

# Le Savant Cosinus

François Rideau

*Sachant qu'en 12 minutes il monte 0 voyageur,  
dans combien de temps appellera-t-on le n° 720 ?*

Christophe. L'idée fixe du Savant Cosinus

## 1. Introduction

La plupart des points remarquables d'un triangle ABC ont des coordonnées barycentriques qui s'expriment simplement au moyen des lignes trigonométriques des angles  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  du triangle. Citons quelques exemples :

- Le centre de gravité G : (1,1,1).
- Le centre du cercle circonscrit O :  $(\sin(2\hat{A}), \sin(2\hat{B}), \sin(2\hat{C}))$ .
- Le centre du cercle inscrit I :  $(\sin(\hat{A}), \sin(\hat{B}), \sin(\hat{C}))$ .
- L'orthocentre H :  $(\tan(\hat{A}), \tan(\hat{B}), \tan(\hat{C}))$ .
- Le point de Gergonne  $\Gamma$  :  $\left( \tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right), \tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right), \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \right)$ .

On va poser les questions suivantes :

**Problème.** Soit ABC un triangle d'un plan affine euclidien.

1. Reconnaitre le point  $\Omega$  de coordonnées barycentriques

$$(\cos(\hat{A}), \cos(\hat{B}), \cos(\hat{C})),$$

*c'est-à-dire en donner une construction simple.*

2. Montrer que les points G,  $\Omega$ ,  $\Gamma$  sont alignés.

## 2. Existence du point $\Omega$

Tout d'abord le point  $\Omega$  existe car la somme des masses

$$\cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}) + \cos(\hat{C}) \neq 0.$$

En effet on a :

$$\cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}) = 2 \cos\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right) \quad (1)$$

et

$$\cos(\hat{C}) = \cos(\pi - \hat{A} - \hat{B}) = -\cos(\hat{A} + \hat{B}) = 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right) \quad (2)$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{C}) &= 1 + 2 \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\right) \right) \\ &= 1 + 4 \sin\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) \sin\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) \sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right).\end{aligned}$$

Comme on a les inégalités

$$0 < \frac{\widehat{A}}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{\widehat{B}}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{\widehat{C}}{2} < \frac{\pi}{2},$$

il en résulte que :

$$\sin\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) > 0, \quad \sin\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) > 0, \quad \sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) > 0,$$

et, par suite,

$$\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{C}) > 1.$$

Pour éviter des maux de tête à ceux que rebute trop de trigonométrie, on peut aussi appliquer les relations métriques entre angles et côtés d'un triangle :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\widehat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C}) \end{cases} \quad (3)$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{C}) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c)}{2abc} > 0\end{aligned}$$

à cause des inégalités triangulaires.

### 3. Construction du point $\Omega$

L'idée est évidemment de construire les points d'intersection respectifs L, M, N des droites  $A\Omega$ ,  $B\Omega$ ,  $C\Omega$  avec les côtés BC, CA, AB du triangle.

Là aussi, c'est un peu l'inconvénient de la géométrie affine, il faut montrer l'existence de ces points. En vertu de l'associativité barycentrique, L est le barycentre des points massiques  $(B; \cos(\widehat{B}))$  et  $(C; \cos(\widehat{C}))$ , M celui des points massiques  $(C; \cos(\widehat{C}))$  et  $(A; \cos(\widehat{A}))$  et N celui des points massiques  $(A; \cos(\widehat{A}))$  et  $(B; \cos(\widehat{B}))$ .

Il faut donc montrer les inégalités

$$\cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{C}) \neq 0, \cos(\widehat{C}) + \cos(\widehat{A}) \neq 0, \cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) \neq 0.$$

Si on avait  $\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) = 0$ , on aurait en vertu de l'égalité (1) :

$$\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\right) \cos\left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}\right) = 0.$$

Mais

$$\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = 0$$

entraînerait  $\widehat{C} = 0$ , ce qui est absurde car  $\widehat{C} > 0$ .

De même

$$\cos\left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}\right) = 0$$

entraînerait :

$$|\widehat{A} - \widehat{B}| = \pi,$$

ce qui est aussi absurde car

$$0 < \widehat{A} < \pi, 0 < \widehat{B} < \pi.$$

Les deux autres inégalités se démontrent de façon analogue par permutations circulaires.

