Le « quinze-vainc » en CM2

Serge Petit(*)

Ayant relu récemment les brochures « jeux » de l'APMEP, et plus particulièrement la première d'entre elles, qui est loin d'être désuète, j'ai été tenté de faire jouer des élèves d'une classe de CM2 au « quinze-vainc ». La brochure précise que ce jeu a été expérimenté en classe de seconde. Comment pouvaient réagir des élèves de CM2 avec ce même jeu ?

J'ai proposé à Christiane Longeron, Maître Formateur à l'École Jean-Jacques Rousseau à Colmar de jouer au jeu dont la règle figure dans le cadre ci-dessous. Elle joue et me dit aussitôt : « je vais le faire dans ma classe » et elle m'invite à participer à ce travail avec ses élèves de CM2.

Travail ? D'aucuns pourraient penser que jouer en classe est une perte de temps, que les enseignants ont des programmes à respecter, que les activités à proposer aux élèves doivent en découler directement et que, les instructions officielles ne préconisant pas un enseignement par le jeu, celui-ci ne devrait pas réellement trouver sa place en classe, sauf à conduire à des apprentissages immédiats, clairement identifiés *a priori*. Nous avons fait le pari que ce jeu permettrait aux élèves à la fois de mettre en œuvre des savoirs mathématiques établis et peut-être même de découvrir des objets mathématiques ou des outils nouveaux. Nous avons donc introduit ce jeu dans une classe de CM2 et ce court texte est un témoignage de cette activité.

Jeu ? Je ne voudrais pas, dans ce court témoignage, préciser ce que peut être jouer, mais je rappellerai cependant ce qu'en dit Gilles Brougère[1]. Pour lui, jouer est une activité qui vérifie cinq critères. Il s'agit d'une activité *frivole*, de *second degré* en ce sens qu'elle se situe dans un tout autre plan que celui de la vie réelle, qui obéit à une *règle*, dans laquelle on prend des *décisions* et qui reste marquée par *l'incertitude*.

On appelle souvent « jeux éducatifs » des activités qui ne respectent pas tous ces critères, mais qui sont pratiquées en classes sous l'appellation de « jeux ». Le mathématicien désigne souvent par le mot « jeu » des activités que d'autres appelleraient « énigmes » et qui sont en fait des problèmes.

Règle de base du jeu et matériel

Matériel pour deux joueurs : Les cartes numérotées de 1 à 9 d'une couleur d'un jeu de 52 cartes. Chaque joueur se munit de quoi prendre des notes.

Jeu : Chaque joueur tire trois fois une carte à tour de rôle et les garde devant lui.

Gagnant : le joueur qui est le premier à avoir tiré trois cartes dont la somme des nombres inscrits est égale à 15.

(*) Formateur en mathématiques, IUFM d'Alsace.

(1) In : Jeu et éducation, Éducation et Formation, Éd. L'Harmattan, 1995, p. 253.

Laissons jouer les élèves.

Première phase : nombres invisibles

Cette première phase qui s'est déroulée pendant une première séance d'une durée d'environ une demi-heure est destinée à familiariser les élèves avec la règle du jeu : notamment avec l'alternance des prises de cartes et le fait que c'est le premier joueur qui a trois cartes dont la somme des nombres indiqués est égale à quinze qui gagne. Elle est aussi destinée à montrer la différence qu'il peut y avoir entre un jeu au hasard et un jeu où l'élève peut développer une stratégie.

La première phase du jeu consiste donc à faire jouer les élèves, sans autre contrainte que le hasard. La règle est rappelée dans le cadre ci-dessus, mais les nombres inscrits sur les cartes(2) ne sont pas visibles (jeu à cartes retournées).

Chaque groupe de deux joueurs joue dix parties et note le nombre de parties gagnées par l'un et par l'autre.

Les élèves se prennent au jeu, mais gagnent peu…

Les résultats sont alors mis en commun et consignés dans un tableau sur une grande feuille de papier. La classe comporte dix groupes, il y a donc cent résultats.

