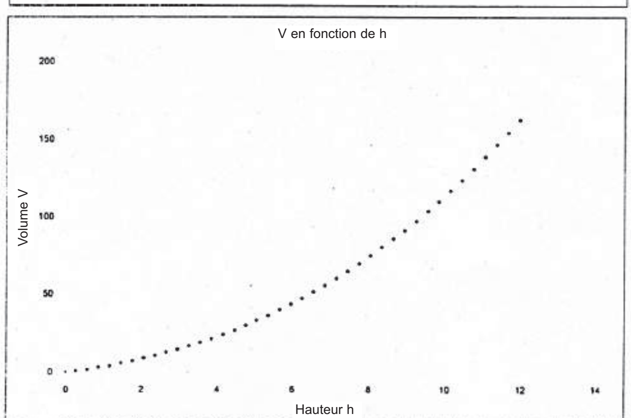
h	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3
rh	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45	1.5
V2	6.283	7.274	8.363	9.556	10.857	12.272	13.804	15.459	17.241	19.155	21.206
V	0.000	0.990	2.080	3.273	4.574	5.989	7.521	9.176	10.958	12.872	14.923

h	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6	6.3
rh	1.55	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9	1.95	2	2.05
V2	23.398	25.736	28.225	30.869	33.674	36.644	39.783	43.096	46.589	50.265	54.130
V	17.115	19.453	21.942	24.586	27.391	30.360	33.500	36.813	40.306	43.982	47.847

h	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9	9.3	9.6
rh	2.1	2.15	2.2	2.25	2.3	2.35	2.4	2.45	2.5	2.55	2.6
V2	58.189	62.445	66.903	71.569	76.448	81.542	86.859	92.401	98.175	104.184	110.433
V	51.905	56.161	60.620	65.286	70.164	75.259	80.576	86.118	91.892	97.901	104.150

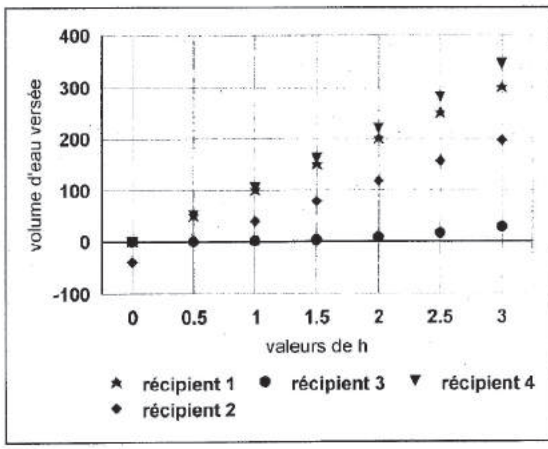
h	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12
rh	2.65	2.7	2.75	2.8	2.85	2.9	2.95	3
V2	116.928	123.672	130.671	137.928	145.450	153.241	161.304	169.646
V	110.645	117.389	124.387	131.645	139.167	146.957	155.021	163.363