On peut encore éviter cette débauche de trigonométrie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2)}{2abc} \\ &= \frac{(a+b)(ab + c^2) - (a+b)(a^2 - ab + b^2)}{2abc} \\ &= \frac{(a+b)(c^2 - (a-b)^2)}{2abc} \\ &= \frac{(a+b)(c+a-b)(c-a+b)}{2abc} > 0 \end{aligned}$$

à cause des inégalités triangulaires.

Pour construire le point L barycentre des points massiques  $(B; \cos(\widehat{B}))$  et  $(C; \cos(\widehat{C}))$ , on va regarder trois cas de figure :

1. Les angles  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  sont aigus. Alors  $\cos(\widehat{B}) > 0$  et  $\cos(\widehat{C}) > 0$  (voir figure 1).

Le point L est situé sur le segment BC.

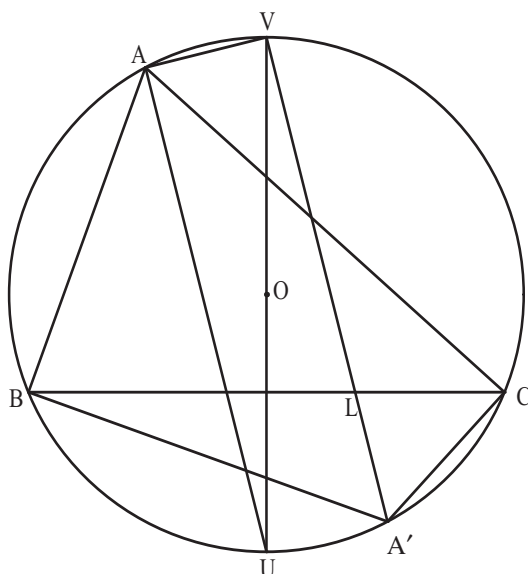


FIG. 1 – Le premier cas.

La perpendiculaire en B au côté AB et la perpendiculaire en C au côté AC se coupent au point  $A'$  diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Compte tenu des hypothèses faites sur les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ , les points A et  $A'$  sont de part et d'autre de la droite BC. Soit U le point où la bissectrice intérieure de l'angle  $\hat{A}$  coupe la médiatrice de BC et V le point où la bissectrice extérieure de l'angle  $\hat{A}$  coupe cette même médiatrice. Les points U et V sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Comme  $\widehat{A'BC} = \frac{\pi}{2} - \hat{B}$  et  $\widehat{A'CB} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$ , on a :

$$\begin{cases} \sin(\widehat{A'BC}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) = \cos(\hat{B}), \\ \sin(\widehat{A'CB}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \hat{C}\right) = \cos(\hat{C}). \end{cases}$$

Il en résulte que la droite  $A'L$  est la bissectrice intérieure au sommet  $A'$  du triangle  $A'BC$ . Cette bissectrice est aussi la droite  $A'V$ , laquelle est parallèle à la droite  $AU$ . Autrement dit, dans ce cas de figure, la droite  $A'L$  est parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle  $\hat{A}$  du triangle ABC.

2. L'un des angles  $\hat{B}$  ou  $\hat{C}$  est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  et supposons que ce soit  $\hat{B}$  pour fixer les idées (voir figure 2). Les points A et  $A'$  sont cette fois dans le même demi-plan délimité par la droite BC.