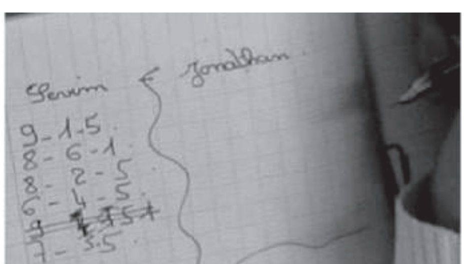
La maîtresse demande aux élèves comment on fait pour gagner… Les réponses sont évidentes … on ne fait rien. C'est le **hasard** qui fait gagner ou perdre. Personne n'est maître de son jeu. Les seules décisions à prendre concernent le choix de telle ou telle carte, mais en aveugle… Les élèves estiment que ce jeu n'est pas bien intéressant.

Note : Toute la suite s'est déroulée pendant une seule séance d'une durée d'environ une heure trente.

Deuxième phase : nombres visibles

Le but de cette phase est de permettre aux élèves de se rendre compte qu'en réfléchissant, ils peuvent modifier considérablement les résultats du jeu. Les cartes sont donc disposées sur la table, nombres visibles.

Les élèves jouent, mais cette fois bien moins vite que dans la phase précédente. Chaque groupe d'élève note les parties gagnées, et qui les a gagnées. Le nombre total de parties jouées n'est plus que de quarante (dans le temps réservé à cette phase de jeu, environ dix minutes).



Les élèves gardent traces des parties

Un tableau récapitulatif, voir ci-dessous, est rempli. Il convient de le commenter et de l'interpréter.

(2) Dans cette classe, nous n'avons pas pris de cartes, mais les nombres étaient inscrits sur des petits carrés de papier.

Mais auparavant, nous avons demandé aux élèves ce qu'ils pensaient de ce jeu et des deux phases différentes.

Les réactions sont nombreuses :

« *c'est comme le morpion* »… pourquoi ? demande la maîtresse, « parce qu'il faut empêcher l'autre de gagner » répond l'élève.

Un autre élève précise : « *c'est un jeu de stratégie* ». On lui demande ce qu'est une stratégie, il répond en prenant un exemple militaire.