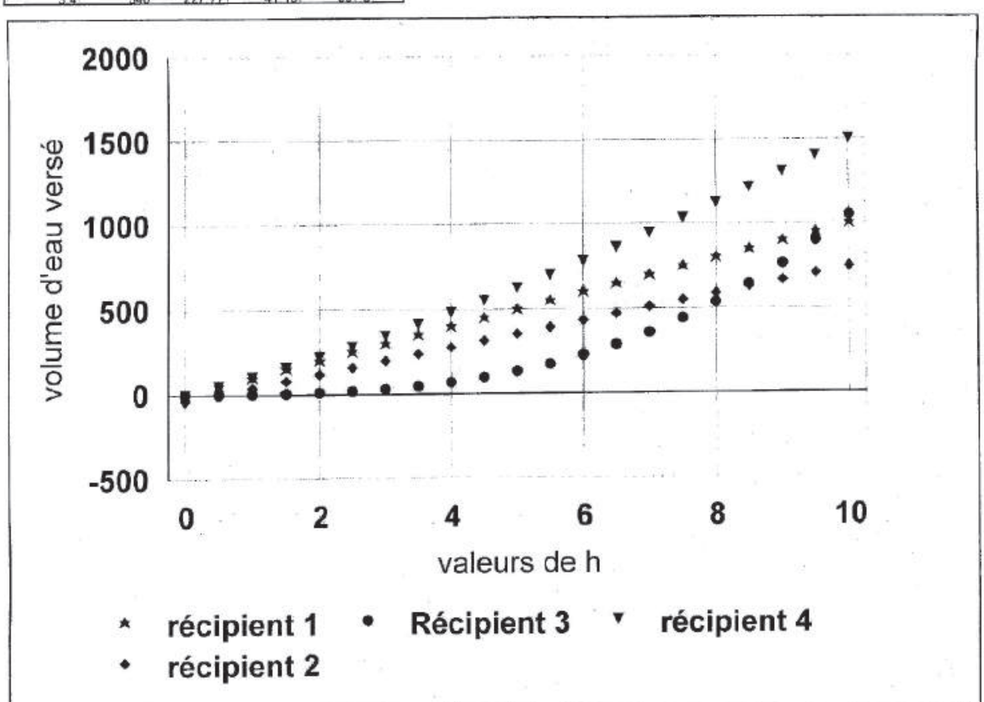




Annexe 3

volumes d'eau, dans les 4 récipients				
	en fonction du niveau h atteint par l'eau, en litres			
h en dm :	récipient 1 :	récipient 2 :	récipient 3 :	récipient 4 :
0	0	-39.27	0.00	0
0.1	10	-31.42	0.00	10.05
0.2	20	-23.56	0.01	20.2
0.3	30	-15.71	0.03	30.45
0.4	40	-7.85	0.07	40.8
0.5	50	0.00	0.13	51.25
0.6	60	7.85	0.23	61.8
0.7	70	15.71	0.36	72.45
0.8	80	23.56	0.54	83.2
0.9	90	31.42	0.76	94.05
1	100	39.27	1.05	105
1.1	110	47.12	1.39	116.05
1.2	120	54.98	1.81	127.2
1.3	130	62.83	2.30	138.45
1.4	140	70.69	2.87	149.8
1.5	150	78.54	3.53	161.25
1.6	160	86.39	4.29	172.8
1.7	170	94.25	5.14	184.45
1.8	180	102.10	6.11	196.2
1.9	190	109.96	7.18	208.05
2	200	117.81	8.38	220
2.1	210	125.66	9.70	232.05
2.2	220	133.52	11.15	244.2
2.3	230	141.37	12.74	256.45
2.4	240	149.23	14.48	268.8
2.5	250	157.08	16.36	281.25
2.6	260	164.93	18.41	293.8
2.7	270	172.79	20.61	306.45
2.8	280	180.64	22.99	319.2
2.9	290	188.50	25.54	332.05
3	300	196.35	28.27	345
3.1	310	204.20	31.20	358.05
3.2	320	212.06	34.31	371.2
3.3	330	219.91	37.63	384.45
3.4	340	227.77	41.16	397.8





Annexe 4

Classe de Sixième : Le volume de l'aquarium

Objectifs :

– Se repérer sur un quadrillage.
– Découvrir une situation de proportionnalité.
– Observer des points sur un graphique.

Commentaires :

Cette activité ne peut être proposée qu'après l'étude des volumes.
On ne relie pas les points, l'alignement est constaté à l'aide de la règle car la notion de continuité ne peut être abordée.
Cette étude est un exemple utilisant la multiplication avec trois facteurs.
C'est l'occasion pour l'enseignant d'introduire : « exprimer le volume en fonction de ».

Classe de Cinquième : Un aquarium en forme cylindrique

Objectifs :

– Reconnaître une situation de proportionnalité dans un cas et découvrir une situation de proportionnalité des accroissements dans l'autre cas, puis les comparer.
– Valeurs exactes, valeurs approchées.
– Enclencher la démarche « du discret vers le continu » avec une diminution du pas de remplissage.
– Favoriser l'interdisciplinarité en réalisant l'expérience en physique-chimie.

Commentaires :

Cette activité ne peut être proposée qu'après l'étude du cylindre.
Elle peut être proposée dans le cadre des I.D.D.
Utilisation d'un logiciel de géométrie et d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie dynamique.
La diminution du pas en utilisant un tableur prolonge les manipulations ; notion de simulation.
On peut observer d'autres types de verres mesureurs et la non-proportionnalité des accroissements.

Classe de Quatrième : Un réservoir conique

Objectifs :

– Découverte d'une situation de non-proportionnalité par le calcul et par visualisation graphique.
– Valeurs exactes, valeurs approchées.
– Choix d'une unité et précision d'un résultat en rapport avec la « taille » d'une représentation graphique.

Commentaires :

Cette activité ne peut être proposée qu'après l'étude du cône et la proportionnalité dans les triangles.
Elle permet d'établir une formule de calcul de volume et de visualiser d'autres fonctions que la fonction affine.

Un exemple pour ne pas confondre valeur exacte et valeur arrondie.
La diminution du pas en utilisant un tableur prolonge les manipulations ; notion de simulation.
Mais ne pas encore établir de « lissage » de la courbe.

Classe de Troisième : Le pluviomètre
Objectifs :
– Rencontre d'autres fonctions que les fonctions affines.
– Un approfondissement du calcul littéral.
– Révision : valeurs exactes, valeurs approchées.
– Choix d'une unité et précision d'un résultat en rapport avec la « taille » d'une représentation graphique.
– Utilisation d'un tableur.
Commentaires :
Cette activité ne peut être proposée qu'après l'étude des fonctions linéaires et affines et après les sections de solides.
L'activité devrait permettre d'approcher l'idée de continuité.

Classe de Seconde professionnelle : Un réservoir cylindrique
Objectifs :
– Établir la proportionnalité ou la non-proportionnalité entre deux grandeurs.
Commentaires :
Après l'étude de la proportionnalité une rencontre avec une fonction qui n'est ni linéaire, ni affine.
Les quantités de liquide du tableau paragraphe 5 seront données
(elles pourraient être déterminées par certains élèves).

Classe de Seconde générale : Quatre récipients de même hauteur
Objectifs : Permettre
– de définir, à partir de situations physiques, quatre fonctions numériques ;
– de déterminer leurs représentations graphiques ;
– d'utiliser les courbes obtenues pour conforter une conjecture.
Commentaires :
Cette activité ne peut être proposée qu'après le tracé de figure en perspective, en perspective cavalière.
Lecture d'un texte et rappel des formules de volume vues au collège.
Choix des unités en fonction du « cadre » réservé à la représentation.
Section d'un solide : constante ou non.
Utilisation d'un tableur.