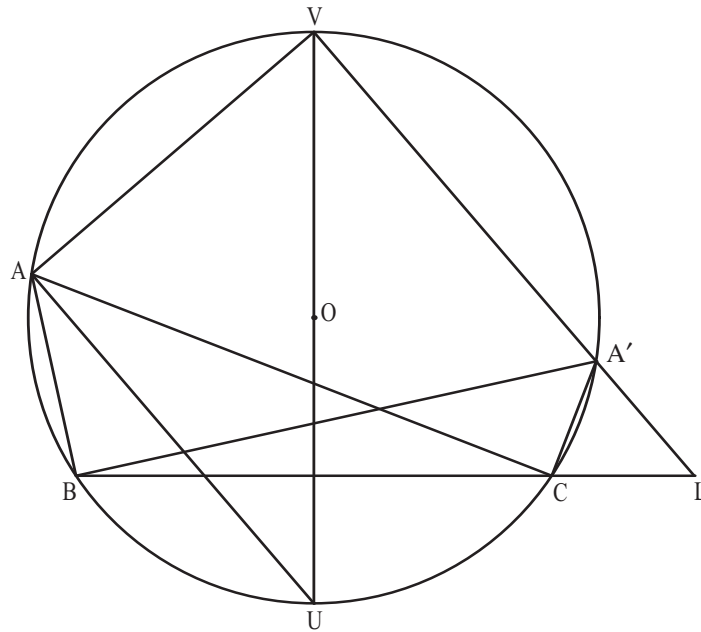


FIG. 2 – Le deuxième cas.

Comme  $\cos(\widehat{B}) < 0$  et  $\cos(\widehat{C}) > 0$ , le point L est sur la droite BC à l'extérieur

du segment BC. Comme  $\widehat{A'BC} = \widehat{B} - \frac{\pi}{2}$  et  $\widehat{A'CB} = \widehat{C} + \frac{\pi}{2}$ , on a :

$$\begin{cases} \sin(\widehat{A'BC}) = \sin\left(\widehat{B} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\widehat{B}), \\ \sin(\widehat{A'CB}) = \sin\left(\widehat{C} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\widehat{C}). \end{cases}$$

Il en résulte que la droite A'L est la bissectrice extérieure au sommet A' du triangle A'BC. Cette bissectrice est aussi la droite A'V, laquelle est parallèle à la droite AU. Autrement dit, dans ce cas de figure aussi, la droite A'L est encore parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{A}$  du triangle ABC.

3. L'un des angles  $\widehat{B}$  ou  $\widehat{C}$  est droit et supposons que ce soit l'angle  $\widehat{B}$ . Les points A' et L sont confondus avec C et L appartient encore à la droite CV symétrique de la bissectrice intérieure AU par rapport au centre O.

La construction du point  $\Omega$  est donc claire : on trace les droites symétriques des bissectrices intérieures aux sommets A, B, C du triangle ABC par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC. Ces droites concourent évidemment au point J symétrique de I par rapport à O. La droite A'J coupe le côté BC au point L de coordonnées barycentriques  $(0, \cos(\widehat{B}), \cos(\widehat{C}))$ , la droite B'J coupe le côté CA au

point M de coordonnées barycentriques  $(\cos(\hat{A}), 0, \cos(\hat{C}))$ , la droite  $C'J$  coupe le côté AB au point N de coordonnées barycentriques  $(\cos(\hat{A}), \cos(\hat{B}), 0)$ .

Par associativité barycentrique, les droites AL, BM, CN se coupent au point  $\Omega$  de coordonnées barycentriques  $(\cos(\hat{A}), \cos(\hat{B}), \cos(\hat{C}))$  (voir figure 3).

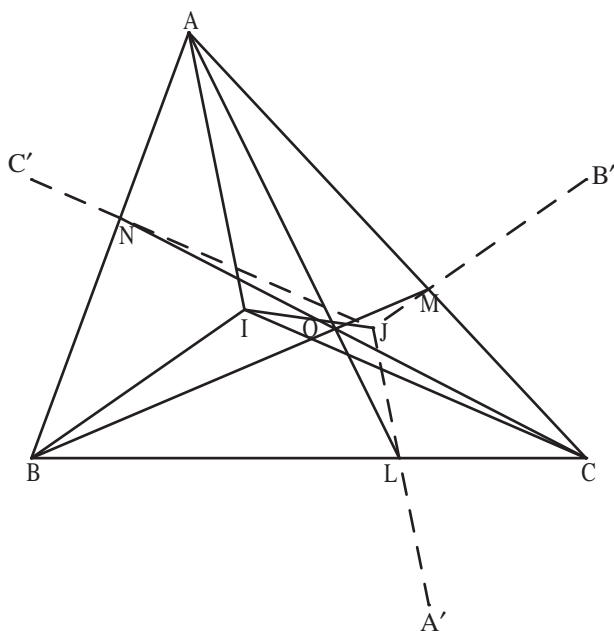


Fig. 3 – Le point  $\Omega$ .