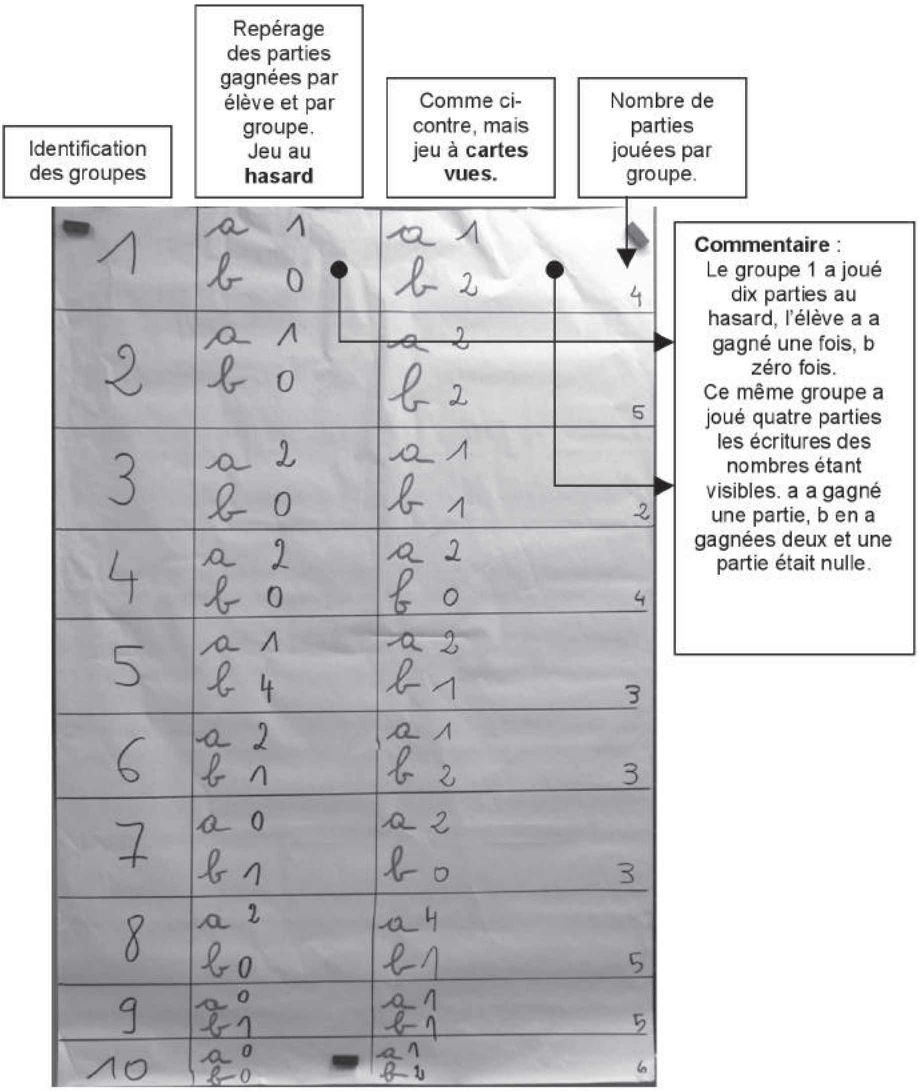


Tableau comparatif des résultats
partie au hasard et partie à cartes vues.

Quelques remarques sont notées sur feuille et affichées.

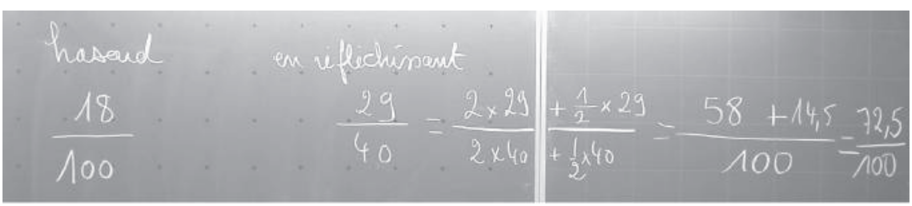
Le fait que le nombre de parties faces des cartes cachées soit de 100 et que celui des cartes vues ne soit que de 40 invite à une réflexion imprévue au moment de la préparation de la séance de jeu.

On compte collectivement le nombre de parties gagnées dans la première phase et celui de la deuxième phase.

Il y a 18 parties gagnées sur 100 parties jouées au hasard et 29 parties gagnées sur 40 jouées en connaissant les cartes sur la table ainsi que celles de l'adversaire (partenaire). Si la différence est évidente, la maîtresse demande quand même de préciser.

« *En supposant que l'on ait joué cent parties de la même manière que les quarante premières, combien de parties gagnées aurait-on eues ?* »

Un élève, souvent refermé sur lui-même, dit « *de quarante pour faire cent, il faut prendre deux fois quarante et encore la moitié* »… et détaille ce qu'il faut écrire au numérateur pour obtenir un dénominateur égal à 100 sans changer la valeur du rapport. Ce raisonnement, qui met en œuvre implicitement un raisonnement par proportionnalité, en mobilisant les propriétés de linéarité est explicité à la classe et conduit aux écritures suivantes au tableau :



Les élèves sont invités à exprimer le résultat en pourcentages, comme si la deuxième partie avait porté sur cent jeux. Cette demi-partie entre la soixante-douzième et la soixante-treizième n'est qu'un demi-problème… « *c'est pas vraiment comme si on en avait jouées cent* ».

La conclusion s'impose : on gagne beaucoup plus en réfléchissant. Les élèves trouvent bien plus intéressant le deuxième jeu car « *on réfléchit* ». Un bon point pour les mathématiques qui deviennent intéressantes car elles sont un lieu de réflexion. Mais, au fait, réfléchit-on toujours en cours de mathématiques ?

