Exercices de ci, de là

Exceptionnellement, les exercices proposés dans ce numéro ne sont pas extraits de Corol'aire (Journal de la Régionale APMEP Poitou-Charentes), signe de vitalité pour cette rubrique.
Les propositions d'exercices et les solutions sont à envoyer à :

APMEP (Groupe du Clain),
IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Le groupe du Clain

Exercices

Exercice n° 1, proposé par Jacques BOROWCZYK (Tours)

Soit un triangle ABC. On considère le trapèze rectangle ayant pour sommets les centres I_B et I_C des cercles ex-inscrits dans les angles B et C et les points de contact avec la droite (BC) de ces cercles.
1°) Montrer que le point d'intersection I des diagonales du trapèze est sur la hauteur issue du sommet A.
2°) Si D′ désigne le pied de la bissectrice extérieure issue du sommet A, montrer que la droite (D′I) coupe les bases du trapèze en leur milieu.
3°) Montrer que dans tout triangle ABC, la hauteur issue du sommet A est moyenne harmonique des rayons des cercles ex-inscrits dans les angles B et C.

Exercice n° 2, proposé par Madame Fathi DRISSI (Comité de la Régionale Lorraine de l'APMEP)

1°) À l'aide du seul compas, construire le centre d'un triangle équilatéral dont on connaît les sommets A, B et C.
2°) À l'aide du seul compas, construire un point situé au tiers d'un segment [AB] donné.

Exercice n° 3 (« Olympiades » communiqué par A. OUARDINI)

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus et dans lequel AB ≠ AC. Le cercle de diamètre [BC] rencontre les côtés [AB] et [AC] respectivement en M et N.

On note O le milieu du côté [BC]. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR se rencontreraient-ils en un point du côté [BC] ?

Solutions

Exercice nº 8 du BV nº 451 : Solution de Maurice BLANPAIN (Pelves - Régionale de Lille)

Montrer que tout entier impair non divisible par 5 a un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1.

Il s'agit d'établir que tout naturel n impair non divisible par 5 a un multiple de la forme :

$$a_m = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1},\ m \in \mathbf{N}^*$$

Soit r_i, $i \in \mathbf{N}$, le reste dans la division de 10^i par n. Comme 10 est premier avec n, on peut, en écartant le cas trivial $n = 1$, introduire $\theta = \mathrm{ord}_n(10)$, qui est, dans le groupe multiplicatif U_n des éléments inversibles (appelés aussi unités) de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, l'ordre de l'élément 10 (c'est-à-dire de la classe $10 + n\mathbf{Z}$).

La fonction $i \to r_i$ étant périodique de période θ, le reste dans la division par n de la somme de θ puissances consécutives de 10 ne dépend pas de cette somme. Soit r ce reste.

Si $r = 0$, a_θ répond à la question.

Si $r > 0$, les congruences étant de module n, on a pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$a_{k\theta} = \sum_{0\le i\le k-1}\ \sum_{0\le j\le \theta-1} 10^{i\theta+j} \equiv kr$$

où il reste à choisir k tel que $kr \equiv 0$, le plus petit de ces k étant $\frac{1}{r}\mathrm{ppcm}(r,n)$.

Exemples

1) $n = 21$, $\theta = 6$ avec $(r_0, \ldots, r_5) = (1, 10, 16, 13, 4, 19)$, $\sum_{0\le i\le 5} r_i = 63$, $r = 0$:

$a_6 = 111\,111 = 5\,291 \times 21$.

2) $n = 33$, $\theta = 2$ avec $(r_0, r_1) = (1, 10)$, $\sum_{0\le i\le 1} r_i = 11$, $r = 11$: $\frac{1}{r}\mathrm{ppcm}(r,n) = 3$,

$a_{3\times 2} = 111\,111 = 3\,367 \times 33$.

Remarque. L'énoncé plus général où 1 est remplacé par un chiffre quelconque (autre que 0) aurait demandé un surcroît de perspicacité de la part du « solutioniste » consistant à remarquer qu'il suffisait de traiter le cas du chiffre 1.

Exercice nº 6 du BV nº 451 : Solution de Maurice BLANPAIN

On considère deux nombres entiers (positifs) a et b tels que $a^2 + 2b$ soit un carré parfait. Mettre $a^2 + b$ sous la forme d'une somme de carrés d'entiers. (Maillard et Millet, Classe de Mathématiques)

$a^2 + 2b = c^2$ implique $a^2 + b = a^2 + \dfrac{c^2 - a^2}{2} = \dfrac{a^2 + c^2}{2} = \left(\dfrac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c-a}{2}\right)^2$.