#### 4. L'alignement

Il s'agit de montrer que le déterminant des coordonnées barycentriques des trois points  $G, \Omega, \Gamma$  est nul, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) & \tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) & \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \\ \cos(\hat{A}) & \cos(\hat{B}) & \cos(\hat{C}) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(voir figure 4). L'équation (4) n'est qu'une des nombreuses identités entre lignes trigonométriques des angles d'un triangle telles qu'on peut les trouver dans [6] et toujours turlupinantes à démontrer car on ne sait jamais par quel bout les prendre.

Éliminons de suite deux cas bien tristounets, ceux où le groupe des isométries du triangle ABC est non trivial, que le triangle ABC soit équilatéral ou isocèle.

1. Le triangle ABC est équilatéral : Les points G,  $\Gamma$  et  $\Omega$  sont confondus. Le déterminant (4) est d'ailleurs nul puisqu'il a trois colonnes égales.
2. Le triangle ABC est isocèle, par exemple ayant pour unique axe de symétrie la médiatrice de BC. Les points G,  $\Gamma$  et  $\Omega$  sont distincts mais alignés sur cette médiatrice. Le déterminant (4) est encore nul puisqu'il a deux colonnes égales.

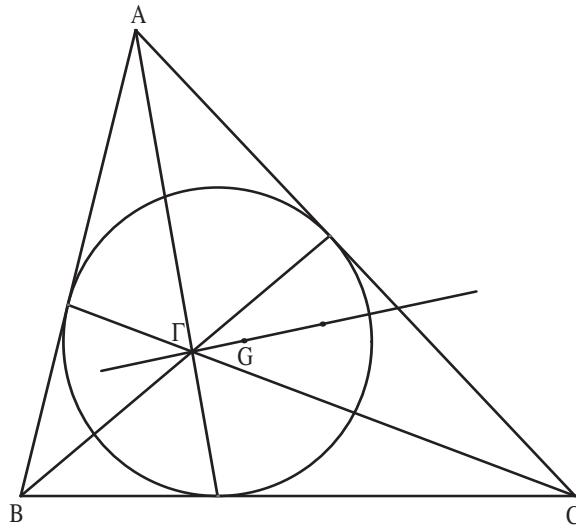


Fig. 4 – L'alignement G,  $\Gamma$ ,  $\Omega$ .

Dans la suite, on supposera donc que le triangle ABC est quelconque c'est-à-dire que son groupe d'isométries est trivial. Les angles  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  sont distincts et il en est de même des trois réels  $\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$ ,  $\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)$ ,  $\tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$  car la fonction

$\tan : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \rightarrow \mathbf{R}$  est strictement monotone croissante.

Pour démontrer (4), on va en donner une autre interprétation géométrique basée sur l'identité :

$$\cos(t) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \quad (5)$$

On considère dans le plan  $\mathbf{R}^2$  la cubique ( $\gamma$ ) graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

On rappelle que dans le plan  $\mathbf{R}^2$ , la condition d'alignement de trois points  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Compte tenu des équations (5) et (6), l'équation (4) signifie exactement que les trois points distincts de la cubique ( $\gamma$ ) d'abscisses  $\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$ ,  $\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)$ ,  $\tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$  sont alignés.

On se donne donc trois points distincts  $m_1, m_2, m_3$  de la cubique ( $\gamma$ ) d'abscisses respectives  $x_1, x_2, x_3$ . Comme la cubique ( $\gamma$ ) est un graphe, ces abscisses sont, elles aussi, distinctes.

On va chercher la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points soient alignés.

Supposons d'abord que les points  $m_1, m_2, m_3$  soient alignés sur une droite D qui ne peut être parallèle à l'axe des ordonnées car ( $\gamma$ ) est un graphe. L'équation de D est donc de la forme :

$$y = ax + b.$$

L'équation aux  $x$  des points d'intersection de D et ( $\gamma$ ) est :

$$(ax + b)(1 + x^2) = 1 - x^2$$

ou encore :

$$ax^3 + (b + 1)x^2 + ax + b - 1 = 0 \quad (7)$$

Nécessairement  $a \neq 0$  sinon le polynôme :

$$(b + 1)X^2 + b - 1,$$

non trivial car  $b + 1$  et  $b - 1$  ne sont pas simultanément nuls, de degré strictement inférieur à 3, aurait trois racines distinctes, ce qui est absurde.