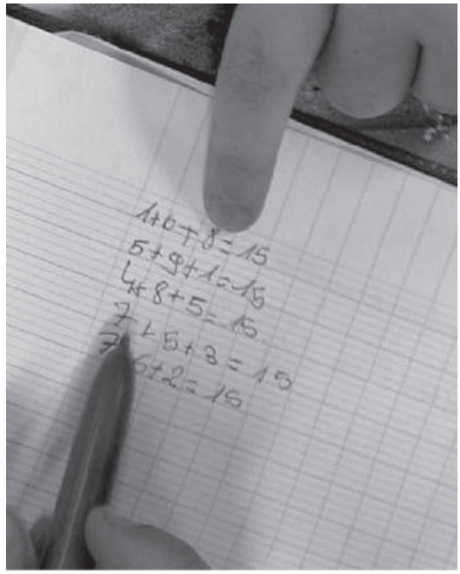
Les élèves sont enthousiastes quand on leur demande s'ils souhaitent trouver comment ne jamais perdre.

Vers l'émergence d'une stratégie

Nous demandons aux élèves de trouver tous les choix possibles de trois cartes dont la somme des nombres marqués vaut 15.

Le travail se fait individuellement, mais les élèves coopèrent volontiers entre eux. Les écrits ne sont généralement pas organisés.

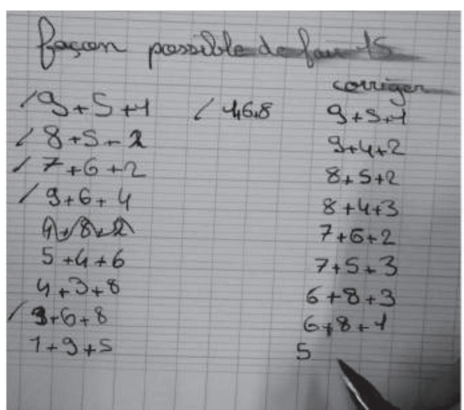
Une phase collective très rapide suit cette phase de recherche. On écrit au tableau, dans l'ordre indiqué par les élèves, l'ensemble des solutions qu'ils ont trouvées. La classe, dans son ensemble les a toutes trouvées, mais seulement quelques groupes avaient trouvé les huit solutions possibles.



Toutes les solutions figurent au tableau, mais nous disons aux élèves qu'il manque deux solutions. La classe, dans un silence impressionnant, se remet au travail. Il ne s'agirait pas d'oublier des configurations gagnantes. Au bout de quelques minutes, la classe s'agite un peu… « *Monsieur, on n'en trouve pas d'autre !* ». Cette remarque est reprise en chœur par tous les élèves.

Nous leur faisons alors remarquer que s'ils s'étaient tous remis à travailler si sérieusement c'est bien parce qu'ils n'étaient pas sûrs d'avoir écrit au tableau toutes les solutions. La question de savoir comment on peut être certain d'avoir toutes les solutions leur est alors posée collectivement.

Après un court instant, une petite fille déclare « *on n'a qu'à commencer par le plus grand* »… Elle explicite, on écrit d'abord le plus grand nombre dans la décomposition. Puis elle ajoute « *ensuite on écrit le plus petit* »… Interrogée sur la logique de ses propos elle finit par dire qu'on écrit ensuite le plus grand des deux et que le plus petit sera écrit en dernier.



Essai d'organisation des résultats

Nous demandons donc aux élèves de construire de cette manière le tableau de toutes les solutions. Le travail semble un peu difficile au début pour certains groupes, mais tous finissent par y arriver. Ils viennent de découvrir un outil de démonstration par exhaustivité.

Les parties sont nulles

Les élèves sont invités à jouer à nouveau en s'aidant du tableau ainsi construit. À part deux groupes où un élève a gagné, toutes les parties sont nulles. Personne ne peut plus perdre puisque chacun peut empêcher l'autre de gagner ! Catastrophe, c'est la mort du jeu. Les élèves qui ont gagné ont réussi une fois contre une faute de calcul, l'autre contre une étourderie (explications des élèves).