D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme du troisième degré, on a :

$$x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 1 \quad (8)$$

(voir figure 5).

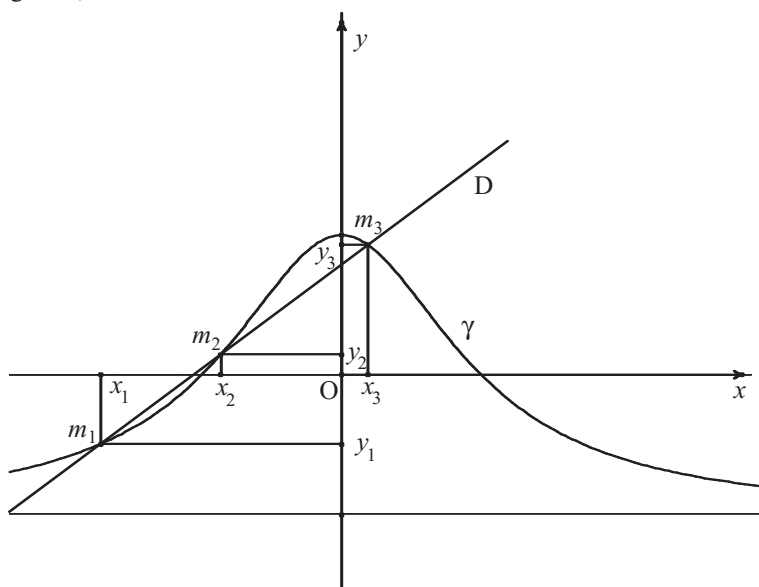


Fig. 5 – L'alignement de trois points sur la conique ( $\gamma$ ).



Réciproquement, supposons qu'on ait trois points distincts  $m_1, m_2, m_3$  de la cubique  $(\gamma)$  d'abscisses respectives  $x_1, x_2, x_3$  vérifiant la relation (8).

Tout d'abord,  $x_1 + x_2 \neq 0$  sinon on aurait  $x_1^2 = x_2^2 = -1$ , ce qui est absurde.

La droite  $m_1 m_2$  dont une équation est de la forme

$$y = ax + b$$

avec

$$a = -\frac{2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)} \neq 0$$

recoupe, d'après (7), la cubique  $(\gamma)$  en un troisième point  $m'_3$  d'abscisse  $x'_3$ .

Comme les abscisses  $x_1, x_2, x'_3$  sont les racines de l'équation (7), on a :

$$x_2 x'_3 + x'_3 x_1 + x_1 x_2 = 1.$$

On a donc :

$$x_3 = x'_3 = -\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Ainsi  $m_3 = m'_3$  et les points  $m_1, m_2, m_3$  de la cubique  $(\gamma)$  sont alignés. La relation (8) est bien la condition nécessaire et suffisante d'alignement cherchée.

Il suffit maintenant de démontrer que si  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  sont les angles d'un triangle, on a :

$$\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = 1 \quad (9)$$

Or, puisque

$$\hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C}),$$

on a :

$$\tan(\hat{A}) + \tan(\hat{B} + \hat{C}) = \tan(\hat{A}) + \frac{\tan(\hat{B}) + \tan(\hat{C})}{1 - \tan(\hat{B})\tan(\hat{C})} = 0$$

et par suite :

$$\tan(\hat{A}) + \tan(\hat{B}) + \tan(\hat{C}) = \tan(\hat{A})\tan(\hat{B})\tan(\hat{C}).$$

En divisant par le produit  $\tan(\hat{A})\tan(\hat{B})\tan(\hat{C})$ , on obtient :

$$\cot(\hat{B})\cot(\hat{C}) + \cot(\hat{C})\cot(\hat{A}) + \cot(\hat{A})\cot(\hat{B}) = 1 \quad (10)$$

Soit  $\hat{A}' = \frac{\pi - \hat{A}}{2}$ ,  $\hat{B}' = \frac{\pi - \hat{B}}{2}$ ,  $\hat{C}' = \frac{\pi - \hat{C}}{2}$ , on a :

$$\hat{A}' > 0, \hat{B}' > 0, \hat{C}' > 0, \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = \pi.$$

$\hat{A}', \hat{B}', \hat{C}'$  sont donc les angles d'un triangle et on peut leur appliquer la relation (5),

soit :

$$\cot(\widehat{B'})\cot(\widehat{C'}) + \cot(\widehat{C'})\cot(\widehat{A'}) + \cot(\widehat{A'})\cot(\widehat{B'}) = 1.$$

Compte tenu de la relation :

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$

qui entraîne :

$$\cot(\widehat{A'}) = \tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right), \quad \cot(\widehat{B'}) = \tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right), \quad \cot(\widehat{C'}) = \tan\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right),$$

on trouve bien la relation (9).

## 5. La géométrie du triangle

L'alignement précédent est le genre de résultat appartenant à ce qu'on appelle la géométrie du triangle. C'est un petit domaine des mathématiques qui remonte loin, sans doute à Euclide et de grands mathématiciens n'ont pas dédaigné de s'y intéresser. Pensons par exemple à la fameuse droite d'Euler dont je signale au passage qu'on peut montrer l'existence exactement par la méthode que nous venons de suivre.

Cette géométrie fut surtout florissante à la fin du 19<sup>e</sup> siècle à l'initiative de géomètres français comme Lemoine, Brocard ou Laisant et eût une grosse influence dans l'enseignement jusqu'aux années soixante. Après la « révolution » de 1968, la géométrie du triangle et d'une façon plus générale la géométrie tout court furent peu à peu réduites à la portion congrue dans les programmes si bien qu'aujourd'hui ni les formateurs, ni les futurs maîtres ne sont suffisamment qualifiés pour enseigner le peu de géométrie qui reste encore et c'est le spectacle pitoyable des oraux de l'agrégation où la majorité des candidats délaisse la leçon de géométrie pour celle d'algèbre pour le plus grand plaisir du jury !

### 5.1. Les ouvrages de référence sur la géométrie du triangle

Pour ceux que cela intéresse, je vais citer quelques ouvrages où sont exposés les définitions et les principaux résultats de la géométrie du triangle :

1. Ce sont les fameux traités de géométrie de Rouché et Comberousse, [8] et [7], où, en annexe à la fin de chacun de ces deux volumes, on trouvera des renseignements substantiels sur la géométrie du triangle. Le vocabulaire est un peu vieillot mais on y trouve en germe les prémisses d'un enseignement moderne. On peut citer de même le traité de Deltheil et Caire [12].
2. On se doit de posséder dans sa bibliothèque les non moins célèbres exercices de Frère Gabriel-Marie, [3]. où figure en fin d'ouvrage une importante annexe sur la géométrie du triangle. On y fera ses délices de nombreuses notices historiques fort intéressantes. L'ouvrage est réédité chez Gabay.
3. Le livre français que je préfère est le Lalesco, [6]. Il date un peu mais il est entièrement consacré à la géométrie du triangle. Il est très complet sur le sujet et on n'a pas fait mieux depuis. Il est réédité chez Gabay.

4. Les livres d'Yvonne et Pierre Sortais, [9] et [10], donnent pour la première fois une vision moderne de la géométrie du triangle.
5. Terminons cette petite liste non exhaustive par deux ouvrages anglo-saxons, le célèbre livre de Johnson, [4], une véritable perle s'il en est, et celui, non moins célèbre, de Coxeter et Greitzer [13].

## 5.2. Les sites Internet

À notre époque de communications où l'ordinateur est « tendance » comme on dit, ceux qui ont la chance de pouvoir en utiliser un peuvent surfer sur la toile à la recherche du meilleur site. Tout en cherchant l'âme sœur ou en exterminant quelques méchants électroniques, ils peuvent ouvrir une fenêtre sur la géométrie du triangle. Pour eux j'ai sélectionné les sites suivants, il en existe d'autres évidemment :

1. Tout d'abord celui de Clark Kimberling, [5], une véritable encyclopédie de la géométrie du triangle. On y trouve actuellement une liste de 1 114 points notés  $\{X(n) ; 1 \leq n \leq 1114\}$ , repérés par leurs coordonnées trilineaires et barycentriques par rapport au triangle de référence. J'avoue n'avoir pas bien compris le principe de leur classification : par exemple  $X(1)$  est le centre du cercle inscrit, sans doute parce que ses coordonnées trilineaires sont (1,1,1), pourquoi pas, et  $X(2)$  est le centre de gravité car ses coordonnées barycentriques sont (1,1,1), je n'ai rien contre. Quant aux derniers points  $X(1113)$  et  $X(1114)$ , ce sont les intersections de la droite d'Euler avec le cercle circonscrit au triangle de référence.