Nous proposons aux élèves d'aller un peu plus loin et de construire un nouvel outil, plus simple à utiliser et qui leur permettra aussi de ne jamais perdre. L'enthousiasme n'a pas baissé dans la classe.

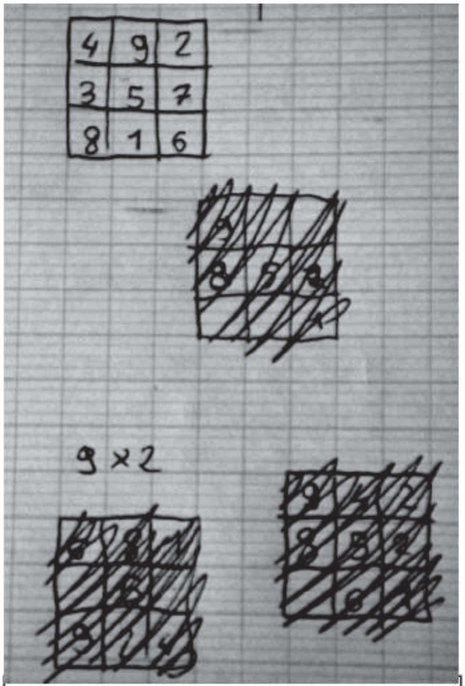
Vers un carré magique

Nous dessinons au tableau noir un tableau 3 × 3 et montrons aux élèves qu'il y a trois lignes, trois colonnes et deux diagonales.

En tout cela fait donc huit alignements. Nous leur demandons de placer tous les nombres de 1 à 9 dans ce tableau, de manière à ce que la somme des nombres marqués sur chaque ligne, chaque colonne ou chaque diagonale soit égale à 15.

Les tâtonnements ne sont pas très fructueux. Pour ce faire, il va être bon de réfléchir en observant le tableau réalisé précédemment. Nous leur suggérons d'observer combien de fois chaque nombre apparaît dans les décompositions. Les élèves dressent dont le tableau ci-dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	2	3	4	3	2	3	2

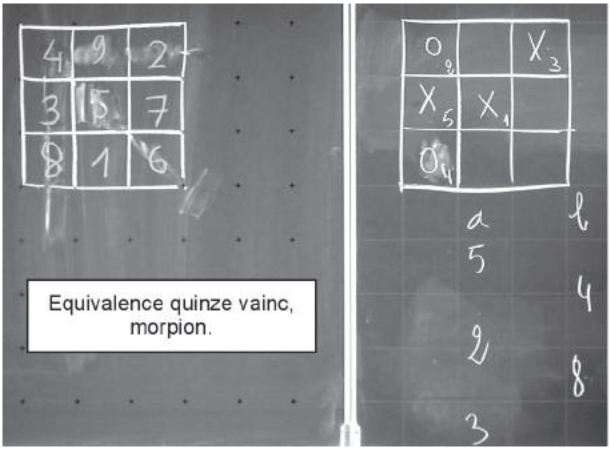


Essais et erreurs pour trouver le carré magique

Il serait peut-être possible à ce moment là de parler d'effectifs. Certains élèves suggèrent de prendre le 5 quand on joue parce qu'il apparaît le plus souvent… Ce tableau va aider les élèves à organiser le tableau magique. Certains tâtonnent car ils n'ont pas remarqué que les nombres qui apparaissent trois fois doivent se placer dans les coins, d'autres qui ont fait cette remarque placent ces nombres de manière aléatoire et sont contraints à reprendre plusieurs fois leur travail.

Une fois ce travail réalisé, il est aisé de revenir à la remarque d'une élève… « *c'est comme le morpion* ».

Nous dessinons alors un tableau 3 × 3 pour y jouer au « morpion ». Deux élèves jouent et ont fait apparaître parallèlement les variations dans l'un et l'autre des deux jeux.