Pour chaque entrée, on donne les coordonnées trilineaires et barycentriques, les alignements éventuels avec d'autres points de la liste, du genre  $X(n) \in p, q$  voulant dire que le point  $X(n)$  appartient à la droite joignant  $X(p)$  et  $X(q)$  ou des liens géométriques avec d'autres points, du style  $X(p)$  et  $X(q)$  sont isotomiques ou isogonaux, etc.

Très rarement donne-t-on une définition ou une construction géométrique de  $X(n)$ . Seuls les spécialistes peuvent savoir l'origine de la plupart des points de la liste ! Je m'étais souvent demandé pourquoi on ne parlait jamais du Savant Cosinus dont les coordonnées barycentriques sont pourtant simples et je m'étais dit que c'était parce qu'on n'en connaissait pas une construction géométrique naturelle. Aussi, une fois celle-ci trouvée, je suis allé par curiosité sur le site de Kimberling pour voir ce qu'on en disait. À mon grand désappointement, pas grand chose. J'eus déjà beaucoup de mal à retrouver le Savant Cosinus dans la liste, c'est le point  $X(63)$  ! Puis figuraient 44 alignements dont le nôtre :  $X(63) \in 2, 7$  et quelques liens avec d'autres points, par exemple  $X(19)$  et  $X(63)$  sont isogonaux, etc.

Le seul petit reproche que je ferais à cette liste, comme à la géométrie du triangle en général, est de privilégier les propriétés euclidiennes. Donnons quelques exemples :

- (a) Le centre du cercle inscrit  $I = X(1)$  au triangle  $ABC$  est un point de la géométrie euclidienne : si on transforme la configuration  $ABCI$  par une isométrie en la configuration  $A'B'C'I'$ , le point  $I'$  est encore le centre du cercle inscrit au triangle  $A'B'C'$ . Par contre  $X(1)$  n'est pas un point de la géométrie affine ni *a fortiori* un point de la géométrie projective.

(b) Le centre de gravité  $X(2)$ , point de la géométrie affine et *a fortiori* de la géométrie euclidienne, n'est pas un point de la géométrie projective.

(c) Les centres isodynamiques  $X(15)$  et  $X(16)$  malgré leur définition apparemment euclidienne sont des points de la géométrie circulaire, donc *a fortiori* de la géométrie euclidienne. Autrement dit, si  $Z$  est un des deux centres isodynamiques du triangle  $ABC$  et si on transforme la configuration  $ABCZ$  par une transformation circulaire directe ou indirecte en la configuration  $A'B'C'Z'$ ,  $Z'$  est l'un des deux centres isodynamiques du triangle  $A'B'C'$ . Par exemple,  $X(15)$  et  $X(16)$  sont inverses par rapport au cercle circonscrit au triangle  $ABC$  ; reconnaissons honnêtement que Kimberling signale cette dernière propriété. Pour ces questions, consulter [2].

Bref la géométrie du triangle ignore apparemment la théorie des groupes qui le lui rend bien d'ailleurs !

C'est ainsi qu'avec l'évolution des programmes, nous arrivons à des situations aberrantes où les candidats à l'agrégation savent montrer la simplicité de  $O^+(3, \mathbf{R})$  mais ne sont pas capables de composer deux rotations planes ou bien ânonner la démonstration que tout groupe simple d'ordre 168 est isomorphe à  $PSL(2, F_7)$  sans savoir exhiber une seule transformation circulaire directe du plan euclidien dont le groupe circulaire est pourtant isomorphe à  $PSL(2, \mathbf{C})$  ! Versons une petite larme au passage sur la défunte géométrie projective plane, sans doute le Secret-Défense : si les candidats connaissent par cœur la définition de  $PGL(n, \mathbf{R})$ , ils sont pour la plupart bien incapables d'exhiber le moindre élément de  $PGL(3, \mathbf{R})$ , ne serait-ce que la plus misérable homologie, une transformation pourtant essentielle en géométrie descriptive. Ne parlons pas évidemment de la géométrie projective du triangle dont ils ne connaissent aucune configuration.