Les élèves quitteront cette séance sûrs de ne jamais perdre à ce jeu qu'ils proposeront à leur entourage.

Mais qu'ont-ils appris en mathématiques ?

Quelles mathématiques ont été mises en œuvre ?

Il nous semble que ce jeu, comme de nombreux autres jeux qu'il est possible d'introduire en classes, permet aussi de faire des mathématiques, de les faire autrement, encore est-il nécessaire de les pointer et que l'élève en conserve une trace écrite.

Examinons brièvement les mathématiques mises en œuvre.

Du point de vue du calcul

Travail sur les décompositions additives, sur les compléments d'une somme à quinze.
Travail sur la proportionnalité : utilisation empirique des formules de linéarité pour trouver un rapport égal à un rapport donné (la proportionnalité n'est pas au programme, mais on peut l'approcher, notamment en mettant en œuvre ces formules).
Comparaison de deux rapports.
Travail sur les pourcentages.
Approche de la notion d'effectifs, de fréquence, etc.

Du point de vue de la logique

Élaboration d'un outil de démonstration par exhaustivité (par rangement systématique).
Respect de contraintes (dans le jeu, dans l'organisation des nombres dans le carré magique).
L'emploi d'expressions comme « si … alors ».

Du point de vue de l'heuristique

Travailler par essais et erreurs en vue de l'élaboration du tableau magique en tenant compte des effectifs d'apparition des nombres dans les décompositions.

Outre les mathématiques, la pratique de ce jeu contribue vraisemblablement au développement personnel de l'enfant qui doit :

– travailler dans le respect de règles,
– prendre le point de vue de l’autre, se mettre à sa place (pour anticiper ce qu’il pourrait faire),
– prendre des décisions et en assumer les conséquences (sans conséquences autres pour lui que celles liées au jeu, celui-ci étant « futile ».

Traces écrites

Il paraît fondamental de conserver des traces écrites des mathématiques ou des outils logiques découverts pendant le jeu et les phases de mise en commun.

Ces traces pourront être réalisées de manière personnelle, faisant par exemple état des errements dans la recherche, des méthodes utilisées pour parvenir à une découverte, à une solution ou à une stratégie pertinente. Une partie collective, rédigée en commun sous la direction du maître, concernera essentiellement les mathématiques ou les aspects logiques (par exemple formaliser l’outil de démonstration par exhaustivité).

Ces traces seront alors des références communes à l’ensemble de la classe et serviront d’outils par la suite. Une partie d’entre elles pourra même faire l’objet d’un affichage dans la salle.

Prolongements possibles

Les prolongements possibles en mathématiques peuvent se situer au niveau de la consolidation des acquis ou consister en une ouverture vers d’autres découvertes.

Consolidation des acquis

L’organisation systématique des données, pour parvenir à garantir l’exhaustivité doit être consolidée par diverses autres activités de nature analogue : décomposer systématiquement d’autres nombres en sommes de deux, trois ou quatre autres entiers, décomposer des nombres en produit de facteurs afin de les trouver tous, etc.

Nouvelles découvertes

La situation porte à définir des fréquences relatives, à travailler sur des rapports, des pourcentages, pourquoi ne pas le faire ?

Les élèves peuvent aussi être invités à trouver comment, à partir d’un carré magique on peut en fabriquer d’autres, comment donc construire d’autres jeux analogues avec d’autres valeurs numériques. Ce qui oblige à entrer dans une démarche d’analyse, activité essentielle à développer en classe.

Conclusion

Le jeu de stratégie en classe peut être formateur pour l’esprit par les facultés de réflexion qu’il impose, par l’aspect ludique qui motive les élèves à combiner activités mathématiques et logiques, par les mathématiques nouvelles qu’il permet éventuellement de découvrir. J’ajouterais volontiers que ses bénéfices pourraient rapidement s’estomper s’il n’était accompagné d’écrits organisés individuellement ou collectivement par le maître ou sous sa direction.