Finalement, le plus intéressant dans ce site est son glossaire de la géométrie du triangle. On y trouve toutes les définitions connues ou inconnues sur le sujet. Moi qui ne connaissais que l'isotomie et l'isogonalité, que pouvais-je dire devant les conjugués cyclocéviens ou autre triangle des cofacteurs, sinon que mon ignorance était abyssale !

Pour bien de ces définitions, Kimberling renvoie au site de MathWorld, [11], et propose beaucoup d'autres liens.

2. Le site de Hyacinthos, [1], qui est un lieu de discussion sur la géométrie du triangle. Il vaut mieux connaître la classification de Kimberling et son glossaire pour pouvoir en suivre les dialogues. Les discussions sont souvent hallucinantes. L'indigestion de géométrie du triangle que nous avons subie pendant des siècles n'a-t-elle pas conduit par contrecoup à la disparition progressive et programmée de la Géométrie de nos programmes d'enseignement ?

## 6. Conclusion

En hommage au dessinateur Georges COLOMB, dit CHRISTOPHE, qui a fait rire tant de générations avec les aventures de son savant distrait, je propose d'appeler le point  $\Omega$  (le) Savant Cosinus.

Né le 25 mai 1856 à Lure, fils du Principal du Collège de la Ville, Georges COLOMB fit ses études à Lure jusqu'au baccalauréat, puis à Besançon et Paris. Il fut reçu à l'École Normale Supérieure (sciences). Licencié de Mathématiques et de Physique, Docteur en Sciences Naturelles, il fut maître de conférences et sous-directeur du laboratoire de Botanique à la Sorbonne.

Georges COLOMB est l'auteur d'une trentaine d'ouvrages didactiques scolaires de sciences naturelles, avec des dessins d'illustration de sa main (Librairie Armand Colin).

Georges COLOMB est aussi le créateur de bandes dessinées, la Famille Fenouillard, le Savant Cosinus, Pic et Ploc ainsi que le Sapeur Camember devenu le symbole et l'image de marque du commerce et de l'animation de la ville de Lure.

Décédé le 3 janvier 1945 à Nyons dans la Drôme où il s'était replié avec son épouse en 1940 fuyant l'occupation allemande, Georges COLOMB repose dans le caveau familial d'Asnières (Hauts-de-Seine).

Les œuvres de Christophe sont éditées par Armand Colin, Paris.

À lire également « Georges Colomb - Christophe » de Paul René Machin.

Un journal satirique « La Bougie du Sapeur » (52 avenue de l'Arbre Sec - 75001 Paris) paraît tous les quatre ans, le 29 février des années bissextiles, à la date anniversaire du Sapeur Camember.

## Références

- [1] We discuss themes on triangle geometry. <http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>.
- [2] F. Rideau. Petit essai de théologie circulaire, Avril-Juin 2003. Quadrature n° 48.
- [3] F. G.-M. *Exercices de Géométrie*. Réédition Gabay.
- [4] Roger A. Johnson. *Advanced Euclidian Geometry (Modern Geometry)*. Dover, 1960. (from 1929 original).
- [5] Clark Kimberling. <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
- [6] Trajan Lalesco. *La Géométrie du Triangle*. Vuibert, 1952.
- [7] Eugène Rouché and Charles de Comberousse. *Traité de Géométrie*, deuxième partie, Géométrie dans l'Espace. Réédition Gabay.
- [8] Eugène Rouché and Charles de Comberousse. *Traité de Géométrie*, première partie, Géométrie Plane. Gauthier-Villars, 1900.
- [9] Yvonne Sortais and René Sortais. *La géométrie du triangle*. Hermann, 1987.
- [10] Yvonne Sortais and René Sortais. *La géométrie de l'espace et du plan*. Hermann, 1988.
- [11] Eric Weisstein. Eric Weisstein's World of Mathematics. <http://mathworld.wolfram.com/>.
- [12] R. Deltheil et D. Caire. Géométrie et compléments. Réédition Gabay.
- [13] Coxeter et Greitzer. Redécouvrons la géométrie. Réédition Gabay